

Dispense per il Corso

Misure Astrofisiche

Mauro Orlandini

Anno Accademico 2007/2008

Versione aggiornata al 9 Maggio 2008 16:12

Indice

Indice	iv
Elenco delle figure	viii
Elenco delle tabelle	ix
I Astronomia Posizionale	5
1 Richiami di trigonometria sferica	7
1.1 Introduzione	7
1.2 Relazione tra angoli e lati di un triangolo sferico	8
2 Sistemi di coordinate astronomiche	11
2.1 Il sistema altazimutale	11
2.2 Il sistema orario	12
2.3 Il sistema equatoriale	13
2.4 Il sistema eclittico	13
2.5 Il sistema galattico	15
3 Il tempo in astronomia	17
3.1 Giorno solare vero e tempo solare vero	17
3.2 Giorno solare medio e tempo solare medio	18
3.2.1 L'equazione del tempo	20
3.3 Il giorno siderale e il tempo siderale	21
3.4 Il tempo universale	23
3.5 Relazione tra tempo solare medio e tempo siderale	24
4 Fenomeni che modificano le coordinate astronomiche	25
4.1 La rifrazione atmosferica	25
4.1.1 Misura della costante di rifrazione κ	27
4.2 La parallasse	28
4.2.1 La parallasse geocentrica	28
4.2.1.1 Misura del semi-diametro angolare della Luna	30

4.2.1.2	Misura della distanza Terra–Luna	32
4.2.2	La parallasse stellare	34
4.2.2.1	Misura della parallasse stellare	35
4.2.2.2	Misura di moti propri	36
4.2.2.3	Misura della velocità della luce	36
4.3	Aberrazione della luce	37
4.3.1	Calcolo della costante di aberrazione	39
4.3.2	Aberrazione diurna	39
4.4	Precessione degli equinozi	39
4.4.1	Misura della posizione di Υ	40
4.4.2	Effetto della precessione sulle coordinate equatoriali	41
4.4.3	Cause della precessione	43
4.5	Nutazione	44
5	Sistemi binari	47
5.1	Definizione	47
5.2	Determinazione della massa stellare	48
5.3	Binarie visuali	49
5.4	Binarie spettroscopiche	51
5.5	Binarie ad eclisse	54
5.6	Binarie astrometriche	58
5.7	Binarie X	58
5.8	Relazione Massa-Luminosità	59
5.9	Equazioni del moto in un sistema binario	60
5.9.1	Soluzione dell'equazione del moto	61
5.9.2	Equazione dell'orbita e prima legge di Keplero	64
5.9.3	I parametri orbitali	64
5.9.4	Seconda e terza legge di Keplero	66
5.9.5	Posizione lungo l'orbita	68
5.9.6	Soluzione dell'equazione di Keplero	70
5.9.7	La posizione di Venere il 11/01/1981	71
5.9.8	La velocità di fuga	73
II	Astrofisica delle Alte Energie	75
6	Accrescimento come Sorgente di Energia	77
6.1	Fonti di energia per sorgenti cosmiche di raggi X	77
6.2	Il limite di Eddington	78
6.3	Lo spettro di emissione	79

7	Elementi di Dinamica dei Gas	81
7.1	Dinamica dei gas	81
7.2	Le equazioni della dinamica dei gas	81
7.3	Trasporto radiativo: Introduzione	83
7.4	Flussi stazionari adiabatici ed isotermitici	86
7.5	Onde sonore	88
7.6	Accrescimento stazionario a simmetria sferica	90
8	Teoria Cinetica del Plasma	99
8.1	Definizione di plasma	99
8.2	Neutralità di carica, oscillazioni di plasma e lunghezza di Debye	99
8.3	Collisioni Coulombiane	102
8.4	Plasmi termici: tempo di rilassamento e libero cammino medio	107
9	Processi Radiativi	109
9.1	Introduzione	109
9.2	Processo di scattering	110
9.3	Random walk	111
9.4	Bremsstrahlung	113
9.4.1	Bremsstrahlung termico	116
9.4.2	Assorbimento per bremsstrahlung termico	118
9.5	Scattering Compton	118
9.5.1	Scattering da elettroni a riposo	118
9.5.2	Scattering da elettroni in movimento	120
9.5.3	Il parametro di Comptonizzazione y	122
9.5.4	Significato fisico del parametro di Comptonizzazione y	124
9.5.5	Regimi spettrali per scattering multipli	125
10	Tecniche di Osservazione	131
10.1	Introduzione	131
10.2	Rivelatori per astronomia X	131
10.2.1	Contatori proporzionali	135
10.2.2	Contatori proporzionali a scintillazione	137
10.2.3	Tecniche di reiezione del fondo	137
10.2.4	Rivelatori a scintillazione	138
10.2.5	Rivelatori a semiconduttore	140
10.2.6	Microcalorimetri	140
10.3	Collimatori meccanici	141
10.4	Tecniche di focalizzazione di raggi X e γ	143
10.4.1	Ottiche di focalizzazione di raggi X	143
10.4.2	Diffrazione di Bragg e Laue	147
10.4.2.1	Le lenti di Laue	154
10.5	Rivelazione di raggi X da sorgenti cosmiche: Considerazioni statistiche	155

10.6 Il rocking come tecnica per la determinazione del fondo	159
11 Fit Spettrale e XSPEC	163
11.1 Introduzione	163
11.2 Fondamenti di fitting spettrale	163
11.3 Fitting spettrale e XSPEC	167
A Storia della scoperta delle leggi di Keplero	173
B Spettri X di Sorgenti Celesti	175
B.1 CI Cam	175
B.2 Vela X-1	180
B.3 4U1626-67	183
C Derivazione di Eq. 9.29	185
D Risposta angolare di un collimatore meccanico	187
E Definizione del formato FITS	191

Elenco delle figure

1.1	Definizione di cerchio massimo e poli di una sfera	7
1.2	Relazioni tra angoli e lati di un triangolo sferico	8
2.1	Sistema di coordinate altazimutale	11
2.2	Sistema di coordinate orario	12
2.3	Sistema di coordinate equatoriale	13
2.4	Sistema di coordinate eclittico	14
2.5	Trasformazione tra coordinate equatoriali e coordinate eclittiche	14
2.6	Sistema di coordinate galattico	15
2.7	Trasformazione tra coordinate equatoriali e coordinate galattiche	15
3.1	Il giorno solare vero	18
3.2	Differenze tra Sole vero, Sole fittizio e Sole medio	19
3.3	L'equazione del tempo	20
3.4	Il giorno siderale	21
3.5	Il tempo siderale	22
3.6	Montatura equatoriale di un telescopio	23
4.1	Rifrazione di un raggio di luce che attraversa l'atmosfera	26
4.2	Misura della costante di rifrazione κ	27
4.3	Definizione di angolo parallattico	29
4.4	Definizione di parallasse geocentrica	29
4.5	Misura del semi-diametro angolare della Luna	30
4.6	Misura della distanza della Luna	32
4.7	La parallasse stellare	34
4.8	Il sistema Sole–Terra–Giove	37
4.9	Definizione dell'angolo di aberrazione	38
4.10	Aberrazione della luce	38
4.11	La precessione degli equinozi	40
4.12	Declinazione del Sole	41
4.13	Ascensione retta del Sole	41
4.14	Variazione della posizione del polo Nord celeste per effetto della precessione	41
4.15	La precessione degli equinozi: effetto della Luna	43

4.16	Effetto della nutazione sul moto di precessione	44
4.17	Scomposizione del moto di nutazione	44
5.1	Schema di un sistema binario	48
5.2	Definizione dell'angolo di inclinazione	50
5.4	Una binaria spettroscopica a doppia linea	51
5.3	Proiezione del piano orbitale	51
5.5	Velocità radiale di stelle appartenenti al sistema binario QW Gem	52
5.6	Binarie ad eclisse: limite sull'angolo di inclinazione	55
5.7	Binarie ad eclisse: curva di luce per $i = 90^\circ$	55
5.8	Binarie ad eclisse: curva di luce per $i < 90^\circ$	55
5.9	Il moto apparente di Sirio e della sua compagna nel cielo	58
5.10	Relazione Massa-Luminosità	59
5.11	Definizione dei raggi vettori in un sistema binario	60
5.12	Velocità radiale e sua proiezione lungo r	62
5.13	Definizione dei parametri orbitali	65
5.14	Definizione dei versori in un sistema di coordinate polari	67
5.15	Definizione dell'anomalia eccentrica E	68
5.16	Geometria per determinare la relazione tra E ed r	68
7.1	Geometria per raggi incidenti formanti un angolo θ con la normale n all'unità di area dA	84
7.2	Numero di Mach al quadrato $\mathcal{M}^2 = v^2(r)/c_s^2(r)$ in funzione della distanza r/r_s per un flusso di gas adiabatico, in accrescimento a simmetria sferica, nel campo gravitazionale di una stella.	94
8.1	Collisioni Coulombiane di due particelle di stessa carica (in questo caso positiva) e stessa massa.	103
8.2	Definizione della geometria nel caso urti Coulombiani di una particella di plasma di velocità v	105
9.1	Campo di radiazione per un mezzo di dimensione L	114
9.2	Definizione della geometria per un elettrone e che si muove nel campo di radiazione dello ione di carica Ze	115
9.3	Definizione della geometria per un lo scattering di un fotone da parte di un elettrone inizialmente a riposo.	119
9.4	Definizione della geometria dello scattering Compton nel SdR K dell'osservatore e nel SdR K' dell'elettrone a riposo.	121
9.5	Spettro emergente da un mezzo termico, non relativistico caratterizzato da emissione ed assorbimento libero-libero e da scattering Compton inverso saturato. . .	128
9.6	Spettro prodotto da Comptonizzazione non saturata di fotoni di bassa energia su elettroni termici.	130
10.1	Assorbimento atmosferico dei raggi X in funzione dell'altitudine.	132

10.2	Output di un rivelatore a gas in funzione del voltaggio anodico.	133
10.3	Coefficiente di assorbimento per unità di massa per l'Alluminio.	134
10.4	Configurazione tipica di un contatore proporzionale.	135
10.5	Sezione della finestra di ingresso del rivelatore LECS a bordo del satellite BeppoSAX.	137
10.6	Funzionamento dell'anticoincidenza del rivelatore PDS a bordo di BeppoSAX.	139
10.7	Diagramma di funzionamento di un rivelatore a semiconduttore.	140
10.8	Principio operativo di un microcalorimetro.	141
10.9	Schema di collimatore meccanica per raggi X.	142
10.10	Funzione di trasmissione dei collimatori dell'esperimento di alta energia (15–200 keV) PDS a bordo del satellite BeppoSAX.	142
10.11	Visione esplosa dell'esperimento di alta (15–200 keV) energia PDS a bordo di BeppoSAX.	144
10.12	Efficienze di riflessione teoriche superficiali in funzione dell'energia e della lunghezza d'onda per diversi angoli di incidenza radente e per diversi materiali.	146
10.13	Sezioni di superfici riflettenti per specchi di raggi X.	148
10.14	Processo costruttivo di uno specchio per raggi X per elettroformatura.	149
10.15	Immagini di uno dei tre specchi per raggi X a bordo di XMM-Newton.	150
10.16	Geometria della diffrazione di Bragg.	151
10.18	Definizione degli indici di Miller per l'orientamento dei piani reticolari di un cristallo	151
10.17	Geometria della diffrazione di Laue.	152
10.19	Curve teoriche di ottimizzazione dello spessore di cristalli di Germanio per diffrazione di Laue sul piano cristallino (440).	153
10.20	Confronto tra la diffrazione di Bragg da un cristallo perfetto ed uno reale.	153
10.21	Definizione della mosaicità $\Delta\theta_B$ di un cristallo.	154
10.22	Principio di funzionamento di una lente di Laue.	155
10.23	Lente di Laue con cristalli innestati.	156
10.24	Lente di Laue dell'esperimento CLAIRE.	156
10.25	Serie temporale della pulsar X GX301–2 (periodo di pulsazione di ~ 700 sec) accumulata dallo strumento PDS.	160
10.26	Tecnica del rocking applicata allo spettro dell'ammasso di galassie in Coma.	161
A.1	La concezione del mondo secondo Keplero	173
B.1	CI Cam: curve di luce in varie bande.	176
B.2	Spettro di CI Cam osservato da BeppoSAX nella prima osservazione.	177
B.3	Spettro di CI Cam osservato da BeppoSAX nella seconda osservazione.	178
B.4	Confronto tra gli spettri di CI Cam osservati nelle due osservazioni BeppoSAX.	179
B.5	Spettro della pulsar X binaria Vela X–1.	181
B.6	Dipendenza della riga di ciclotrone nello spettro di Vela X–1 al variare del modello.	182
B.7	Spettro della pulsar X 4U1626–67.	183

C.1	Collisione di un elettrone con uno ione ed emissione di bremsstrahlung.	185
D.1	Geometria delle celle di un collimatore meccanico.	187
D.2	Risposta angolare di un collimatore considerando pareti non perfettamente opache.	190

Elenco delle tabelle

3.1	Tipi di giorno e tempo usati in astronomia.	17
4.1	Accuratezza nella misura di d nota la parallasse geocentrica	34
4.2	Costanti di precessione m e n a diverse epoche	43
11.1	Proprietà di materiali utilizzati in sistemi di rivelazione per astronomia X	166
11.2	Intervalli di confidenza vs $\Delta\chi^2$	169

Introduzione

Il corso di *Misure Astrofisiche* vuole essere una sorta di “corso di laboratorio” di astrofisica delle alte energie, dove con questo termine si intende quella parte dell’astrofisica che studia i processi fisici che avvengono in sorgenti celesti che hanno il loro picco di emissione nella banda dei raggi X/ γ . I processi maggiormente coinvolti saranno quindi scattering Compton e bremsstrahlung e nella maggior parte dei casi interesseranno oggetti compatti, oggetti cioè il cui parametro di compattezza, definito come il rapporto tra la loro massa ed il loro raggio, è molto grande.

La prima evidenza osservativa che in sorgenti che emettono raggi X sono presenti oggetti “compatti” nel senso proprio del termine — cioè oggetti di piccole dimensioni e di enormi densità — è avvenuta nel 1971 con la scoperta di emissione pulsata a 4.8 sec da parte della sorgente X-3 nella costellazione del Centauro. Assumendo che la pulsazione osservata fosse dovuta al moto di rotazione della stella su se stessa (ipotesi poi rivelatasi corretta), affinché la superficie della stella non venga distrutta dalla forza centrifuga è necessario che

$$\frac{GM}{R^2} \gtrsim \Omega^2 R$$

dove G è la costante gravitazionale, Ω la velocità angolare e M e R sono la massa ed il raggio dell’oggetto. Da questa espressione segue che $G \langle \rho \rangle \gtrsim \Omega^2$, dove $\langle \rho \rangle$ è la densità media dell’oggetto. Un periodo di rotazione di 4.8 sec implica che $\langle \rho \rangle \gtrsim 10^7 \text{ g cm}^{-3}$, da cui la natura compatta dell’oggetto.

Questa scoperta ha aperto un nuovo orizzonte di ricerca perché, per la prima volta, si potevano studiare contemporaneamente gli effetti sulla materia dovuti sia a forti campi gravitazionali¹ che ad enormi campi magnetici². Le due discipline che li studiano, la teoria della relatività (sia generale che ristretta) e la magnetoidrodinamica (quantistica), trovavano quindi il loro laboratorio ideale nelle cosiddette pulsar X. Proprio per questo, un termine più appropriato per questa branca della fisica dovrebbe essere *Astrofisica Relativistica*, ma la dizione “Astrofisica delle Alte Energie” viene ancora mantenuta per ragioni storiche.

Il fatto che questi oggetti producano la maggior parte della loro energia nella banda dei raggi X implica che il loro “motore” non sia la conversione dell’energia gravitazionale in energia termica (attraverso le reazioni nucleari la cui emissione viene termalizzata dall’atmosfera stellare, come

¹Il rapporto tra la forza di gravità su di una stella di neutroni ($M \sim M_\odot$ e $R_{\text{ns}} \sim 10 \text{ Km}$) e quella sulla superficie della Terra è $(M_\odot/M_\oplus)(R_\oplus/R_{\text{ns}})^2 \sim 10^{10}$.

²Per conservazione del flusso magnetico, una stella di neutroni che abbia avuto come progenitore una stella di tipo solare con campo magnetico $\sim 100 \text{ gauss}$, possederà un campo magnetico dell’ordine di $100 \cdot (R_\odot/R_{\text{ns}})^2 \sim 10^{12} \text{ gauss}$.

nel nostro Sole) dato che gli spettri osservati non sono termici. Subito dopo la loro scoperta ci si è reso conto che il loro “motore” è la conversione in energia elettromagnetica dell’energia cinetica della materia che viene catturata dal campo gravitazionale dell’oggetto compatto: il cosiddetto *accrescimento di materia*. Infatti l’evidenza di moto orbitale dell’oggetto compatto di Cen X-3 è stata la prima prova osservativa che questo tipo di sorgenti sono sistemi binari contenenti un oggetto compatto (nana bianca, stella di neutroni o buco nero) ed una stella “normale” a cui strappano materia; a questi sistemi è stato dato il nome di binarie X.

Tra le tante “Misure Astrofisiche” che possono essere effettuate ho scelto *la misura di uno spettro X emesso da un oggetto compatto*. Il corso quindi fornirà gli elementi necessari per analizzare ed interpretare gli spettri osservati.

Alla luce di quanto detto sopra, il corso verrà diviso in due parti. La prima parte avrà come obiettivo la descrizione del moto in un sistema binario e quindi si occuperà del modo in cui si descrive la posizione di un corpo celeste e quali correzioni bisogna apportare alle misure.

Partiremo da un richiamo di trigonometria sferica per poi passare alla descrizione dei sistemi di coordinate celesti. Nel successivo capitolo parleremo della misura del tempo (fondamentale per calcolare il moto dei corpi celesti) per poi passare alla descrizione di tutte le correzioni da apportare alla misura della posizione di un oggetto (rifrazione, parallasse, ecc). La prima parte verrà infine conclusa dalla descrizione della dinamica in un sistema binario.

La seconda parte si occuperà dello studio dell’emissione da parte di oggetti compatti, della determinazione dei processi che hanno dato origine all’emissione osservata, e la determinazione delle proprietà fisiche della materia in questi sistemi.

Dopo l’introduzione del concetto di accrescimento, verranno discussi i fondamenti di dinamica dei gas e dei plasmi che servono a descrivere le condizioni del flusso di materia che viene catturato ed accresciuto. Nel successivo capitolo vengono descritti i processi radiativi che sono alla base dell’emissione osservata in questi sistemi.

Dopo l’introduzione “teorica” dei processi fisici, viene data una panoramica sui sistemi di rilevazione dei raggi X di natura cosmica, per poter comprendere quali sono le problematiche sperimentali e capire la maniera in cui gli spettri vengono prodotti. Particolare rilievo è stato dato alla descrizione dei rivelatori a bordo del satellite per Astronomia X BeppoSAX, ideato e costruito dagli Istituti di Astrofisica del CNR (ora confluiti nell’INAF) in collaborazione con un Istituto del CNR Olandese e lo Science Department dell’Agenzia Spaziale Europea. Lo strumento di alta energia PDS era sotto la responsabilità del Professor Frontera ed è stato realizzato dal gruppo di Astronomia X dell’Istituto TeSRE (ora IASF) del CNR di Bologna, di cui faccio parte.

Lo strumento informatico di analisi spettrale in raggi X, il programma XSPEC, viene brevemente descritto nell’ultimo capitolo, in cui vengono dati i rudimenti dell’analisi spettrale ed una brevissima introduzione di statistica per comprendere come ottenere lo spettro che meglio si concorda con i dati, ed i parametri fisici ad esso associato.

Infine, copia di queste dispense è disponibile online al sito <http://www.iasfbo.inaf.it/~mauro/Didattica/Mis-Astro>

Bibliografia essenziale

- ❑ **Fundamental Astronomy**, H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K.J. Donner (Editors), Springer-Verlag (2007)
- ❑ **Accretion Power in Astrophysics**, Frank J., King A., and Raine D., Cambridge University Press (2002)
- ❑ **Radiative Processes in Astrophysics**, Rybicki G.B. and Lightman A.P., Wiley Publication (1979)
- ❑ **X-ray Astronomy**, Giacconi R. and Gursky H. (eds), Reidel Publishing (1974)
- ❑ **Astrofisica delle Alte Energie**, Vietri M., Bollati Boringhieri (2006)
- ❑ **Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing**, Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. and Vetterling W.T., Cambridge University Press (1992) disponibile anche online al sito <http://www.nr.com>
- ❑ **SAX Observers' Handbook**, disponibile online al sito <ftp://ftp.asdc.asi.it/pub/sax/doc/handbook>
- ❑ **The Gamma Ray Lens**, disponibile online al sito <http://sci.esa.int/science-e/www/object/index.cfm?fobjectid=38094>
- ❑ **XSPEC User Manual** disponibile online al sito <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/xanadu/xspec>

Parte I

Astronomia Posizionale

Capitolo 1

Richiami di trigonometria sferica

1.1 Introduzione

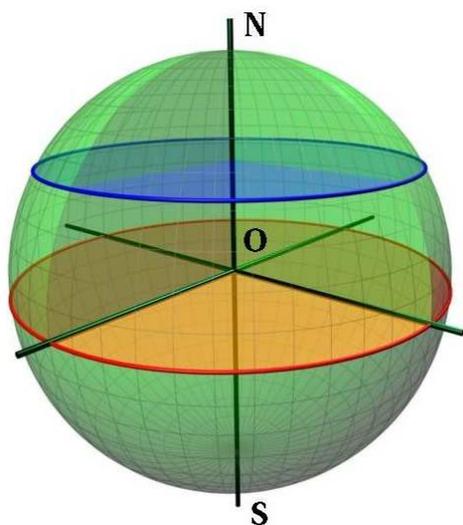


Figura 1.1: Definizione di cerchio massimo e poli di una sfera.

Tutti gli astri ci appaiono alla stessa distanza dalla Terra e posti sulla superficie interna di una enorme sfera, detta **sfera celeste**, di cui noi occupiamo il centro. Per questo motivo la geometria che deve essere usata per descrivere le loro posizioni non può essere la geometria euclidea, tipica di uno spazio piatto, ma una geometria non euclidea come è appunto quella sulla superficie di una sfera.

Se consideriamo una sfera di raggio R e centro O , ogni piano passante per O definisce sulla sfera un **cerchio massimo** di raggio R (indicato in rosso in Figura 1.1). Consideriamo uno di questi piani come **piano equatoriale**. La retta passante per O e perpendicolare al piano equatoriale definisce sulla sfera due punti che sono i **poli** del cerchio massimo (si veda Figura 1.1). Un piano che **non** passi per il centro della sfera definisce sulla sfera un cerchio di raggio $r < R$ (in blu in Figura 1.1).

Il cerchio massimo, su una superficie sferica, è il percorso con la minore curvatura. Perciò il percorso più breve tra due punti posti sulla sfera è un arco di cerchio massimo (chiamato **distanza di cerchio massimo**). Dato che nella geometria euclidea la distanza minima tra due punti è una retta, un cerchio massimo (detto anche **geodesica**) è l'equivalente della retta in geometria sferica. Dato che la distanza tra due punti su una sfera è, come abbiamo visto, un arco di cerchio massimo, ne segue che la distanza tra due punti può essere misurata tramite l'angolo sotteso al centro O della sfera.

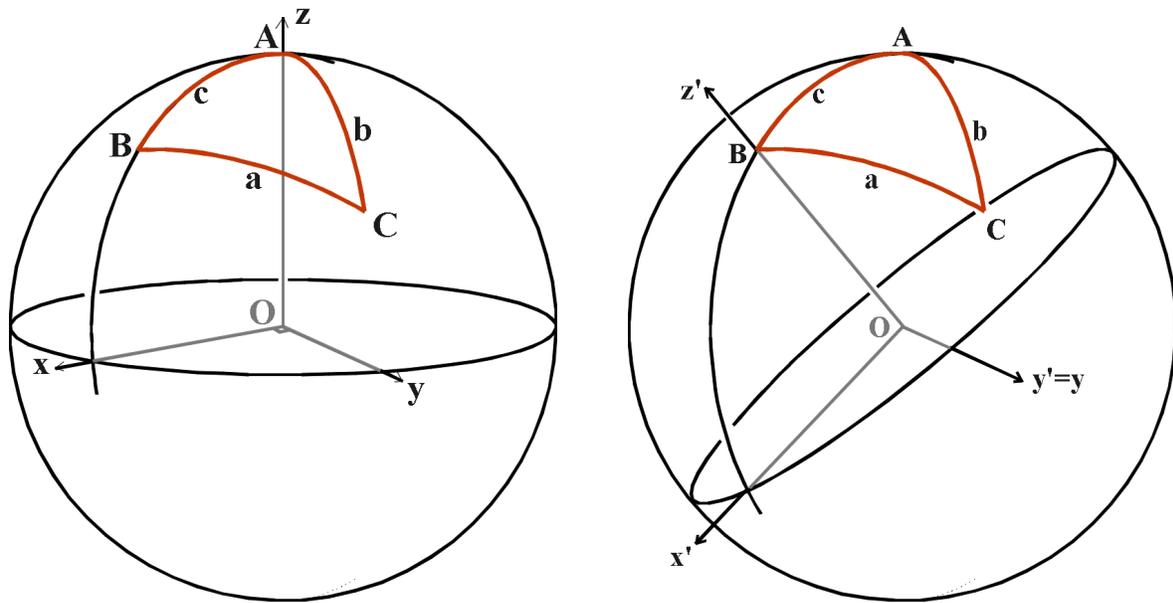


Figura 1.2: Relazioni tra angoli e lati di un triangolo sferico. A sinistra il vertice A coincide con il polo Nord della sfera. A destra, dopo una rotazione, è il vertice B che va a coincidere con il polo Nord.

1.2 Relazione tra angoli e lati di un triangolo sferico

Quando due archi di cerchio massimo si intersecano, possiamo definire **angolo sferico** l'angolo formato dalle tangenti ai due archi nel punto di intersezione. Una definizione alternativa può essere quella di angolo formato tra i due piani dei cerchi massimi dove si intersecano al centro della sfera.

Un triangolo sferico ABC giace sulla superficie di una sfera ed i suoi tre lati a, b, c sono **archi di cerchi massimi** (si veda Figura 1.2).

Consideriamo ora la figura a sinistra di Figura 1.2, in cui il vertice A coincide con il polo Nord della sfera e l'arco AB definisce il nostro "meridiano di riferimento". Le coordinate del punto C in questo sistema di coordinate saranno:

$$\begin{aligned} x &= \sin(b) \cos(A) \\ y &= \sin(b) \sin(A) \\ z &= \cos(b) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Se ora ruotiamo il nostro sistema di coordinate attorno all'asse y spostando il polo Nord della sfera dal punto A al punto B (si veda la figura a destra di Figura 1.2) abbiamo che le coordinate del punto C in questo nuovo sistema di coordinate saranno:

$$\begin{aligned}
 x' &= \sin(a) \cos(\pi - B) = -\sin(a) \cos(B) \\
 y' &= \sin(a) \sin(\pi - B) = \sin(a) \sin(B) \\
 z' &= \cos(a)
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

La relazione tra il vecchio sistema di coordinate e quello nuovo è semplicemente una rotazione degli assi x e z di un angolo c , cioè:

$$\begin{aligned}
 x' &= x \cos(c) - z \sin(c) \\
 y' &= y \\
 z' &= x \sin(c) + z \cos(c)
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

e quindi:

$$-\sin(a) \cos(B) = \sin(b) \cos(A) \cos(c) - \cos(b) \sin(c) \tag{1.4a}$$

$$\sin(a) \sin(B) = \sin(b) \sin(A) \tag{1.4b}$$

$$\cos(a) = \sin(b) \cos(A) \sin(c) + \cos(b) \cos(c) \tag{1.4c}$$

Le tre equazioni 1.4 ci danno le formule per risolvere i triangoli sferici. Eq. 1.4b viene detta *teorema dei seni*:

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)} = \frac{\sin(b)}{\sin(B)} = \frac{\sin(c)}{\sin(C)} \tag{1.5}$$

Eq. 1.4c viene detta *teorema dei coseni*:

$$\begin{aligned}
 \cos(a) &= \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(A) \\
 \cos(b) &= \cos(c) \cos(a) + \sin(c) \sin(a) \cos(B) \\
 \cos(c) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \cos(C)
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Dunque, in un triangolo sferico, i 3 lati sono determinati univocamente dai 3 angoli, una proprietà non presente nei triangoli piani. La somma degli angoli interni di un triangolo sferico non è fissata ma sarà sempre maggiore di 180° , ed in generale:

$$\begin{aligned}
 0 &< a + b + c < 2\pi \\
 \pi &< A + B + C < 3\pi
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

Se definiamo **eccesso sferico** la quantità

$$E \equiv (A + B + C - \pi) \tag{1.8}$$

allora abbiamo che vale la seguente relazione

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{E}{2} \sin \left(A - \frac{E}{2} \right)}{\sin \left(B - \frac{E}{2} \right) \sin \left(C - \frac{E}{2} \right)}} \quad (1.9)$$

e simili per b e c .

L'area di un triangolo sferico ABC sulla sfera di raggio R vale

$$A = R^2(A + B + C - \pi) = R^2 E \quad (1.10)$$

dove l'area è misurata nelle stesse unità di R^2 . Nel caso in cui i lati di un triangolo sferico siano molto piccoli rispetto al raggio della sfera R (triangoli *quasi-piani*), si può ricorrere alla approssimazione di un triangolo piano sul piano tangente alla sfera. Legendre ha dimostrato che un piccolissimo triangolo sferico è equivalente a un triangolo piano avente gli stessi lati a , b , c e angoli:

$$\alpha = A - \frac{E}{3}; \quad \beta = B - \frac{E}{3}; \quad \gamma = C - \frac{E}{3} \quad (1.11)$$

Capitolo 2

Sistemi di coordinate astronomiche

Per determinare la posizione di un corpo celeste sulla volta celeste è necessario definire un sistema di coordinate che ci permetta di individuare senza ambiguità l'oggetto e di seguirne il suo movimento.

2.1 Il sistema altazimutale

Il sistema più naturale per un osservatore è il sistema altazimutale, in cui il piano di riferimento è il piano tangente alla Terra nella posizione dell'osservatore. Questo piano interseca la sfera celeste lungo l'*orizzonte*. La retta perpendicolare all'orizzonte, detta *verticale*, interseca la sfera celeste in due punti: lo *zenit* (sopra l'osservatore) ed il *nadir* (sotto l'osservatore).

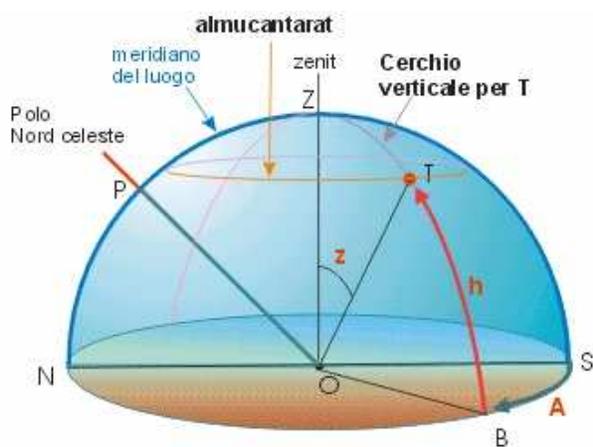


Figura 2.1: Il sistema di coordinate altazimutale (o anche detto orizzontale).

Sud nel senso delle lancette dell'orologio. Esso corrisponde, in Figura 2.1, all'angolo SOB dove O è l'osservatore e B è l'intersezione dell'orizzonte con il cerchio verticale passante per

Il cerchio massimo che passa per il polo Nord P e lo zenit Z (si veda Figura 2.1) si definisce *meridiano* dell'osservatore. Il meridiano taglia l'orizzonte in due punti: il vero Nord (dal lato di P rispetto a Z) e il vero Sud. Ogni altro cerchio massimo passante per Z si chiama *cerchio (o circolo) verticale*. In particolare, quello perpendicolare al meridiano interseca l'orizzonte in due punti detti vero Est e vero Ovest. Un oggetto celeste si muove lungo la volta celeste e percorre un arco: nasce ad Est, raggiunge la sua massima altezza (*culmina*) e tramonta ad Ovest.

L'**azimut** A del punto T è l'angolo formato dal piano del cerchio verticale passante per T e il meridiano astronomico. Si misura in gradi e frazioni di grado partendo dal punto cardinale

T. E' sempre più diffusa la convenzione, ereditata dall'astronomia nautica, di contare l'azimut partendo dal punto cardinale Nord, in senso orario, da 0° a 360°.

L'**altezza** *h* è la sua distanza angolare dall'orizzonte misurata lungo il cerchio verticale passante per quel punto. Si esprime in gradi e frazioni di grado con valore positivo verso lo Zenit e negativo verso il Nadir. In Figura 2.1, l'altezza del punto *T* corrisponde all'angolo *TOB* dove *O* è l'osservatore e *B* è l'intersezione dell'orizzonte con il cerchio verticale passante per *T*. L'arco complementare dell'altezza si chiama *distanza zenitale* e in Figura 2.1 è rappresentata dall'angolo *ZOT* dove *Z* è lo Zenit dell'osservatore. La distanza zenitale si indica generalmente con *z*. Risulta quindi:

$$z = 90^\circ - h \quad . \quad (2.1)$$

I punti sulla sfera celeste che hanno uguale altezza formano un cerchio minore detto *almucantarat*.

Nel sistema azimutale entrambe le coordinate (azimut e altezza) delle stelle variano sensibilmente con il passare del tempo a causa del moto di rotazione della Terra.

2.2 Il sistema orario

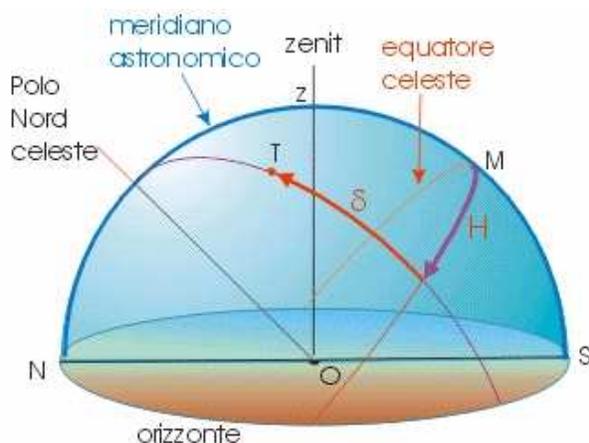


Figura 2.2: Il sistema di coordinate orario.

La direzione dell'asse di rotazione della Terra rimane quasi costante e quindi lo è anche il piano ad esso perpendicolare, detto *piano equatoriale*. L'intersezione del piano equatoriale con la sfera celeste è un cerchio massimo detto *equatore celeste*. Il polo Nord della sfera celeste è uno dei poli corrispondenti a questo cerchio massimo.

Le coordinate di un punto *T* in questo sistema sono (si veda Figura 2.2) l'**Angolo orario** (*H*), definito come la distanza angolare tra il cerchio orario che passa per il punto e il meridiano astronomico. Si misura in ore e frazioni di ora lungo l'equatore celeste, partendo dal meridiano astronomico, in senso orario per un osservatore boreale. L'angolo orario è la base

della definizione di tempo. La **declinazione** (δ) rappresenta la distanza angolare tra un punto della sfera celeste e l'equatore celeste, misurata lungo il cerchio orario che passa per tale punto. Si misura in gradi e frazioni di grado con segno positivo verso il polo Nord celeste e negativo verso il polo Sud. Il punto *M* di Figura 2.2, detto *mezzocielo*, è l'intersezione, sulla sfera celeste, tra l'equatore celeste e il meridiano astronomico.

Il sistema di riferimento orario non partecipa alla rotazione apparente della sfera celeste: nel corso del giorno gli astri cambiano continuamente il loro angolo orario mentre rimane costante la loro declinazione.

2.3 Il sistema equatoriale

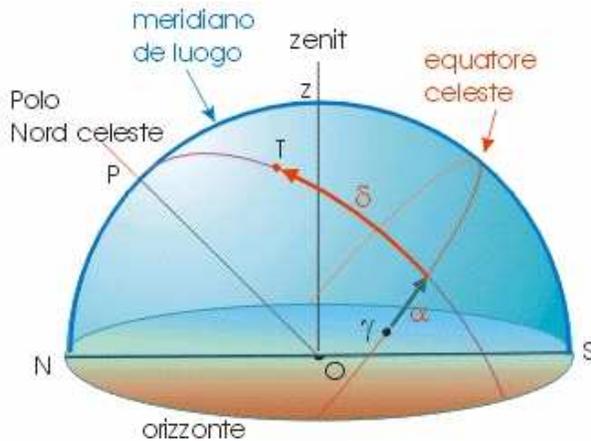


Figura 2.3: Il sistema di coordinate equatoriali.

Questo sistema di coordinate astronomiche ha come direzione principale l'asse Nord-Sud del mondo che interseca la sfera celeste nei rispettivi Polo Nord Celeste e Polo Sud Celeste. Perpendicolare all'asse Nord-Sud giace il piano dell'equatore celeste, proiezione dell'equatore terrestre.

Durante il suo moto annuale apparente, il Sole si sposta verso Est lungo l'*eclittica*, inclinata di $23^{\circ}26'$ rispetto all'equatore celeste. Questi due piani si intersecano in due punti (corrispondenti ai due equinozi) di cui si definisce \Uparrow (o primo punto di Aries, equinozio di primavera) quello in cui la declinazione del Sole si sposta da valori negativi a valori positivi, e si definisce \Downarrow (o punto di Libra, equinozio di

autunno) quello in cui la declinazione del Sole si sposta da valori positivi a valori negativi.

In questo sistema le coordinate di un punto sulla sfera celeste (si veda Figura 2.3) sono l'**Ascensione Retta** (AR o α) e la **Declinazione** (DEC o δ).

L'ascensione retta α della stella è l'arco tra il punto \Uparrow e la proiezione della stella sull'equatore celeste misurato in ore, minuti e secondi con verso antiorario. La Declinazione δ rappresenta la distanza angolare tra un punto della sfera celeste e l'equatore, misurata lungo il cerchio orario passante per tale punto. Si misura in gradi e frazioni di grado con segno positivo verso il Polo Nord Celeste e negativo verso il Polo Sud.

L'intero sistema di riferimento equatoriale (equatore celeste, asse del mondo, punto \Uparrow) partecipa alla rotazione diurna della sfera celeste e quindi l'ascensione retta e la declinazione di un astro sono praticamente costanti nel tempo (a differenza di quello che avviene per il sistema orario, in cui nel corso del giorno gli astri cambiano continuamente il loro angolo orario mentre rimane costante la loro declinazione).

2.4 Il sistema eclittico

È un sistema di coordinate astronomiche in cui il piano e la direzione fondamentale sono rispettivamente il piano dell'*eclittica* e la sua perpendicolare la quale individua, sulla sfera celeste, i poli dell'*eclittica* (boreale con declinazione positiva e australe con declinazione negativa. In Figura 2.4 sono indicati rispettivamente con P_e e P_e'). Le coordinate eclitticali sono: la **longitudine celeste o eclitticale** (λ), definita come la distanza angolare tra il punto \Uparrow e il cerchio ausiliario che passa per quel punto; si misura in gradi lungo l'*eclittica* partendo dal punto \Uparrow e procedendo in senso antiorario (angolo γ_{OB} in Figura 2.4). La **latitudine celeste o eclittica** (β) di un punto è la distanza angolare tra il punto (T) e il piano dell'*eclittica*, misurata lungo il

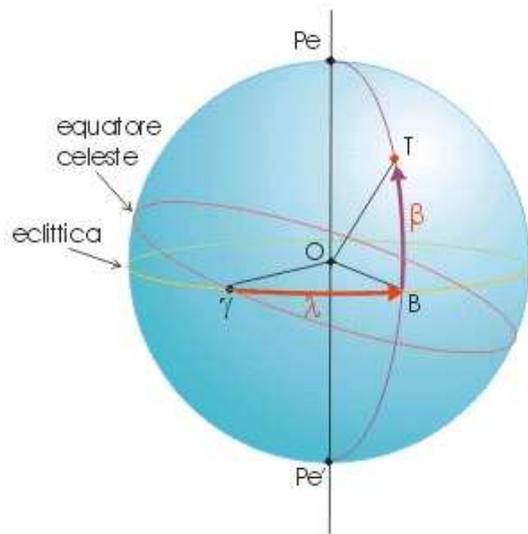


Figura 2.4: Il sistema di coordinate eclittico.

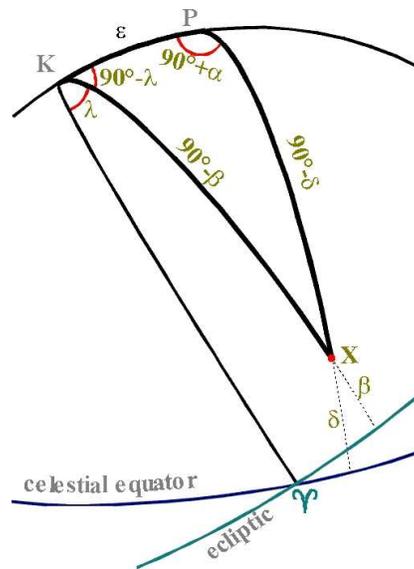


Figura 2.5: Trasformazione tra coordinate equatoriali e coordinate eclittiche.

cerchio ausiliario che passa per tale punto. Si misura in gradi ed ha valore positivo nell'emisfero nord dell'eclittica e negativo in quello sud.

Il sistema eclitticale è importante per lo studio dei moti planetari. Tradizionalmente le dodici costellazioni attraversate dall'eclittica vengono chiamate **fascia zodiacale** (in realtà le costellazioni sono 13, considerando Ofiuco). Fin dall'antichità la fascia dello zodiaco veniva divisa in dodici parti uguali, a partire dal punto Υ . Ogni casella costituiva un segno zodiacale.

La trasformazione tra coordinate equatoriali e coordinate eclittiche può essere derivata risolvendo il triangolo sferico KPX mostrato in Figura 2.5, utilizzando Eqs. 1.4:

$$\begin{aligned} \sin \lambda \cos \beta &= \sin \delta \sin \epsilon + \cos \delta \cos \epsilon \sin \alpha \\ \cos \lambda \cos \beta &= \cos \delta \cos \alpha \\ \sin \beta &= \sin \delta \cos \epsilon - \cos \delta \sin \epsilon \sin \alpha \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \delta &= -\sin \beta \sin \epsilon + \cos \beta \cos \epsilon \sin \lambda \\ \cos \alpha \cos \delta &= \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \delta &= \sin \beta \cos \epsilon + \cos \beta \sin \epsilon \sin \lambda \end{aligned} \tag{2.3}$$

dove ϵ è l'angolo tra il piano equatoriale e il piano dell'eclittica, detto *obliquità dell'eclittica*. Il suo valore è di $23^\circ 26'$.

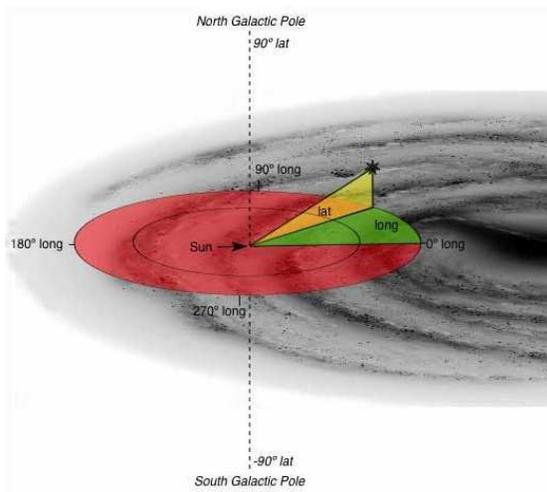


Figura 2.6: Il sistema di coordinate galattico.

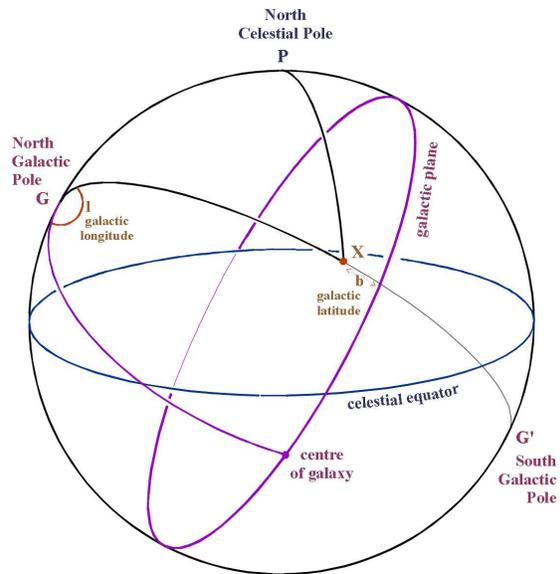


Figura 2.7: Trasformazione tra coordinate equatoriali e coordinate galattiche.

2.5 Il sistema galattico

Nel sistema galattico, il piano fondamentale è determinato dalla *distribuzione nello spazio* della materia cosmica. Dunque la costruzione pratica del riferimento non dipende da misure di direzione ma da **conteggi di stelle** (nel vecchio sistema detto (l^I, b^I)), oppure dalla determinazione della brillantezza superficiale dell'Idrogeno interstellare, cioè della intensità della riga 21-cm (1420 MHz) nel nuovo sistema (l^{II}, b^{II}) , che ora viene indicato con (l, b) .

Dato che il Sole giace molto vicino al piano galattico, si pone l'origine del sistema di coordinate galattiche nel Sole (si veda Figura 2.6). La **longitudine galattica** l si misura in senso antiorario (come l'ascensione retta) dalla direzione del centro galattico (nella costellazione del Sagittario, $\alpha = 17^{\text{h}}45.7^{\text{m}}$, $\delta = -29^{\circ}00'$). La **latitudine galattica** b è misura dal piano galattico, positiva verso nord e negativa verso sud.

Le coordinate galattiche di un oggetto X possono essere ottenute da quelle equatoriali risolvendo il triangolo sferico avente come vertici il polo Nord galattico G (di coordinate $(\alpha_P, \delta_P) = (12^{\text{h}}51.4^{\text{m}}, 27^{\circ}08')$), il polo Nord celeste P (di longitudine galattica $l_N = 123.0^{\circ}$), ed il punto X (si veda Figura 2.7). Utilizzando Eq. 1.4 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sin(l_N - l) \cos(b) &= \cos(\delta) \sin(\alpha - \alpha_P) \\ \cos(l_N - l) \cos(b) &= -\cos(\delta) \sin(\delta_P) \cos(\alpha - \alpha_P) + \sin(\delta) \cos(\delta_P) \\ \sin(b) &= \cos(\delta) \cos(\delta_P) \cos(\alpha - \alpha_P) + \sin(\delta) \sin(\delta_P) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Capitolo 3

Il tempo in astronomia

La misura del tempo in astronomia può essere basata sulla rotazione della Terra o sul moto orbitale attorno al Sole (recentemente la misura del tempo non si basa più su misure di moti astronomici ma su misure di moti atomici).

Il **giorno**, in Astronomia, è l'intervallo di tempo che intercorre tra due successive culminazioni superiori o inferiori di un astro o di un punto della sfera celeste. Se il riferimento è il Sole vero si chiama giorno solare vero, se è il Sole medio si chiama giorno solare medio, se è il punto vernale Υ si chiama giorno siderale e così via.

Il **tempo**, in Astronomia, è l'angolo orario di un astro o di un punto della sfera celeste. Per la misura del tempo definita in base ai giorni solari si distingue una data astronomica che considera il giorno come l'intervallo tra due passaggi al meridiano superiore e una data civile che invece conteggia il tempo a partire dal meridiano inferiore.

Sono definiti vari tipi di giorni e di tempi a seconda del punto di riferimento scelto. Ecco la tabella riassuntiva dei principali giorni e tempi usati in Astronomia:

Punto della sfera celeste	Tipo di giorno	Tempo
Centro del Sole vero	Giorno solare vero	Tempo solare vero locale
Sole medio	Giorno solare medio e giorno civile	Tempo solare medio e tempo civile, tempo universale
Punto vernale Υ	Giorno siderale	Tempo siderale

Tabella 3.1: Tipi di giorno e tempo usati in astronomia.

3.1 Giorno solare vero e tempo solare vero

L'intervallo di tempo tra due consecutivi passaggi del Sole vero al meridiano astronomico è il giorno solare vero. Esso inizia con il passaggio del Sole al meridiano inferiore, cioè a mezzanotte. In Figura 3.1 la freccia arancione rappresenta una rotazione completa della Terra rispetto

alla direzione del centro del Sole vero. Tale rotazione impiega un tempo pari ad un giorno solare vero.



Figura 3.1: Il giorno solare vero.

Il giorno solare vero non è costante, bensì cambia nel corso dell'anno per due cause:

1. per la variazione di velocità della Terra nella sua orbita ellittica attorno al Sole (più veloce al perigeo e più lenta all'apogeo);
2. per l'obliquità dell'eclittica.

In conseguenza alla prima causa, il giorno solare più corto dovrebbe cadere ai primi di gennaio quando il Sole è al perigeo e il più lungo (15 secondi di più) ai primi di luglio (Sole all'apogeo). In conseguenza alla seconda causa, i giorni più lunghi dell'anno cadrebbero ai solstizi e i più corti agli equinozi (con una differenza di circa 39 secondi). Il sovrapporsi dei due fenomeni porta al giorno solare vero più lungo a metà dicembre (30 secondi più lungo del giorno solare medio) e il più corto a metà settembre (21 secondi più corto).

Il **tempo solare vero** (o apparente) è l'angolo orario (H) del Sole vero aumentato di 12 ore. Infatti il giorno solare vero inizia alla mezzanotte con il passaggio del Sole al meridiano inferiore. Il tempo solare vero è quello segnato dagli orologi solari.

3.2 Giorno solare medio e tempo solare medio

Come abbiamo visto, il giorno solare vero non ha una durata costante nel corso dell'anno. Per definire una unità di tempo costante, che chiameremo **giorno solare medio**, introduciamo il concetto di **Sole fittizio** e di **Sole medio**.

Il moto annuo apparente del Sole lungo l'eclittica non è uniforme sia per la variazione della velocità della Terra lungo la sua orbita attorno al Sole (seconda legge di Keplero), sia per l'obliquità dell'eclittica (il Sole nel suo moto annuo apparente non percorre l'equatore celeste bensì l'eclittica e le proiezioni sull'equatore di archi uguali di eclittica non sono uguali). Di conseguenza anche il giorno solare vero non è un intervallo di tempo costante nel corso dell'anno.

Il tempo di uso civile, misurato da orologi meccanici ed elettronici, non può basarsi sul giorno solare vero ed è quindi necessario introdurre un tempo medio basato su un giorno medio di durata costante e pari alla media di un gran numero di giorni solari. Ecco in sintesi le tappe concettuali che portano a tali definizioni (si veda Figura 3.2).



Figura 3.2: Differenze tra Sole vero, Sole fittizio e Sole medio.

Il Sole vero, percorrendo l'eclittica, raggiunge la massima velocità angolare quando si trova al perigeo. Immaginiamo un Sole fittizio che passa al perigeo e all'apogeo assieme al Sole vero ma che percorre l'eclittica a velocità costante. Dopo la "partenza" comune al perigeo, il Sole vero è più veloce del Sole fittizio e quindi lo precede. Ma verso l'apogeo la velocità si riduce e qui i due Soli si riuniscono nuovamente. Nel tratto di ritorno verso il perigeo avviene l'opposto: il Sole vero ritarda rispetto al Sole fittizio. Il Sole fittizio elimina l'irregolarità del moto del Sole vero lungo l'eclittica.

Immaginiamo ora un terzo Sole, chiamato **Sole medio**, che si muove lungo l'equatore celeste, a velocità costante e che attraversa il punto vernale \Uparrow nello stesso momento del Sole fittizio. Il Sole medio ha lo scopo di correggere l'irregolarità del moto del Sole dovuta al fatto che esso non percorre l'equatore.

Il **giorno solare medio** è l'intervallo di tempo che intercorre tra due successivi passaggi del Sole medio sullo stesso meridiano. Il giorno solare medio ha un valore costante: rappresenta la durata media del giorno solare vero, che invece è variabile nel corso dell'anno. Il giorno solare medio, considerato come unità di misura del tempo solare medio, inizia alla culminazione superiore del Sole medio.

L'istante di inizio del giorno solare medio, non è conveniente per usi civili perché porterebbe ad un cambiamento di data nelle ore diurne (a mezzogiorno). Si è introdotto così il **giorno civile**: esso è un giorno solare medio che inizia alla mezzanotte media, cioè alla culminazione inferiore del Sole medio.

Il **tempo solare medio** (detto anche tempo medio, tempo medio locale) è l'angolo orario del Sole medio più 12 ore. L'ora zero (inizio del giorno solare medio) è data dalla culminazione inferiore del Sole medio per il luogo di osservazione.

Come il tempo solare vero, anche il tempo solare medio è un tempo locale perché il Sole passa al meridiano di luoghi diversi in momenti diversi (passa prima per le località a Est e poi per quelle

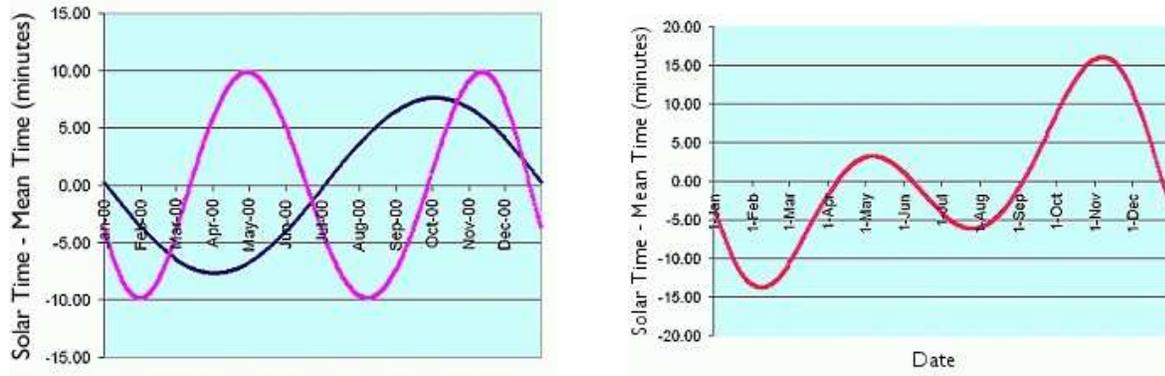


Figura 3.3: Sinistra: Componenti dell'equazione del tempo: in viola l'effetto dell'inclinazione dell'orbita terrestre, in blu quello della non uniformità del moto del Sole vero. Destra: l'equazione del tempo totale.

ad Ovest). Per le necessità civili, è stato necessario introdurre una suddivisione convenzionale della superficie terrestre in 24 fusi di 15 gradi ciascuno (i fusi orari).

Per definizione il giorno solare medio è suddiviso in 24 ore solari medie, a loro volta suddivise in 60 minuti solari medi, al loro volta suddivisi in 60 secondi solari medi.

Il **tempo civile** o tempo legale o tempo medio del fuso è il tempo solare medio del meridiano centrale di un fuso. Questo tempo, deciso per legge, è valido per tutte le località poste entro uno stesso fuso orario.

Si definisce **anno tropico** l'intervallo di tempo necessario perché l'ascensione retta del Sole aumenti di 360 gradi. La durata dell'anno tropico è 365.2422 giorni.

3.2.1 L'equazione del tempo

La differenza tra il tempo solare vero e quello medio si chiama **Equazione del Tempo**, ed è espressa in minuti e secondi:

$$\varepsilon = HA(V) - HA(M) \quad (3.1)$$

dove (M) e (V) si riferiscono, rispettivamente, al Sole medio e al Sole vero. Tale differenza dipende dal fatto che il tempo solare medio è basato sul movimento di un Sole ipotetico (il Sole medio) che nel corso dell'anno si muove con moto uniforme lungo l'equatore celeste, mentre il moto annuo del Sole vero lungo l'eclittica non è uniforme. Abbiamo cioè due effetti: uno dovuto all'inclinazione dell'orbita terrestre ed uno dovuto al moto non uniforme del Sole lungo l'eclittica. Questi due effetti sono mostrati nell'immagine di sinistra di Figura 3.3: in viola l'effetto dell'inclinazione dell'orbita, in blu quello della non uniformità del Sole.

L'equazione del tempo varia con regolarità nel corso dell'anno passando da valori negativi (il minimo è di 14.5 min) a valori positivi (il massimo è 16.25 min) ed è tabulata in tutti gli almanacchi (si veda l'immagine di destra di Figura 3.3). Essa rappresenta il ritardo (quando ha valori negativi) o l'anticipo (quando ha valori positivi) accumulati nel corso dell'anno tra la posizione

del Sole vero e quella del Sole medio. Il Sole vero anticipa o ritarda al massimo di circa 16 minuti il suo passaggio al meridiano rispetto al Sole medio. Quando i due Soli culminano insieme (sono in congiunzione), l'equazione del tempo si annulla. Ciò accade quattro volte all'anno (il 15 aprile, il 15 giugno, il primo di settembre e il 25 dicembre).

3.3 Il giorno siderale e il tempo siderale

Il **giorno siderale** è il periodo impiegato dalla Terra per eseguire un'intera rotazione attorno al proprio asse. Il riferimento per definire il giorno siderale non è il Sole bensì la direzione di un punto della sfera celeste considerato fisso in prima approssimazione (il punto vernale Υ). Dunque il giorno siderale è l'intervallo di tempo tra due successive culminazioni del punto vernale.

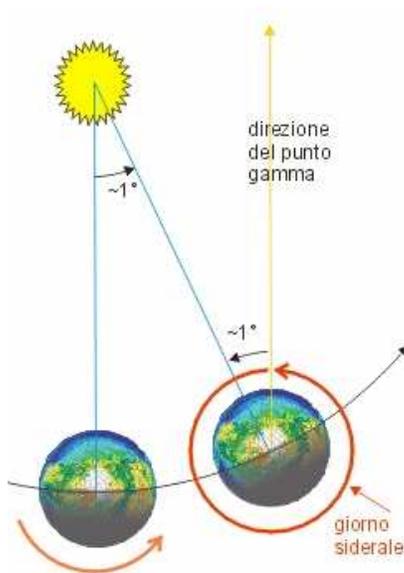


Figura 3.4: Il giorno siderale.

Il giorno siderale è più corto del giorno solare vero di quasi 4 minuti (corrispondenti all'incirca ad 1°). Tale differenza è dovuta al fatto che la Terra, mentre ruota attorno a se stessa, percorre anche un tratto di orbita attorno al Sole e quindi il Sole transita al meridiano con 4 minuti di ritardo al giorno rispetto alle altre stelle (si veda Figura 3.4). Il risultato è il moto apparente annuo del Sole rispetto alle stelle, in senso antiorario per un osservatore boreale, alla velocità di circa 1 grado al giorno.

In realtà, nemmeno il punto vernale è un riferimento fisso ma, per effetto della precessione (si veda Sezione 4.4 a pagina 39) si sposta di circa $50.25''$ secondi d'arco all'anno.

Il **tempo siderale locale** TSL è l'angolo orario del punto vernale Υ (si veda l'immagine a sinistra di Figura 3.5). Dipende, ovviamente, dalla longitudine del luogo di osservazione sulla Terra. Conoscendo l'ascensione retta

RA(X) di un astro X e misurando il suo angolo orario HA(X), si può determinare il tempo siderale TSL con la seguente relazione:

$$\text{TSL} = \text{HA}(X) + \text{RA}(X) \quad (3.2)$$

Se il tempo siderale locale è noto e lo sono pure le coordinate equatoriali di X all'epoca dell'osservazione, si può immediatamente calcolare HA(X) e quindi stabilire la posizione dell'oggetto nella sfera celeste.

Poichè l'angolo orario di una stella X è zero quando transita sul meridiano dell'osservatore, la RA(X) coincide con TSL quando la stella passa davanti al meridiano dell'osservatore (si veda l'immagine a destra di Figura 3.5)

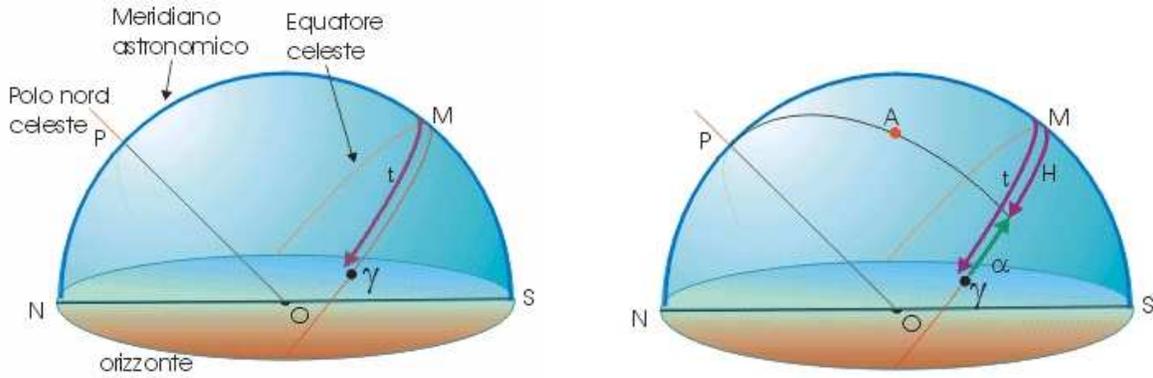


Figura 3.5: Il tempo siderale.

$$TSL = RA(X) \quad \text{se } HA(X)=0 \quad (3.3)$$

In ogni osservatorio c'è un orologio che segna il TSL e può essere sincronizzato con il tempo di transito di stelle con RA nota. In realtà oggi il tempo siderale locale viene calcolato a partire da un segnale radio distribuito per questo scopo.

Il tempo tra il transito di un oggetto celeste X sul meridiano di Greenwich e quello sul meridiano locale è uguale alla longitudine dell'osservatore locale. Quindi l'angolo orario per Greenwich di una stella X che sta transitando sul meridiano locale che si trova a longitudine λ coincide con λ . Più in generale abbiamo che:

$$GHA(X) = HA(X) + \lambda \quad (3.4)$$

in cui $GHA(X)$ è l'angolo orario di X per Greenwich, $HA(X)$ è l'angolo orario per il meridiano locale e la longitudine λ è misurata positiva verso Ovest e negativa verso Est.

Quando il punto Υ transita sul meridiano del luogo, si ha:

$$HA(\Upsilon) = 0 \quad (3.5)$$

e quindi:

$$TSL(\Upsilon) = 0 \quad (3.6)$$

Per definizione abbiamo che un giorno siderale è composto da 24 ore siderali, che a loro volta sono composte da 60 minuti siderali, che a loro volta sono formati da 60 secondi siderali.

Note α , δ e il TSL di un oggetto, è possibile puntare un telescopio con montatura equatoriale nella sua direzione anche se non è visibile ad occhio nudo (si veda Figura 3.6). Ruotando lo strumento attorno all'asse di declinazione si orienta il telescopio sulla corretta declinazione della stella, mentre ruotando attorno all'asse polare si insegue l'oggetto durante il suo moto diurno apparente dovuto alla rotazione della Terra attorno al proprio asse. L'angolo iniziale corretto per l'asse polare è dato da:



Figura 3.6: Montatura equatoriale di un telescopio.

$$HA(X) = TSL - RA(X) \quad (3.7)$$

Basta quindi un motore che fa ruotare uniformemente il telescopio attorno al suo asse polare per compensare la rotazione della Terra in senso opposto.

3.4 Il tempo universale

Da Eq. 3.2 segue che per il Sole vero V ed il Sole medio M avremo

$$\begin{aligned} TSL &= HA(V) + RA(V) \\ &= HA(M) + RA(M) \end{aligned} \quad (3.8)$$

da cui

$$HA(V) + RA(V) = HA(M) + RA(M) \quad (3.9)$$

e quindi l'equazione del tempo Eq. 3.1 può essere scritta come

$$\varepsilon = RA(M) - RA(V) \quad (3.10)$$

Se si riferisce HA(M) al meridiano di Greenwich (GHA), si ottiene il Tempo Medio di Greenwich (GMT), chiamato anche tempo Universale (UT), tale che:

$$UT = GMT = GHA(M) \pm 12^h = GHA(V) - \varepsilon \pm 12^h \quad (3.11)$$

Si rammenti che al transito $GHA(M) = 0$. Si utilizza il segno \pm a seconda che $GHA(M)$ sia maggiore o minore di 12^h , rispettivamente.

3.5 Relazione tra tempo solare medio e tempo siderale

Utilizzando Eq. 3.8 calcoliamo il TSL a due istanti separati tra loro da un un giorno *solare medio*. Avremo quindi

$$TSL_1 = HA_1(M) + RA_1(M)$$

$$TSL_2 = HA_2(M) + RA_2(M)$$

con $HA_2(M) - HA_1(M) = 24^h$. Quindi

$$TSL_2 - TSL_1 = 24^h + (RA_2(M) - RA_1(M)) \quad (3.12)$$

In un giorno solare medio il Sole medio percorre un arco di ascensione retta pari a $24^h/365.25$, quindi Eq. 3.12 diventa

$$TSL_2 - TSL_1 = 24^h + \frac{24^h}{365.25} = 24^h \frac{366.25}{365.25} \quad (3.13)$$

Quindi abbiamo che

$$24^h \text{ di tempo solare medio} = 24^h \frac{366.25}{365.25} = 24^h 03^m 56.5503^s \text{ di tempo siderale} \quad (3.14)$$

$$24^h \text{ di tempo siderale} = 24^h \frac{365.25}{366.25} = 23^h 56^m 04.0956^s \text{ di tempo solare medio}$$

Capitolo 4

Fenomeni che modificano le coordinate astronomiche

Anche se una stella rimane fissa rispetto al Sole, le sue coordinate possono cambiare a causa di una serie di effetti. Ovviamente la sua altezza ed azimut cambiano continuamente a causa della rotazione della Terra, ma anche la sua ascensione retta e declinazione possono cambiare nel tempo (a prescindere da un suo moto proprio). Vedremo ora in dettaglio questi effetti e come possiamo misurarli.

4.1 La rifrazione atmosferica

Un raggio di luce che entra nell'atmosfera viene rifratto e quindi la direzione osservata di un oggetto differisce dalla direzione vera di una quantità che dipende dalle condizioni atmosferiche lungo la linea di vista. Dato che la rifrazione varia con la pressione e la temperatura dell'atmosfera, è molto difficile da calcolare accuratamente.

A rigore l'atmosfera è una superficie sferica con centro il centro della Terra ma, poichè il raggio del nostro pianeta è $R_{\oplus} = 6372$ Km, per angoli ζ (distanze zenitali) inferiori a 45° può essere assunta piana. Schematizzando l'atmosfera come un fluido composto da strati omogenei di densità $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ e quindi con indici di rifrazione n_1, n_2, \dots, n_k (si veda Figura 4.1), dalla legge di Snell abbiamo che

$$\begin{aligned} 1 \sin z &= n_k \sin z_k \\ n_k \sin z_k &= n_{k-1} \sin z_{k-1} \\ &\cdot \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} n_2 \sin z_2 &= n_1 \sin z_1 \\ n_1 \sin z_1 &= n_0 \sin \zeta \end{aligned} \tag{4.2}$$

e quindi

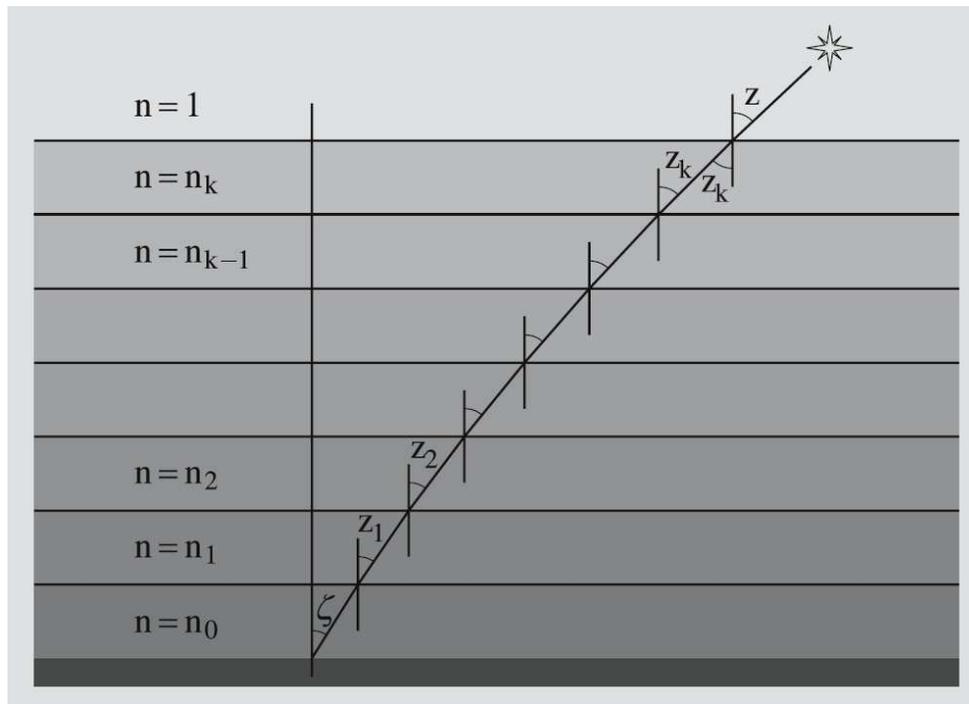


Figura 4.1: Rifrazione di un raggio di luce che attraversa l'atmosfera.

$$\sin z = n_0 \sin \zeta \tag{4.3}$$

dove z è la distanza zenitale *vera* e ζ è la distanza zenitale *apparente*.
 Definiamo **angolo di rifrazione** R la differenza

$$R = z - \zeta \tag{4.4}$$

Quando R è piccolo ed è *espresso in radianti* abbiamo

$$\begin{aligned} n_0 \sin \zeta &= \sin z = \sin(R + \zeta) \\ &= \sin R \cos \zeta + \cos R \sin \zeta \\ &\simeq R \cos \zeta + \sin \zeta \end{aligned} \tag{4.5}$$

Quindi possiamo scrivere

$$R = (n_0 - 1) \tan \zeta = \kappa \tan \zeta \tag{4.6}$$

dove abbiamo definito la **costante di rifrazione** κ

$$\kappa \equiv (n_0 - 1) \tag{4.7}$$

Per $\zeta = 45^\circ$, abbiamo che l'angolo di rifrazione R vale

$$R = \begin{cases} 60.4'' & \lambda = 400 \text{ nm} \\ 57.8'' & \lambda = 500 \text{ nm} \\ 57.4'' & \lambda = 600 \text{ nm} \\ 57.2'' & \lambda = 700 \text{ nm} \end{cases} \quad (4.8)$$

Osservando questi dati, si nota che ogni banda di colore subisce una deviazione diversa e quindi *la stella appare allungata* (di circa $3''$) con il blu più vicino allo Zenit ed il rosso più distante. Per distanze zenitali maggiori di 15° dobbiamo tenere in conto la dipendenza dell'indice di rifrazione dalla densità dell'aria (che a sua volta dipende dalla pressione P e dalla temperatura T). Quando la distanza zenitale è maggiore di 75° si può usare per R la seguente approssimazione

$$R = \frac{P}{273 + T} 0.00452^\circ \tan(z) \quad (4.9)$$

dove la pressione P è misurata in hectoPascal (o in milliBar) e la temperatura T in gradi Celsius. Per distanze zenitali prossime a zero (cioè vicino all'orizzonte) bisogna tenere in conto la curvatura dell'atmosfera. Una formula approssimata per l'angolo di rifrazione è

$$R = \frac{P}{273 + T} \frac{0.1594 + 0.0196a + 0.00002a^2}{1 + 0.505a + 0.0845a^2} \quad (4.10)$$

dove a è l'altezza sopra l'orizzonte (cioè $a \equiv 90^\circ - z$). Si noti che sia Eq. 4.9 che 4.10 non sono corrette da un punto di vista dimensionale. Per ottenere valori corretti le grandezze *devono* essere espresse nelle unità corrette.

L'effetto della rifrazione è sempre (a parte molto vicino allo zenit) quello di aumentare l'altezza di un oggetto. All'orizzonte la variazione è di circa $34'$, che è poco maggiore del diametro apparente del Sole.

4.1.1 Misura della costante di rifrazione κ

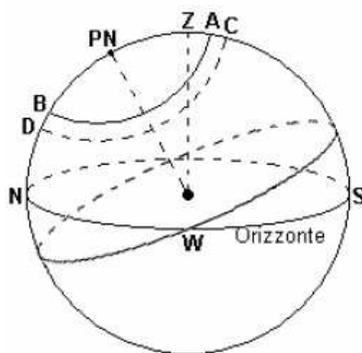


Figura 4.2: Misura della costante di rifrazione κ .

La costante di rifrazione κ (vedi Eq. 4.7) può essere misurata utilizzando i transiti di una stella circumpolare. Come si è visto, la rifrazione atmosferica sposta la stella verso lo Zenit, per cui invece di osservare l'astro percorrere l'arco CD (si veda Figura 4.2) si osserva l'arco apparente AB, con distanze zenitali pari a ZA in A (culminazione superiore) e ZB in B (culminazione inferiore). Le vere distanze zenitali sono però ZC in C e ZD in D.

Per una stella circumpolare si ottiene:

$$\begin{aligned} CA &= R_A = \kappa \tan ZA \\ DB &= R_B = \kappa \tan ZB \end{aligned} \quad (4.11)$$

e quindi

$$\begin{aligned} ZC &= ZA + CA = ZA + \kappa \tan ZA \\ ZD &= ZB + DB = ZB + \kappa \tan ZB \end{aligned} \quad (4.12)$$

Introducendo la declinazione della stella δ e la latitudine del luogo ϕ abbiamo che Eq. 4.12 diventa

$$\begin{aligned} ZC &= P_N C - P_N Z = (90^\circ - \delta) - (90^\circ - \phi) = \phi - \delta \\ ZD &= P_N Z + P_N D = (90^\circ - \phi) + (90^\circ - \delta) = 180^\circ - \phi - \delta \end{aligned} \quad (4.13)$$

Combinando Eq. 4.11 e 4.13 otteniamo

$$\begin{aligned} ZA + \kappa \tan ZA &= \phi - \delta \\ ZB + \kappa \tan ZB &= 180^\circ - \phi - \delta \end{aligned}$$

Questo sistema di equazioni ha, in generale, due incognite: δ e κ . Sono invece note la latitudine del luogo ϕ e le due distanze zenitali ZA e ZB .

Se non si conosce la latitudine del luogo è necessario aggiungere al sistema precedente le equazioni relative al transito di una seconda stella circumpolare con δ' , ZA' e ZB' . Si ottiene un sistema di quattro equazioni (con incognite δ , δ' , κ e ϕ)

$$\begin{aligned} ZA + \kappa \tan ZA &= \phi - \delta \\ ZA' + \kappa \tan ZA' &= \phi - \delta' \\ ZB + \kappa \tan ZB &= 180^\circ - \phi - \delta \\ ZB' + \kappa \tan ZB' &= 180^\circ - \phi - \delta' \end{aligned}$$

4.2 La parallasse

4.2.1 La parallasse geocentrica

L'osservazione di oggetti celesti viene effettuata dalla superficie della Terra e non dal suo centro. Questo è irrilevante per oggetti lontani, come le stelle, ma per oggetti più vicini, quali i corpi del sistema solare, la direzione sotto cui si vede un particolare oggetto cambia a seconda della posizione dell'osservatore. Un oggetto C appare agli osservatori A e B in direzioni diverse (si veda Figura 4.3). L'angolo P tra le due direzioni di osservazione è detto **angolo parallattico**. Quando la distanza di C diventa infinita, l'angolo P tende a 0 e le distanze zenitali Z_A e Z_B (inizialmente diverse) diventano uguali. Per calcolare il valore di P consideriamo il triangolo

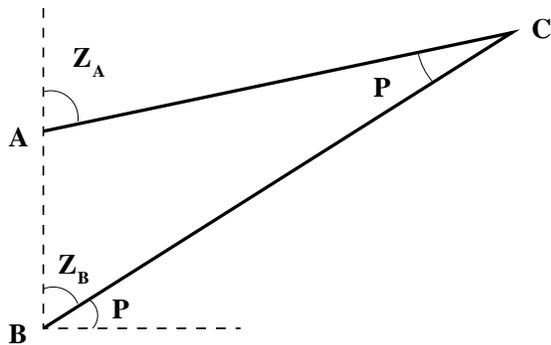


Figura 4.3: Definizione di angolo parallattico.

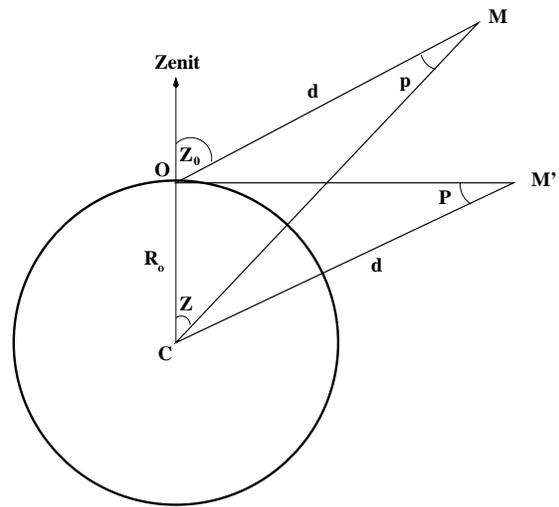


Figura 4.4: Definizione di parallasse geocentrica.

ABP: dato che la somma dei suoi angoli è 180° abbiamo che $(180^\circ - Z_A) + Z_B + P = 180^\circ$ e quindi

$$P = Z_A - Z_B \quad (4.14)$$

Per togliere la dipendenza dal luogo di osservazione si riconducono tutte le posizioni ad un unico ipotetico osservatore al centro della Terra. Supponiamo che un osservatore O sulla superficie della Terra guardi un oggetto M (si veda Figura 4.4). Rispetto ad O, l'oggetto M è visto con una distanza zenitale Z_0 , mentre rispetto ad un ipotetico osservatore C posto al centro della Terra, la distanza zenitale è Z. Quest'ultima è detta **distanza zenitale vera** o **geocentrica**.

Se R_\oplus è il raggio della Terra e d è la distanza dell'oggetto osservato, l'angolo sotteso dalla linea di base (*base line*) OC rispetto a M è chiamato angolo parallattico o parallasse. Dal teorema dei seni:

$$\frac{\sin p}{R_\oplus} = \frac{\sin(180^\circ - Z_0)}{d} \quad (4.15)$$

quindi

$$\sin p = \frac{R_\oplus}{d} \sin Z_0 \quad (4.16)$$

Supponiamo ora che ad un certo tempo, M sia visto sull'orizzonte dall'osservatore O. Il triangolo OCM' è quindi rettangolo in O e si ha

$$\sin P = \frac{R_\oplus}{d} \quad (4.17)$$

Il rapporto R_\oplus/d è detto **parallasse orizzontale**. Combinando Eq. 4.16 e 4.17 otteniamo

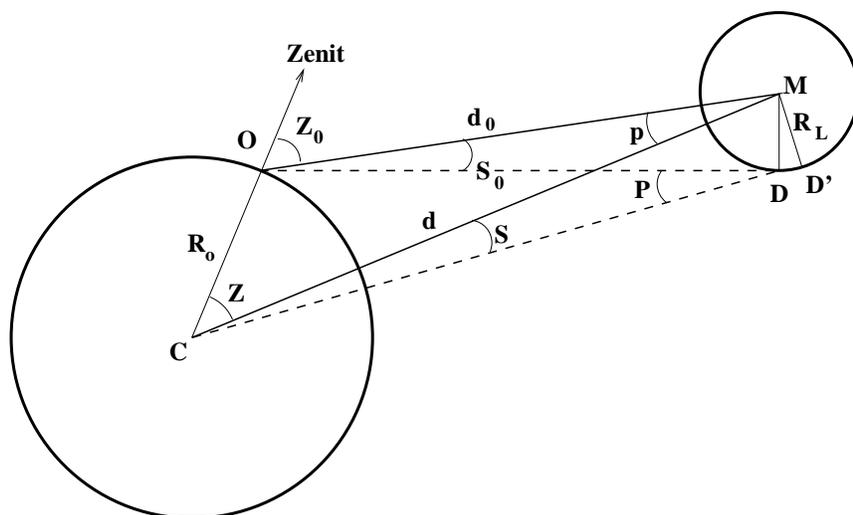


Figura 4.5: Misura del semi-diametro angolare della Luna.

$$\sin p = \sin P \sin Z_0 \tag{4.18}$$

Poichè gli oggetti osservati sono generalmente lontani rispetto alla linea di base, il seno si può approssimare con l'angolo (ovviamente misurato in radianti), cioè $\sin p \approx p$ e $\sin P \approx P$, da cui

$$p = P \sin Z_0 \tag{4.19}$$

Possiamo ricavarci la distanza zenitale vera Z usando gli angoli del triangolo OCM (si veda Figura 4.4): $(180^\circ - Z_0) + p + Z = 180^\circ$, da cui

$$Z = Z_0 - p \tag{4.20}$$

Vediamo quindi che l'effetto della parallasse è di spostare l'oggetto lontano dallo Zenit (esattamente l'opposto dell'effetto della rifrazione).

4.2.1.1 Misura del semi-diametro angolare della Luna

Supponiamo che l'osservatore O sia in grado di misurare (operazione abbastanza semplice) la distanza zenitale Z_0 della Luna ed il semi-diametro (angolare) apparente S_0 (si veda Figura 4.5). Vogliamo ricavare il semi-diametro angolare vero S (come se fosse visto dal centro della Terra). Sia R_L il raggio della Luna e p l'angolo parallattico al tempo dell'osservazione. Siano anche d la distanza della Luna riferita a C e d_0 la distanza rispetto ad O . Poichè il triangolo $CD'M'$ è rettangolo (in D'), si ha

$$\sin S = \frac{R_L}{d} = \frac{R_L}{R_\oplus} \frac{R_\oplus}{d} = \frac{R_L}{R_\oplus} \sin P \tag{4.21}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato Eq. 4.17. Al solito, dato che S e P sono angoli piccoli, possiamo approssimare il seno dell'angolo con l'angolo (quando espresso in radianti), e quindi Eq. 4.21 diventa

$$S \simeq \frac{R_L}{R_{\oplus}} P \quad (4.22)$$

Analogamente, per il triangolo ODM abbiamo che

$$\sin S_0 = \frac{R_L}{d_0} = \frac{R_L}{R_{\oplus}} \frac{R_{\oplus}}{d} \frac{d}{d_0} = \frac{R_L}{R_{\oplus}} \frac{d}{d_0} \sin P \quad (4.23)$$

Se P e S_0 sono piccoli, per cui possiamo approssimare i seni degli angoli con gli angoli (misurati in radianti), allora Eq. 4.23 diventa

$$S_0 \simeq \frac{R_L}{R_{\oplus}} \frac{d}{d_0} P = \frac{S}{P} \frac{d}{d_0} P = \frac{d}{d_0} S \quad (4.24)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato Eq.4.22. Dal teorema dei seni applicato al triangolo COM abbiamo che

$$\frac{\sin(180^\circ - Z_0)}{d} = \frac{\sin Z}{d_0} \quad (4.25)$$

Usando Eq. 4.20 possiamo scrivere

$$Z = Z_0 - p = Z_0 - P \sin Z_0 \quad (4.26)$$

e quindi, con quest'ultimo risultato, Eq. 4.25 diventa

$$\frac{d}{d_0} = \frac{\sin Z_0}{\sin Z} = \frac{\sin Z_0}{\sin(Z_0 - P \sin Z_0)} \quad (4.27)$$

Mettendo questa espressione in Eq. 4.24 otteniamo il valore cercato S

$$S = S_0 \frac{\sin(Z_0 - P \sin Z_0)}{\sin Z_0} \quad (4.28)$$

Noto S si può determinare il raggio della Luna R_L invertendo la Eq. 4.22

$$R_L = \frac{S R_{\oplus}}{P} \quad (4.29)$$

Ovviamente, nota la distanza della Luna d si può calcolare direttamente il suo raggio R_L :

$$R_L = \frac{d}{\sin S} \quad (4.30)$$

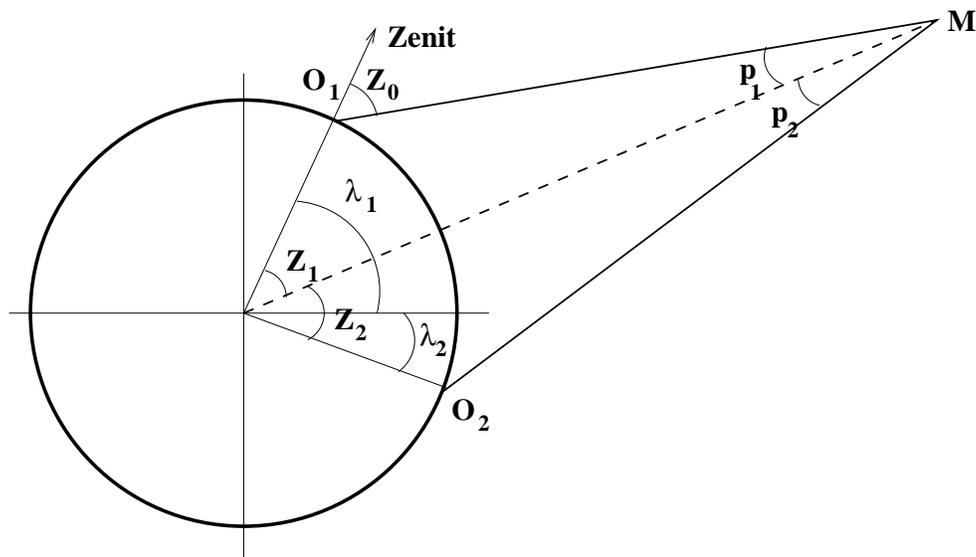


Figura 4.6: Misura della distanza della Luna.

4.2.1.2 Misura della distanza Terra–Luna

Questo metodo si basa sulla misura simultanea della distanza zenitale della Luna da parte di due osservatori alla stessa longitudine ϕ ma separati in latitudine (si veda Figura 4.6).

Se Z_1 e Z_2 sono le distanze zenitali geocentriche per O_1 e O_2 con angoli parallattici p_1 e p_2 , avremo immediatamente che la somma delle latitudini dei due luoghi di osservazione è data da

$$\lambda_1 + \lambda_2 = Z_1 + Z_2 \tag{4.31}$$

dove, per definizione di distanza zenitale,

$$Z_1 = Z_0^1 - p_1 \rightarrow p_1 = Z_0^1 - Z_1 \tag{4.32a}$$

$$Z_2 = Z_0^2 - p_2 \rightarrow p_2 = Z_0^2 - Z_2 \tag{4.32b}$$

D'altronde se P è il valore della parallasse orizzontale della Luna al momento delle osservazioni, si ha

$$p_1 = P \sin Z_0^1 \tag{4.33a}$$

$$p_2 = P \sin Z_0^2 \tag{4.33b}$$

che sommati membro a membro danno origine a

$$p_1 + p_2 = P (\sin Z_0^1 + \sin Z_0^2) \tag{4.34}$$

e quindi

$$P = \frac{p_1 + p_2}{\sin Z_0^1 + \sin Z_0^2} \quad (4.35)$$

D'altro canto, sommando membro a membro Eq. 4.32 si ottiene

$$p_1 + p_2 = Z_0^1 + Z_0^2 - (Z_1 + Z_2) \quad (4.36)$$

Eq. 4.34 può allora essere riscritta come

$$P = \frac{Z_0^1 + Z_0^2 - (Z_1 + Z_2)}{\sin Z_0^1 + \sin Z_0^2} = \frac{Z_0^1 + Z_0^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)}{\sin Z_0^1 + \sin Z_0^2} \quad (4.37)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato Eq. 4.31. Combinando quest'ultima espressione con Eq. 4.17 possiamo scrivere

$$d = \frac{R_{\oplus}}{P} = R_{\oplus} \frac{\sin Z_0^1 + \sin Z_0^2}{Z_0^1 + Z_0^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (4.38)$$

La distanza media (perché l'orbita è ellittica) della Luna dal nostro pianeta è di 384,400 Km, corrispondente a circa $60 R_{\oplus}$.

Veniamo ora al problema di stimare l'accuratezza della misura, il quale è legato al rapporto tra la linea di base (cioè R_{\oplus}) e la distanza d . Utilizzando Eq.4.19 e 4.17 abbiamo che

$$p = \frac{R_{\oplus}}{d} \sin Z_0 \quad (4.39)$$

Utilizzando la propagazione degli errori abbiamo che

$$\sigma_p = \frac{R_{\oplus}}{d^2}, \sin Z_0 \sigma_d \quad \sigma_d = \frac{R_{\oplus}}{p^2}, \sin Z_0 \sigma_p \quad (4.40)$$

da cui

$$\frac{\sigma_d}{d} = \frac{\frac{R_{\oplus}}{p^2}, \sin Z_0 \sigma_p}{\frac{R_{\oplus}}{p}, \sin Z_0} = \frac{\sigma_p}{p} \quad (4.41)$$

Quindi il rapporto tra l'accuratezza nella misura della distanza e la distanza è uguale al rapporto tra l'accuratezza nella misura della parallasse e la parallasse (si veda Tabella 4.1 nel caso $\sigma_p \simeq 1''$).

Ovviamente questo metodo di misura della distanza lunare ha delle limitazioni. In particolare:

1. non ci sono osservatori sullo stesso meridiano, per cui bisogna apportare una correzione per la diversa longitudine;
2. bisogna fissare un punto specifico della Luna (ad esempio un cratere in prossimità del centro);
3. è necessario tener conto della rifrazione atmosferica e degli errori strumentali.

d/BL	$p(^{\circ})$	$\sigma_d(^{\prime\prime})$
1	60	4.85×10^{-6}
10	6	4.85×10^{-5}
100	0,6	4.85×10^{-4}
1000	0.06	4.85×10^{-3}

Tabella 4.1: Accuratezza nella misura di d nota la parallasse geocentrica per $\sigma_p \simeq 1''$.

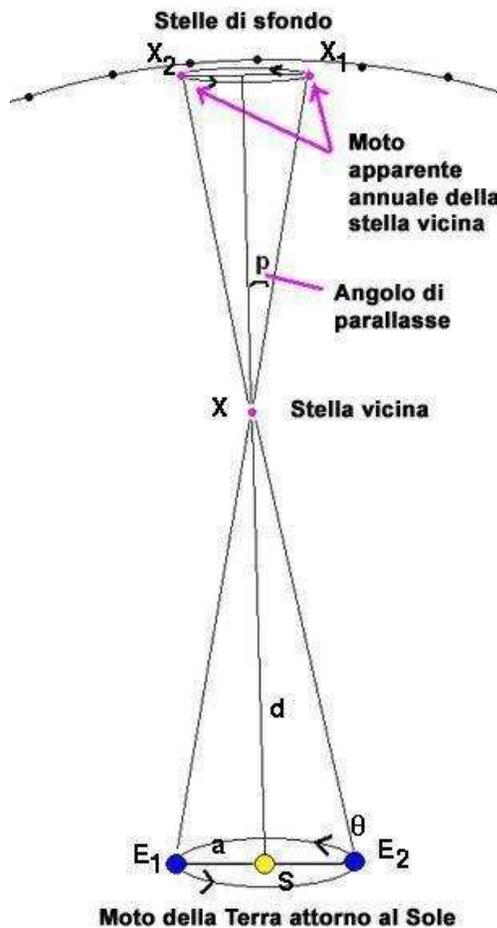


Figura 4.7: La parallasse stellare.

Con l'avvento del radar, del laser e delle sonde lunari, la distanza della Luna si può ora misurare in modo molto più accurato che con il metodo parallattico.

4.2.2 La parallasse stellare

La parallasse stellare deriva dal cambiamento della direzione di una stella man mano che l'osservatore cambia la sua posizione nel cielo a causa del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole. Per effetto di questo moto si vede che la direzione geocentrica cambia e traccia sulla sfera celeste ciò che è chiamata **ellisse parallattica** (si veda Figura 4.7). Considerati due punti E_1 ed E_2 lungo l'orbita della Terra, a distanza di 6 mesi l'una dall'altro, si nota che quando la Terra si trova in E_1 la stella X è vista nella direzione E_1X_1 , mentre in E_2 è vista sotto E_2X_2 . La **parallasse stellare** P è definita da:

$$\sin P = \frac{a}{d} \tag{4.42}$$

dove a è la distanza Terra-Sole (linea di base) e d è la distanza Sole-Stella. Viste le enormi distanze in gioco, l'angolo di parallasse è molto piccolo, quindi $\sin P \simeq P$ e si ha

$$P = 206265 \frac{a}{d} \text{ arcsec} \tag{4.43}$$

Dalla Figura 4.7 si vede che quando la Terra è in E_1 , per il teorema dei seni applicato al triangolo E_1SX

$$\frac{\sin p}{a} = \frac{\sin \theta}{d} \quad (4.44)$$

da cui

$$\sin p = \frac{a}{d} \sin \theta = \sin P \sin \theta \quad (4.45)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la definizione di parallasse stellare (Eq. 4.42). Al solito, visto i piccoli angoli in gioco, possiamo sostituire i seni degli angoli con la misura, in radianti, dell'angolo stesso ed otteniamo

$$p = P \sin \theta \quad (4.46)$$

Per effetto della parallasse stellare una stella appare spostata verso il Sole ($\theta < 90^\circ$) di una quantità p . Si noti che P è costante mentre p dipende da θ , che varia per effetto del moto della Terra nella sua orbita. Le coordinate equatoriali α e δ corrette per la parallasse stellare sono chiamate **coordinate eliocentriche**.

4.2.2.1 Misura della parallasse stellare

La misura della parallasse stellare iniziò subito dopo la pubblicazione del libro di Copernico nel 1543 "*De revolutionibus orbium coelestium*" per verificare l'ipotesi che la Terra orbitasse attorno al Sole. Solo nel 1838 F.W. Bessel rivelò i primi moti parallattici delle stelle: 0,314'' per 61 Cygni (invece del valore oggi accertato di 0,34'').

I moti parallattici sono molto piccoli: 0,75'' per Proxima Centauri e 0,1'' per Vega. Oggi con l'impiego dei CCD, tali misure sono più accessibili. E' necessario effettuare due misure della posizione della stella a 6 mesi di distanza (da E_1 a E_2). In questo caso si parla di **parallasse annua**. Se tale stella è vicina, al termine di tale periodo, si nota uno spostamento sullo sfondo di stelle deboli (e perciò più lontane) in cui questo effetto non è osservato oppure è trascurabile.

Se indichiamo con α_R e δ_R le coordinate della stella di riferimento e con (α_1, δ_1) e (α_2, δ_2) le coordinate a 6 mesi di distanza della stella di cui si vuole misurare la parallasse, si ha:

$$\textcircled{1} \text{ Prima misura: } \alpha_1 - \alpha = P F_1(\theta, \alpha, \delta, t, \dots)$$

$$\textcircled{2} \text{ Seconda misura: } \alpha_2 - \alpha = P F_2(\theta, \alpha, \delta, t, \dots)$$

in cui α è la coordinata eliocentrica (sconosciuta) e F_1 è una funzione delle coordinate equatoriali della stella, della longitudine del Sole e dell'obliquità dell'eclittica. Questa funzione, di forma nota, cambia il suo valore in dipendenza della data (è legata al suo valore dall'Eq. 4.46). Sottraendo membro a membro le due misure avremo

$$\alpha_1 - \alpha_2 = P(F_1 - F_2) \quad (4.47)$$

e quindi

$$P = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{F_1 - F_2} \quad (4.48)$$

Per evitare che α_1 e α_2 cambino a causa del moto proprio della stella, si scrive:

$$(\alpha_1 - \alpha_R) - (\alpha_2 - \alpha_R) = P(F_1 - F_2) \quad (4.49)$$

da cui

$$P = \frac{(\alpha_1 - \alpha_R) - (\alpha_2 - \alpha_R)}{F_1 - F_2} \quad (4.50)$$

In generale si usano più stelle di riferimento per calcolare nel modo più accurato anche $F_1 - F_2$. Con i telescopi di terra si arriva a misurare valori di $P \geq 0,01''$. Con Hipparcos (satellite ESA), si è arrivati a misurare parallassi di circa 120.000 stelle con accuratezza migliore di $0,002''$. Si è anche riusciti a misurare i moti propri di queste stelle (dallo spostamento angolare eliocentrico in un anno).

Concludiamo questa sezione ricordando che la misura della parallasse annua ha introdotto una nuova unità di misura di distanze astronomiche: il **parsec**. Si definisce infatti parsec (parallasse secondo) la distanza alla quale la parallasse annua è esattamente di un secondo d'arco, ed equivale a 3,26 anni luce. In queste unità di misura la distanza è calcolata semplicemente come l'inverso dell'angolo di parallasse annua. Per esempio la stella a noi più vicina, Proxima Centauri, presenta una parallasse di $0,750''$. Ne consegue che la sua distanza è $1/0,750 = 1,33$ parsec, ovvero 4,3 anni luce.

4.2.2.2 Misura di moti propri

Si possono rilevare pianeti extrasolari col metodo della parallasse stellare, rilevando anche i moti propri delle stelle?

E' molto difficile! Facciamo l'esempio di dover rilevare la presenza di un pianeta come Giove che sposta il centro di massa (C.M.) del sistema Sole/Giove (gli altri pianeti sono trascurabili) di 1 raggio solare (696.000 Km) dal centro del Sole. Poniamo questo sistema ad una distanza di 10 pc. Dovremmo quindi rilevare uno spostamento $\Delta s = 2R_{\odot}$ in un intervallo di tempo pari a mezzo periodo di Giove ($T = 11,86$ anni). Ciò corrisponde ad un cambiamento nella direzione della stella pari a

$$\Delta\alpha = \frac{2 \cdot 6,96 \times 10^5}{10 \cdot 3,08 \times 10^{13}} \simeq 0,00022'' \quad (4.51)$$

che è un angolo molto piccolo. In realtà si sono trovati solo pianeti delle dimensioni di Giove ma molto più vicini alla stella di riferimento.

4.2.2.3 Misura della velocità della luce

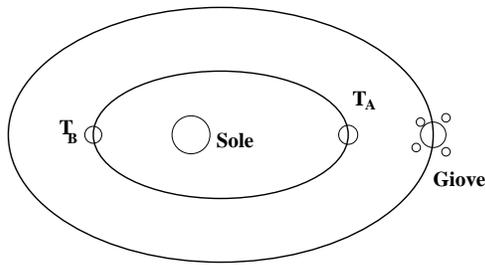


Figura 4.8: Il sistema Sole–Terra–Giove.

La misura della velocità della luce fu effettuata per la prima volta dall'astronomo danese Roemer nel 1675. Roemer misurò che le eclissi dei satelliti galileiani di Giove (Io, Europa, Ganimede e Callisto) non avvenivano ad intervalli di tempo regolari, come uno si sarebbe aspettato se la velocità della luce fosse infinita. Notò invece che avvenivano in anticipo quando Giove era più vicino alla Terra (TA in Figura 4.8) ed in ritardo quando era nel punto

più lontano (TB) dalla Terra. La differenza dei tempi poteva dipendere dal fatto che la velocità della luce è finita e che quindi un segnale luminoso deve attraversare in un caso il diametro dell'orbita terrestre e nell'altro nemmeno parte di questa. Dalla conoscenza (anche se grossolana) del diametro dell'orbita terrestre e dalla differenza dei due tempi di eclissi, Roemer ricavò un valore della velocità della luce non molto diverso da quello conosciuto oggi (299792,5 Km/s). Ma per circa mezzo secolo il risultato fu ignorato.

4.3 Aberrazione della luce

L'aberrazione della luce (scoperta nel 1725 dall'astronomo inglese James Bradley) deriva dal fatto che la luce ha una velocità finita e che l'osservatore si muove rispetto all'oggetto osservato. In tal caso, per le proprietà dei moti relativi, si ha che la direzione apparente della luce in arrivo da un oggetto celeste è diversa da quella vera. Infatti l'osservatore O avente velocità \vec{v}_0 vede la luce provenire da un punto apparente S' sulla direzione del vettore \vec{v}_R . Riferendosi alle direzioni (non ai moduli):

$$\vec{v}_R = \vec{v}_{\text{luce}} - \vec{v}_0 \equiv \vec{c} - \vec{v}_0 \quad (4.52)$$

L'angolo di aberrazione, visibile in Figura 4.9, è l'angolo $\Delta\theta$.

Studiamo ora il caso di una stella S che l'osservatore vede nel centro del campo di vista (si veda Figura 4.10). Il telescopio, per effetto del moto orbitale terrestre, si muove con velocità \vec{v}_T . Nel tempo in cui la luce raggiunge l'oculare, il telescopio si è mosso da E a E₁. All'osservatore la stella appare situata sulla direzione E₁S' invece che su E₁S: questo significa vedere la stella apparente S' sotto un angolo θ_1 invece di θ .

Dal triangolo AEE₁, applicando il teorema dei seni, abbiamo

$$\frac{\sin \theta_1}{c} = \frac{\sin \Delta\theta}{v_T} \quad (4.53)$$

quindi

$$\sin \Delta\theta = \frac{v_T}{c} \sin \theta_1 \quad (4.54)$$

Per angoli piccoli abbiamo che

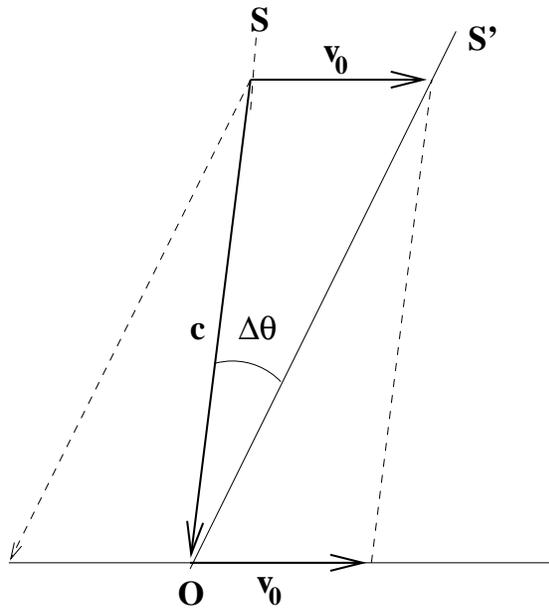


Figura 4.9: Definizione dell'angolo di aberrazione.

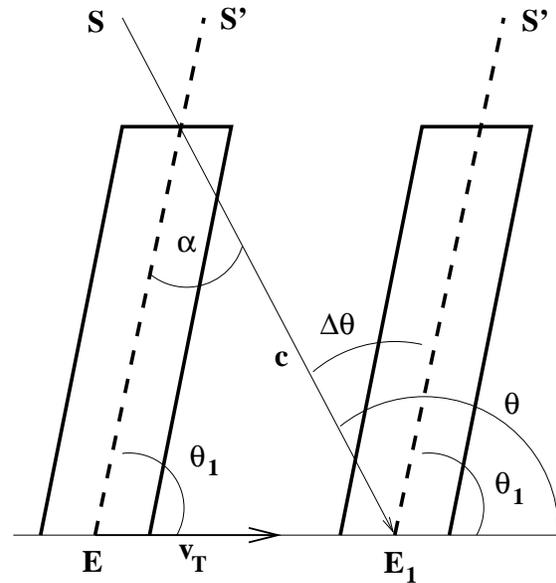


Figura 4.10: Aberrazione della luce dovuta al moto di rivoluzione della Terra.

$$\Delta\theta = \frac{v_T}{c} \sin \theta_1 \quad \text{radianti} \quad (4.55)$$

oppure

$$\Delta\theta = 206265 \frac{v_T}{c} \sin \theta_1 \quad \text{arcsec} \quad (4.56)$$

Definiamo **costante di aberrazione** κ la quantità

$$\kappa \equiv 206265 \frac{v_T}{c} = 20,496'' \quad (4.57)$$

perciò l'angolo di aberrazione astronomica $\Delta\theta$ diventa

$$\Delta\theta = \kappa \sin \theta_1 \quad (4.58)$$

Si noti che $\Delta\theta$ dipende da θ , l'angolo tra la direzione della stella e la direzione istantanea del moto della Terra. Quest'ultima direzione è nota come apice D del moto terrestre ed ha una longitudine eclittica 90° minore di quella del Sole. Il Sole possiede quella longitudine tre mesi prima (1/4 di anno).

Anche nel caso dell'aberrazione, la stella appare muoversi lungo un'ellisse attorno alla posizione reale, con un asse maggiore di $40,992''$ parallelo all'eclittica. Per una stella sull'eclittica si ha un arco, per una sul polo dell'eclittica si ha un cerchio.

4.3.1 Calcolo della costante di aberrazione

Dalla definizione della costante di aberrazione (Eq. 4.57), bisogna determinare la velocità della Terra lungo la sua orbita. Assumendo un'orbita circolare avremo che $v_T = 2\pi a/T$, con $a = 149,6 \times 10^9$ m la distanza Terra-Sole e $T = 3,156 \times 10^7$ sec l'anno siderale. Sostituendo i valori in Eq. 4.57 si ottiene $\kappa = 20,492''$.

Se si tiene conto dell'eccentricità $e = 0.01674$ dell'orbita terrestre abbiamo che la costante di aberrazione astronomica diventa

$$\kappa = 206265 \frac{2\pi a}{cT \sqrt{1-e^2}} = 20,495'' \quad (4.59)$$

4.3.2 Aberrazione diurna

Anche se minore rispetto a quella orbitale appena descritta, si ha anche un'aberrazione della luce per effetto della rotazione diurna della Terra. Per un osservatore O a latitudine λ si ha:

$$\vec{v}_d = \frac{2\pi R_{\oplus}}{T_d} \cos \lambda \quad (4.60)$$

in cui T_d è un giorno siderale della Terra, pari a 86164 sec (si vedano le relazione 3.14). Dalla definizione di costante di aberrazione (Eq. 4.57) abbiamo che

$$\kappa = 206265 \frac{v_d}{c} = 0,32'' \cos \lambda \quad (4.61)$$

Se si considera l'osservazione di una stella X quando attraversa il meridiano, poichè l'osservatore si muove verso Est per il moto diurno della Terra, si avrà un'aberrazione sul transito della stella. Se δ è la declinazione della stella, X sembrerà transitare in X_1 con un ritardo Δt . Dato che

$$XX_1 = 0,32'' \cos \lambda \quad (4.62)$$

gli angoli orari corrispondenti sono UV e quindi

$$\Delta t = UV = \frac{XX_1}{\cos \delta} = 0,32'' \frac{\cos \lambda}{\cos \delta} \quad (4.63)$$

che espresso in secondi di tempo, ricordandoci che 15° corrispondono ad una ora, può essere riscritta come

$$\Delta t = 0,021^s \frac{\cos \lambda}{\cos \delta} \quad (4.64)$$

4.4 Precessione degli equinozi

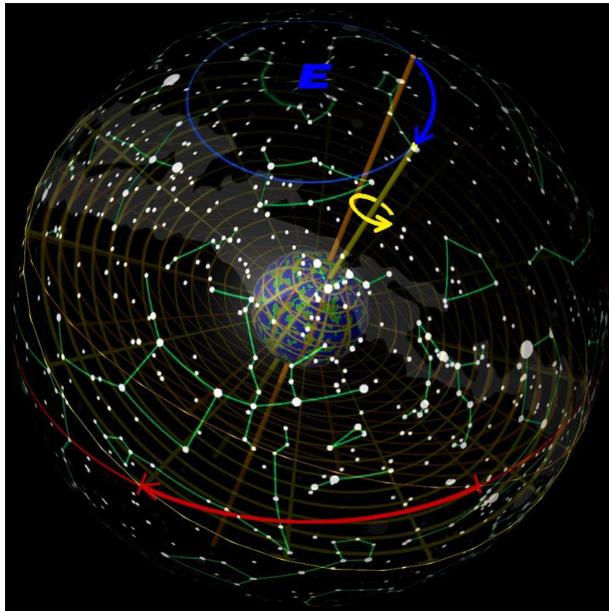


Figura 4.11: La precessione degli equinozi.

La scoperta della **precessione degli equinozi** è da attribuire ad Ipparco (125 a.C.), ispirato da quanto scritto dal poeta greco Arato (400 a.C.) in una sua opera riguardante la descrizione delle costellazioni celesti e confrontandolo con quello che osservava. In particolare le latitudini β e le longitudini λ (celesti) delle stelle in coordinate eclittiche misurate da lui e confrontate con quelle misurate da Timocari e Arustillo ad Alessandria 15 anni prima, mostravano che le latitudini non mutavano, mentre cambiavano le longitudini (erano infatti cresciute di circa $50''$ all'anno). Poiché le longitudini dipendono dalla posizione del punto Υ , Ipparco ha dedotto che l'equatore celeste doveva aver subito un precessione.

Questo significa che anche il Polo P deve aver ruotato su un piccolo cerchio di raggio ϵ (si veda Figura 4.11). Il moto all'indietro di Υ (e

del punto opposto ω) è detta precessione degli equinozi. Un'intera rotazione di P attorno a K avviene in circa 26000 anni (tra 12000 anni l'asse di rotazione terrestre punterà verso la stella Vega).

La precessione fa muovere il punto vernale Υ verso il Sole di circa $52,3''$ all'anno, sull'eclittica. Come conseguenza della precessione, sia l'ascensione retta α (riferita a Υ) sia la declinazione δ della stella (riferita al piano equatoriale) cambiano di anno in anno.

4.4.1 Misura della posizione di Υ

La declinazione Nord del Sole può assumere al massimo il valore dell'obliquità ϵ dell'eclittica, cioè $23^{\circ}26'$. Per misurare ϵ è sufficiente misurare la distanza zenitale del Sole al passaggio sul meridiano dell'osservatore per un certo numero di volte attorno al solstizio d'estate.

Se λ è la latitudine del luogo di osservazione, si ha che la declinazione del Sole è data da (si veda Figura 4.12)

$$\delta = 90^{\circ} - (90^{\circ} - \lambda + Z) = \lambda - Z \tag{4.65}$$

dove Z è la distanza zenitale del Sole. Al solstizio abbiamo che $\delta = \epsilon$. Per quanto riguarda l'ascensione retta α del Sole vicino all'equinozio, consideriamo il triangolo sferico rettangolo SAC (si veda Figura 4.13). Utilizzando le Eqs. 1.4 abbiamo che

$$\sin \alpha = \tan \delta \cot \epsilon \tag{4.66}$$

E' possibile quindi determinare l'ascensione retta α del Sole alla sua culminazione dato che, per definizione, abbiamo che

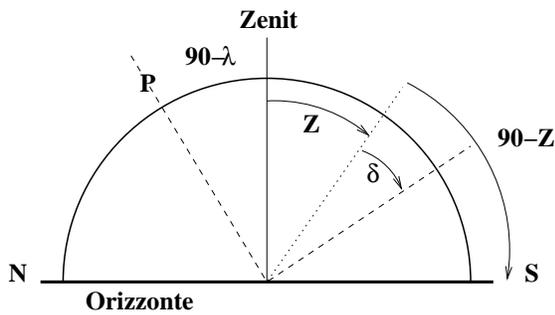


Figura 4.12: Declinazione del Sole.

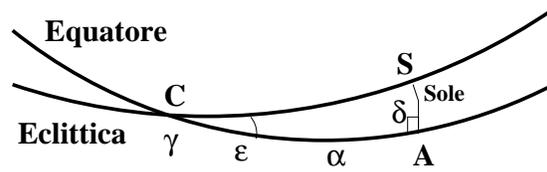


Figura 4.13: Ascensione retta del Sole.

$$TSL = \alpha_{Sole} + HA_{Sole} \tag{4.67}$$

Alla culminazione $HA_{Sole} = 0$ e quindi α_{Sole} non è altro che il tempo siderale locale. In questo modo è possibile verificare se il TSL dell'osservatorio è corretto. Noto TSL si possono misurare le ascensioni rette delle stelle al loro transito e le declinazioni. Viceversa, note le coordinate delle stelle, è possibile misurare la posizione di Υ e quindi dell'equatore.

4.4.2 Effetto della precessione sulle coordinate equatoriali

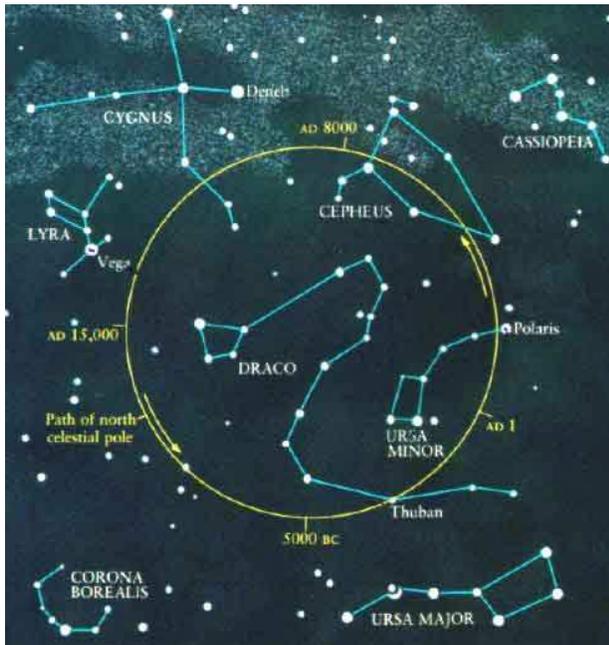


Figura 4.14: Variazione della posizione del polo Nord celeste per effetto della precessione.

Siano P_1, P_2 e P_3 il polo Nord celeste oggi, tra 6500 anni (1/4 del periodo di precessione) e fra 13000 anni (1/2 del periodo di precessione). Una stella che oggi sia coincidente con γ_1 ($RA_{2000}, DEC_{2000} = (0^h, 0^\circ)$), fra 6500 anni avrà coordinate equatoriali ($RA_{8500}, DEC_{8500} = (6^h, \epsilon^\circ)$). Fra 13000 anni la stella avrà invece coordinate ($RA_{15000}, DEC_{15000} = (12^h, 0^\circ)$) e così via.

In Figura 4.14 mostriamo il moto del polo Nord celeste dovuto alla precessione. Possiamo vedere come la stella "polaris" (la nostra stella polare) è la più vicina a P_1 ($\sim 1^\circ$); fra 13.000 anni il polo sarà vicino ad α Lyrae (Vega).

Per determinare l'espressione generale per la variazione della ascensione retta α e declinazione δ per effetto della precessione, utilizziamo l'ultima espressione di Eq. 2.3

$$\sin \delta = \cos \epsilon \sin \beta + \sin \epsilon \cos \beta \sin \lambda$$

e differenziamola, ottenendo

$$\cos \delta \, d\delta = \sin \varepsilon \cos \beta \cos \lambda \, d\lambda \quad (4.68)$$

Utilizzando la seconda di Eq. 2.2 sul membro di destra otteniamo per il cambio in declinazione

$$d\delta = d\lambda \sin \varepsilon \cos \alpha \quad (4.69)$$

Per calcolarci la variazione in ascensione retta partiamo dalla seconda espressione di Eq. 2.3

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \beta \cos \lambda$$

e differenziamo, ottenendo

$$-\sin \alpha \cos \delta \, d\alpha - \cos \alpha \sin \delta \, d\delta = -\cos \beta \sin \lambda \, d\lambda \quad (4.70)$$

Se sostituiamo a $d\delta$ l'espressione appena trovata, ed usiamo la prima espressione di Eq. 2.2 otteniamo

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \delta \, d\alpha &= d\lambda (\cos \beta \sin \lambda - \sin \varepsilon \cos^2 \alpha \sin \delta) \\ &= d\lambda (\sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha - \sin \varepsilon \cos^2 \alpha \sin \delta) \end{aligned} \quad (4.71)$$

che semplificando diventa

$$d\alpha = d\lambda (\sin \alpha \sin \varepsilon \tan \delta + \cos \varepsilon) \quad (4.72)$$

Se $d\lambda$ è il tasso di aumento annuale della longitudine eclittica ($\sim 50''$ all'anno), allora la variazione in ascensione retta e declinazione per effetto della precessione in un anno diventano

$$\begin{aligned} d\delta &= d\lambda \sin \varepsilon \cos \alpha \\ d\alpha &= d\lambda (\sin \varepsilon \sin \alpha \tan \delta + \cos \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Queste espressioni vengono usualmente scritte nella forma

$$\begin{aligned} d\delta &= n \cos \alpha \\ d\alpha &= m + n \sin \alpha \tan \delta \end{aligned} \quad (4.74)$$

dove abbiamo definito le **costanti di precessione** come

$$\begin{aligned} m &= d\lambda \cos \varepsilon \\ n &= d\lambda \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (4.75)$$

Epoca	m (s/a)	n (s/a)	n ("/a)
1800	3,07048	1,33703	20,0554
1850	3,07141	1,33674	20,0511
1900	3,07234	1,33646	20,0468
1950	3,07327	1,33617	20,0426
2000	3,07419	1,33589	20,0383

a indica anno tropico (si veda pag. 20).

Tabella 4.2: Costanti di precessione m e n a diverse epoche.

Dato che l'obliquità dell'eclittica non è esattamente costante, ma varia lentamente nel tempo, anche m ed n variano nel tempo. I valori delle costanti di precessione per alcune epoche sono dati in Tabella 4.2.

Con riferimento al 2000,0 e per una decina d'anni, le coordinate equatoriali si possono aggiornare utilizzando la formula

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_{2000} + (3,074^s + 1,336^s \sin \alpha_{2000} \tan \delta_{2000}) (t - 2000,0) \\ \delta(t) &= \delta_{2000} + (20,038'' \cos \alpha_{2000}) (t - 2000,0)\end{aligned}\quad (4.76)$$

4.4.3 Cause della precessione

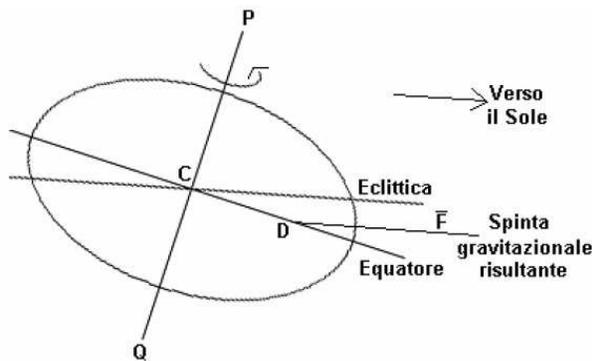


Figura 4.15: La precessione degli equinozi: effetto della Luna.

Le forze principali agenti sulla Terra sono dovute al Sole ed alla Luna. Le cause principali sono:

- la Terra non è perfettamente sferica;
- il Sole e la Luna si muovono su orbite apparenti inclinate rispetto al piano dell'equatore terrestre.

Per il Sole, il piano dell'orbita è dell'eclittica. A causa dell'asimmetria delle forze gravitazionali agenti sulla Terra, l'attrazione solare risulta applicata non nel centro C del pianeta, ma in D lungo la direzione DF (si veda Figura 4.15).

Se la Terra non ruotasse, tale forza agirebbe in modo tale da far coincidere il piano equatoriale con il piano dell'eclittica. Poichè la Terra ruota si genera una **precessione del momento**

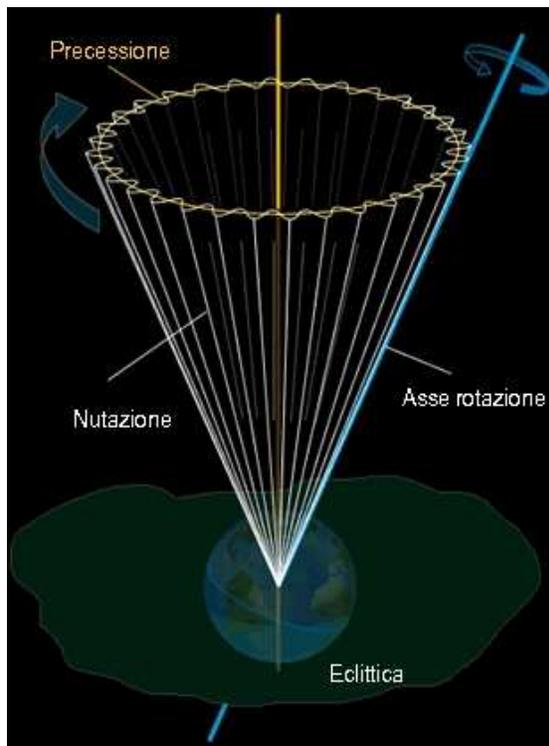


Figura 4.16: Effetto della nutazione sul moto di precessione.

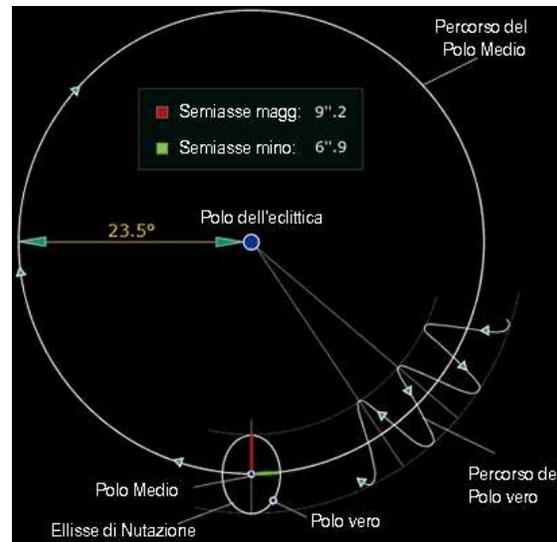


Figura 4.17: Scomposizione del moto di nutazione.

angolare (come succede ad una trottola rotante se il suo centro di massa non si trova sull'asse verticale passante per il punto di appoggio sul suolo).

Anche la Luna causa un moto di precessione, con l'orbita lunare che è inclinata di soli alcuni gradi rispetto al piano dell'eclittica. A causa del contributo Sole/Luna, la precessione del momento angolare della Terra, viene anche chiamata **precessione luni-solare**.

4.5 Nutazione

La correzione delle coordinate di una stella per effetto della precessione si effettua rispetto a ciò che è chiamato **equatore medio** (e di conseguenza rispetto ad un polo celeste medio. Si veda Figura 4.16). C'è un'altra correzione, anche se piccola, da apportare che è dovuta ad un altro moto del Polo P della Terra, noto come **nutazione**. Per effetto della nutazione, il punto P mentre precede subisce una variazione anche in ϵ (di circa $10''$) di tipo sinusoidale con periodo di 6798 giorni (18.6 anni. Si veda Figura 4.17). Fu Bradley a suggerire che questo moto è dovuto all'azione della Luna sulla Terra. Tra varie cause, la nutazione è dovuta:

- la variabilità della distanza Terra-Luna (periodo 1 mese lunare);
- la variabilità della distanza Terra-Sole (periodo 1 anno);

- un insieme di cause geofisiche.

L'effetto è anche in questo caso un movimento del punto Υ con conseguente variazione delle coordinate equatoriali.

Il termine principale della nutazione è dovuto alla regressione della linea dei nodi della Luna e ha lo stesso periodo di 6798 giorni. La componente longitudinale ha un'ampiezza di $17''$ e quella obliqua di $9''$. Tutti gli altri termini sono molto più piccoli. Il successivo termine più grande, con un periodo di 183 giorni (0.5 anni) ha ampiezze di $1.3''$ e $0.6''$ rispettivamente. Si usa perciò suddividere la nutazione in termini a lungo periodo e a breve periodo. I termini a lungo periodo sono calcolati e riportati negli almanacchi, mentre la correzione addizionale dovuta ai termini a breve periodo è di solito presa da una tabella. In ogni caso servono oltre 110 termini per esprimere la nutazione con sufficiente precisione!

Capitolo 5

Sistemi binari

5.1 Definizione

Può accadere che due stelle *appaiano* molto vicine benché si trovino in realtà a distanze molto diverse. Queste coppie “casuali” vengono chiamate **stelle binarie ottiche**. Vi sono però molte coppie di stelle che si trovano alla stessa distanza e che formano un sistema fisico in cui due stelle orbitano una attorno all'altra. Solo meno della metà di tutte le stelle sono stelle singole, come il nostro Sole. Più del 50% delle stelle appartiene invece a sistemi contenenti due o più membri. In generale i sistemi multipli hanno una struttura gerarchica: un sistema triplo è formato da una stella ed un sistema binario che orbitano uno attorno all'altro (cioè attorno al loro centro di massa); un sistema quadruplo è formato da due sistemi binari. Quindi la maggior parte dei sistemi multipli può essere descritto come sistemi binari a diversi livelli.

I sistemi binari sono classificati in base al metodo con cui sono stati scoperti come tali. Le **binarie visuali** possono essere viste come due componenti separate ad occhio nudo o con i telescopi, cioè la loro separazione è maggiore di $\sim 0.1''$. Nelle **binarie astrometriche** è possibile vedere solamente una delle due componenti, ma la variabilità del loro moto proprio indica che una seconda componente invisibile deve essere presente. Le **binarie spettroscopiche** sono identificate sulla base dei loro spettri che mostrano o due insiemi di linee spettrali, o uno spostamento Doppler delle linee osservate che varia periodicamente. La quarta classe di binarie sono chiamate **binarie fotometriche** (dette anche **variabili ad eclisse**). In questi sistemi le componenti della coppia passano periodicamente una davanti all'altra determinando una variazione della magnitudine totale apparente.

I sistemi binari possono essere classificati anche in base alla loro separazione. Nelle **binarie distanti** la separazione tra le componenti è di decine o centinaia di unità astronomiche (UA), ed i loro periodi orbitali variano da decine a centinaia di anni. Nelle **binarie strette** la separazione varia da circa una UA fino al raggio della stella. Il periodo orbitale varia da alcune ore ad alcuni anni. Infine nelle **binarie a contatto** le stelle sono così vicine che si toccano.

Le stelle in un sistema binario si muovono su orbite ellittiche attorno al centro di massa del sistema.

5.2 Determinazione della massa stellare

L'uso della leggi di Newton in un sistema binario può essere usato per determinare le masse della stelle. Dimostriamolo nel caso semplice del moto circolare.

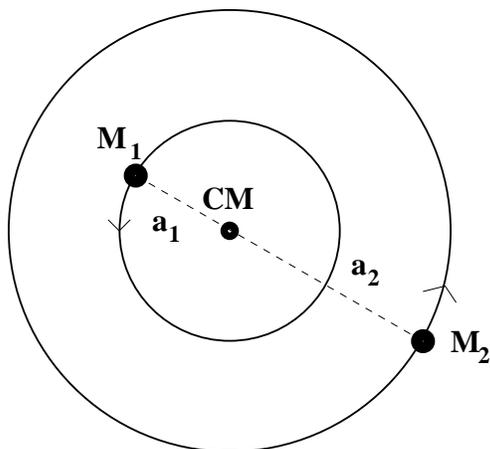


Figura 5.1: Schema di un sistema binario. da cui

Consideriamo due stelle di massa M_1 e M_2 (si veda Figura 5.1) che si muovono in orbite circolari di raggio a_1 e a_2 (rispettivamente) attorno al comune centro di massa CM definito da

$$M_1 a_1 = M_2 a_2 \quad (5.1)$$

Indichiamo con α_i la separazione angolare, vista dalla Terra, delle due stelle dal centro di massa. Se d è la distanza del centro di massa dalla Terra, avremo

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{d} \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{d} \quad (5.2)$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{M_1}{M_2} \quad (5.3)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato Eq. 5.1. Il rapporto delle distanze angolari è quindi uguale all'inverso del rapporto delle masse.

Tenendo presente che la velocità angolare ω delle due stelle attorno a CM è la stessa, per la seconda legge della dinamica abbiamo

$$G \frac{M_1 M_2}{a^2} = M_1 \omega^2 a_1 = M_2 \omega^2 a_2 \quad (5.4)$$

dove abbiamo definito la separazione a come

$$a \equiv a_1 + a_2 = a_1 \left(1 + \frac{a_2}{a_1} \right) = a_1 \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right) \quad (5.5)$$

e nell'ultimo passaggio abbiamo usato Eq. 5.1. Risolvendo per a_1 otteniamo

$$a_1 = \frac{a}{\left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right)} = \frac{a M_2}{M_1 + M_2} \quad (5.6)$$

Sostituendo a_1 così ottenuto in Eq. 5.4 abbiamo

$$G \frac{M_1 M_2}{a^2} = M_1 \omega^2 \frac{a M_2}{M_1 + M_2} \quad (5.7)$$

che semplificata diventa

$$G (M_1 + M_2) = \omega^2 a^3 \quad (5.8)$$

Dalla definizione di velocità angolare $\omega = 2\pi/T$, dove T è il periodo orbitale, otteniamo

$$\frac{4\pi^2}{T^2} a^3 = G (M_1 + M_2) \quad (5.9)$$

che non è altro che la terza legge di Keplero per i moti planetari. Anche se le orbite sono state approssimate come circolari, Eq. 5.9 è valida anche per orbite ellittiche in cui il raggio a è minore del semiasse maggiore dell'orbita di una stella rispetto all'altra, assunta nel fuoco dell'orbita relativa. Il CM è il fuoco comune delle due orbite ellittiche individuabili.

Da Eq. 5.9, se è possibile misurare il periodo T e la separazione tra le due stelle (che presume la conoscenza della distanza da Terra), si può allora ottenere la somma delle masse $M_1 + M_2$. Se conoscessimo la posizione del centro di massa e la distanza, sarebbe possibile ricavare sia il rapporto sia la somma delle masse e quindi le singole masse M_1 e M_2 . Questo non è sempre possibile e spesso si ha un'informazione parziale dipendente dal tipo di sistema binario (binarie visuali, spettroscopiche e ad eclisse).

5.3 Binarie visuali

Le **binarie visuali** sono stelle binarie in cui entrambe le stelle sono visibili ad occhio nudo o con il telescopio (un esempio di binaria visuale visibile ad occhio nudo è Mizar, nella costellazione dell'Orsa Maggiore). Nel caso ottico, è necessario che il telescopio abbia un potere risolutivo adeguato a separare entrambe le stelle. Il limite teorico di risoluzione è definito dalla diffrazione della luce. La risoluzione teorica di un telescopio ottico viene spesso data nella forma introdotta da Rayleigh.

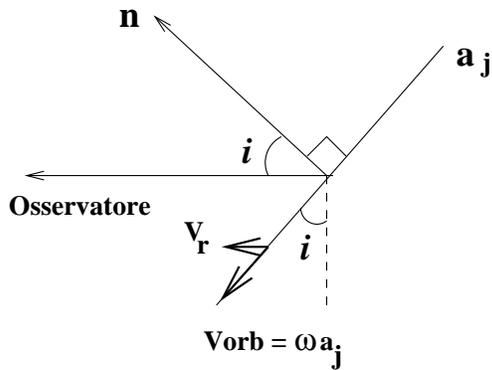
Il criterio di Rayleigh ci permette, conoscendo la lunghezza d'onda della luce osservata e il diametro del foro di osservazione (detto anche pupilla), di sapere qual è la minima distanza angolare oltre la quale è possibile la risoluzione. Il criterio di Rayleigh afferma che due sorgenti puntiformi sono distinguibili se la loro separazione angolare maggiore o uguale a:

$$\sin \theta_R \simeq \theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (5.10)$$

dove λ è la lunghezza d'onda della luce osservata e d è il diametro del foro di osservazione¹.

¹Quando si costruisce uno strumento ottico che deve distinguere oggetti con piccola distanza angolare, si cerca di limitare il più possibile la dimensione del disco centrale della figura di diffrazione. Il criterio di Rayleigh ci dice che ciò si può ottenere aumentando il diametro della lente o diminuendo la lunghezza d'onda. E' per questo che si cerca di costruire telescopi con il più grande diametro possibile e che nei microscopi viene spesso usata luce ultravioletta al posto della luce visibile. Un esempio interessante è dato dall'occhio umano. La pupilla ha un diametro, in condizioni di luminosità normale diurna, di circa 3 mm. Prendendo in esame luce con lunghezza d'onda $\lambda = 550$ nm, risulta che la minima separazione angolare visibile dall'uomo è di 0.224×10^{-3} radianti, pari a circa $46''$. Ne segue che siamo in grado di distinguere due capelli vicini (il diametro di un capello è circa $70 \mu\text{m}$) solo fino ad una distanza di 30 cm circa.

In questo caso si può misurare, in funzione del tempo, sia la separazione (angolare) α sia l'angolo di posizione della stella secondaria rispetto alla primaria θ e ricavare così l'orbita proiettata sul piano del cielo (orbita apparente) di una stella attorno all'altra. Se la distanza del sistema binario è nota, una volta misurato il periodo orbitale si può stimare la somma delle masse usando Eq. 5.9.



Bisogna però tenere presente che l'angolo α che noi misuriamo non coincide con la separazione vera, perché quest'ultima dipende dal piano dell'orbita. L'**inclinazione** dell'orbita binaria è definita dall'angolo i fra la normale all'orbita e la direzione dell'osservatore (si veda Figura 5.2). Dalla Figura vediamo che la proiezione della velocità orbitale lungo la linea di vista (la cosiddetta **velocità radiale** v_r vale

$$v_r = v_{orb} \sin i \quad (5.11)$$

Figura 5.2: Definizione dell'angolo di inclinazione.

Trattiamo ora il caso particolare in cui il piano orbitale è perpendicolare alla linea di vista dell'osservatore. In questo caso possiamo applicare direttamente Eq. 5.9 e ricavarci la somma delle masse

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{a^3}{G} \quad (5.12)$$

Per ricavare il rapporto tra le masse, bisogna invece misurare i moti assoluti delle due stelle rispetto alle stelle "fisse" così lontane da poter ignorare i loro moti propri. Otteniamo quindi

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\alpha_2 d}{\alpha_1 d} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (5.13)$$

in cui α_1 e α_2 sono le separazioni angolari e d è la distanza delle stelle osservate. Per calcolare queste separazioni angolari è necessario determinare la posizione del centro di massa del sistema. Questo punto può essere localizzato considerando che, poichè il sistema binario è isolato, il CM deve muoversi su una linea retta e questo permette di dedurre le orbite assolute delle due stelle e quindi α_1 e α_2 .

Anche nel caso di un'orbita inclinata il rapporto delle masse non dipende da i . Dipende, invece, da i la somma delle masse. Infatti, chiamando $\tilde{\alpha}_j$ la proiezione di α_j ($\tilde{\alpha}_j = \alpha_j \cos i$), abbiamo

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_1} \quad (5.14)$$

Invece per la somma delle masse abbiamo

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{(d \alpha)^3}{G} = \frac{4\pi^2}{T^2} \left(\frac{d}{\cos i} \right)^3 \frac{\tilde{\alpha}}{G} \quad (5.15)$$

dove abbiamo definito $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 = \alpha \cos i$.

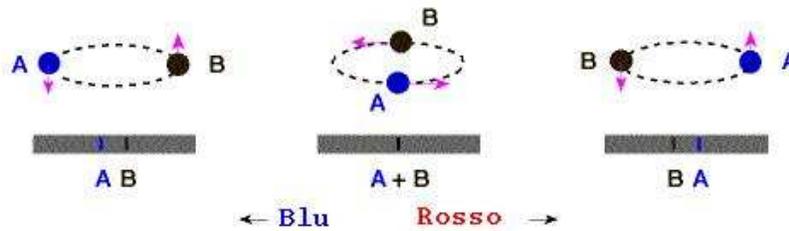


Figura 5.4: Una binaria spettroscopica a doppia linea.

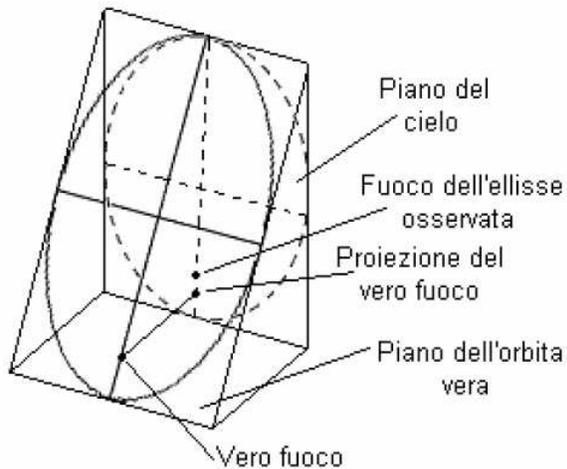


Figura 5.3: Proiezione del piano orbitale.

ta proiettata con dati sperimentali. Analogamente, si può calcolare l'inclinazione i imponendo come condizione che la stella primaria sia nel fuoco dell'orbita relativa "vera". Ciò non è vero per l'orbita proiettata sul piano del cielo.

Per la stima dell'inclinazione orbitale i , bisogna tener presente che il fuoco dell'ellisse proiettata non coincide con quello dell'ellisse osservata sul piano del cielo, che risulta avere una diversa eccentricità. Per esempio, nel caso di un'orbita circolare inclinata, quando viene proiettata sul piano del cielo, si ottiene un'orbita apparente ellittica con la stella primaria nel centro (e non nel fuoco. Vedi Figura 5.3). Poiché il CM deve essere il fuoco comune delle due orbite ellittiche individuali, uno si aspetterebbe di trovare il centro di massa in uno dei due fuochi dell'ellisse proiettata, ma ciò non si verifica. Infatti il CM non resta in quiete oppure non si muove di moto uniforme (sistema isolato) finché non si individua (per tentativi) l'angolo giusto e si confronta l'orbita

5.4 Binarie spettroscopiche

Si tratta di stelle doppie non risolte visualmente, ma la cui natura binaria può essere messa in evidenza dal loro moto orbitale, se le due stelle sono abbastanza vicine che la loro velocità orbitale sia maggiore di circa 1 km/s. In tal caso negli spettri di queste sorgenti si possono vedere righe spettrali che mostrano spostamenti periodici in frequenza (o lunghezza d'onda). Se entrambi gli spettri sono visibili, quando una stella si avvicina e l'altra si allontana, le righe raddoppiano (si veda Figura 5.4).

Gli spostamenti delle righe sono dovuti all'effetto Doppler, per cui se la stella si muove rispetto all'osservatore con velocità radiale $v_r \ll c$, la radiazione emessa dalla sorgente con lunghezza d'onda λ_{rip} a riposo viene vista dall'osservatore con lunghezza d'onda λ_{oss} tale che

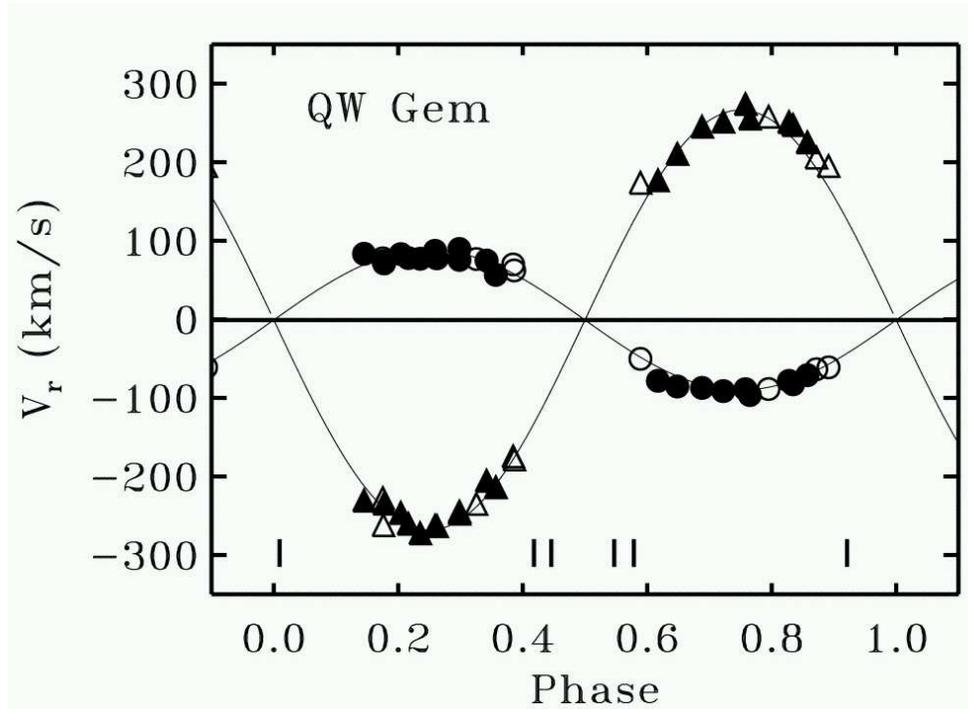


Figura 5.5: Velocità radiale di stelle appartenenti al sistema binario QW Gem.

$$\frac{\lambda_{\text{oss}} - \lambda_{\text{rip}}}{\lambda_{\text{rip}}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{rip}}} = \frac{v_r}{c} \quad (5.16)$$

dalla quale possiamo ricavare

$$v_r = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{rip}}} \quad (5.17)$$

La misura dello spostamento per effetto Doppler in funzione del tempo, fornisce quindi l'andamento della velocità radiale lungo il percorso delle stelle nelle loro orbite. Un esempio di variazioni di v_r durante un periodo orbitale T delle stelle rispetto al centro di massa è mostrato in Figura 5.5 per il sistema binario QW Gem (formato da due stelle di massa $M_1 = 0.44$ e $M_2 = 1.31$ masse solari e periodo orbitale di 0.358 giorni (Kreiner et al. 2003. *A&A* 412, 465)). Nel caso preso in considerazione si vedono entrambi gli spettri delle stelle (in questo caso si parla di binarie spettroscopiche a doppia linea), ma in altre situazioni questo può non avvenire (binarie spettroscopiche a singola linea). Si nota che le velocità delle due stelle variano in anti-fase, con una stella che si muove verso l'osservatore, mentre l'altra si allontana.

Come abbiamo visto (si veda Figura 5.2 ed Eq. 5.11), l'ampiezza di v_r^j per la stella j è data da

$$v_r^j = \omega a_j \sin i \quad (5.18)$$

dove a_j è il raggio dell'orbita della stella j rispetto al centro di massa. Se si misurano entrambi gli spettri, si ha:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1} \quad (5.19)$$

in cui, per semplificare la notazione, è stato definito $v_1 \equiv v_r^1$ e $v_2 \equiv v_r^2$. E' quindi possibile ottenere il rapporto tra le masse dal rapporto tra le velocità radiali, senza bisogno di conoscere l'inclinazione i dell'orbita.

Purtroppo, nel caso delle binarie spettroscopiche, non c'è modo di stimare i e, quindi, nemmeno la somma delle masse attraverso la Eq. 5.12. Si può però misurare

$$v_1 + v_2 = \omega (a_1 + a_2) \sin i = \omega a \sin i \quad (5.20)$$

Ricavandoci a dall'espressione precedente ed andandola a sostituire in Eq. 5.12 otteniamo

$$M_1 + M_2 = \frac{\omega^2}{G} a^3 = \frac{\omega^2}{G} \left(\frac{v_1 + v_2}{\omega \sin i} \right)^3 = \left(\frac{v_1 + v_2}{\sin i} \right)^3 \frac{T}{2\pi G} \quad (5.21)$$

ovvero

$$(M_1 + M_2) \sin^3 i = \frac{T (v_1 + v_2)^3}{2\pi G} \quad (5.22)$$

Per orbite ellittiche, la curva di v_r (rispetto alla fase) non è più una sinusoidale. Sfruttando questa proprietà si può calcolare l'eccentricità dell'orbita.

Nel caso in cui si dispone dello spettro di una sola delle due stelle (per esempio la 1) perché la secondaria è troppo debole oppure non emette in ottico (come una stella di neutroni o un buco nero che emettono in raggi X), Eq. 5.22 può essere riscritta

$$(M_1 + M_2) \sin^3 i = \frac{T \left(v_1 + \frac{M_1}{M_2} v_1 \right)^3}{2\pi G} \quad (5.23)$$

dove abbiamo utilizzato Eq. 5.19 per eliminare la dipendenza da v_2 . Semplificando otteniamo

$$(M_1 + M_2) \sin^3 i = \frac{T}{2\pi G} \left(\frac{M_1 + M_2}{M_2} \right)^3 v_1^3 \quad (5.24)$$

da cui

$$\frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2} \sin^3 i = \frac{T}{2\pi G} v_1^3 \quad (5.25)$$

Eq. 5.25 è nota come **funzione di massa** e dipende dal periodo e dalla velocità radiale, oltre che dall'inclinazione dell'orbita. Purtroppo, nel caso in cui solo v_1 è nota, non è possibile sfruttare la Eq. 5.19 per valutare il rapporto M_1/M_2 .

Eq. 5.25, se non si conosce M_1 o $\sin i$, può servire per stimare un limite inferiore di M_2 . Se definiamo $q \equiv M_1/M_2$ allora

$$\frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2} \sin^3 i = \frac{M_2}{(1+q)^2} \sin^3 i \lesssim M_2$$

e quindi, da Eq. 5.25 abbiamo

$$M_2 \gtrsim \frac{T}{2\pi G} v_1^3 \quad (5.26)$$

Anche se si conoscono v_1 e v_2 non è però possibile determinare $M_1 + M_2$ senza avere una stima di i . Questa la si può dare assumendo un valor medio per $\sin^3 i$

$$\langle \sin^3 i \rangle \simeq 0.42$$

In realtà per essere una binaria spettroscopica i deve essere significativamente diverso da zero, quindi un valore più ragionevole è

$$\langle \sin^3 i \rangle \simeq \frac{2}{3} \quad (5.27)$$

Con questo valore si possono riscrivere le equazioni precedenti e calcolare le due masse con il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} M_2 \gtrsim \frac{T}{2\pi G} v_1^3 \\ (M_1 + M_2) < \frac{T (v_1 + v_2)^3}{2\pi G} \frac{2}{3} \end{array} \right. \quad (5.28)$$

5.5 Binarie ad eclisse

Una binaria ad eclisse è una stella binaria in cui il piano orbitale delle due stelle si trova così ben allineato con la linea di vista dell'osservatore che le due componenti mostrano eclissi reciproche. Le binarie ad eclisse sono anche stelle variabili (e dette quindi **variabili a eclisse**), non perché le singole stelle siano variabili, ma a causa delle eclissi. L'esempio più famoso è la stella Algol (β Persei), chiamata la *stella del diavolo* dagli arabi, che con tutta probabilità avevano notato la sua variabilità.

La presenza di eclissi può essere utilizzata per determinare un limite superiore all'angolo di inclinazione i . Infatti, affinché si osservi un'eclisse è necessario che (si veda Figura 5.6)

$$\cos i < \frac{R_1 + R_2}{a} \quad (5.29)$$

dove R_1 e R_2 sono i raggi delle due stelle e a è la loro separazione.

La curva di luce di una binaria ad eclisse è caratterizzata da estesi intervalli di luminosità praticamente costante, con cadute periodiche di intensità. Nel caso in cui $i = 90^\circ$ (eclisse totale) la curva di luce del sistema ha la forma mostrata in Figura 5.7, mentre in Figura 5.8 vediamo la curva di luce nel caso in cui $i < 90^\circ$ (in questo caso le eclissi sono parziali).

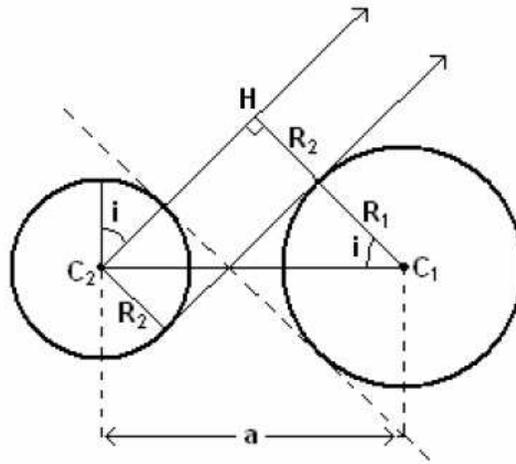


Figura 5.6: Binarie ad eclisse: limite sull'angolo di inclinazione.

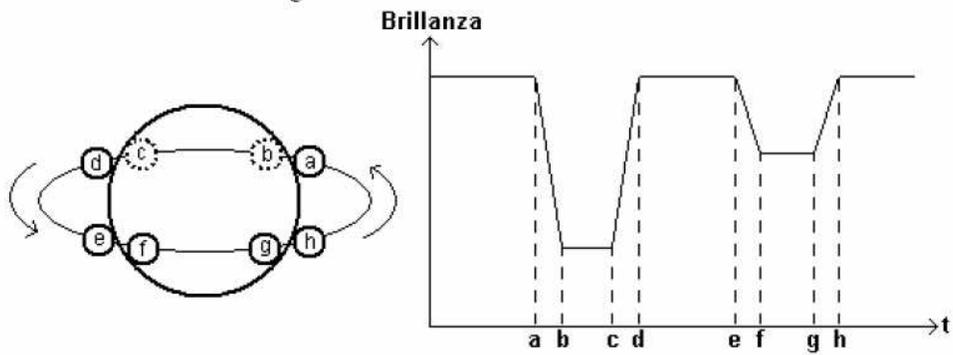


Figura 5.7: Binarie ad eclisse: curva di luce per $i = 90^\circ$ (eclisse totale).

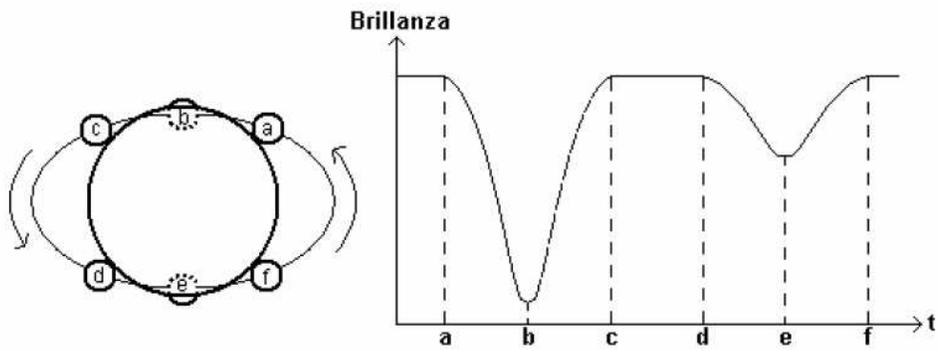


Figura 5.8: Binarie ad eclisse: curva di luce per $i < 90^\circ$ (eclisse parziale).

Assumendo il caso $i = 90^\circ$ è possibile calcolare la durata dell'eclisse totale t_{tot} , tenendo presente che la velocità con cui si muove una stella dietro l'altra è approssimativamente data dalla velocità relativa delle due stelle. Abbiamo quindi (si veda Figura 5.7)

$$t_{\text{tot}} \equiv t_c - t_b = \frac{2(R_1 - R_2)}{v_1 + v_2} \quad (5.30)$$

in cui abbiamo assunto $R_1 > R_2$. Utilizzando Eq. 5.20 abbiamo che

$$t_{\text{tot}} = \frac{(R_1 - R_2) T}{\pi a} \quad (5.31)$$

Analogamente, il tempo di variazione della luminosità dal massimo al minimo t_{trans} è dato da

$$t_{\text{trans}} \equiv t_b - t_c = \frac{2R_2}{v_1 + v_2} = \frac{R_2 T}{\pi a} \quad (5.32)$$

Dalla misura di t_{trans} si può determinare R_2 se si conosce il periodo orbitale T e la distanza a del sistema binario. Analogamente, noto R_2 si può ricavare R_1 misurando t_{tot} .

Un altro parametro interessante che si può determinare dalle curve di luce delle binarie ad eclisse è il rapporto tra le temperature effettive delle due stelle. Assumendo le stelle come emettitori di corpo nero (brillanza $F = \sigma T^4$, con T temperatura effettiva), si può scrivere che la brillanza quando entrambe sono visibili (e quindi non sovrapposte), è data da:

$$B_{1+2} = k(4\pi R_1^2 F_1 + 4\pi R_2^2 F_2) \quad (5.33)$$

dove k è una costante che dipende dalla distanza (non ci interessa conoscerne il valore dato che siamo interessati a dei rapporti). La brillanza quando solo la primaria, assunta più fredda, è visibile (minimo primario in Figura 5.7) è

$$B_P = k4\pi R_1^2 F_1 \quad (5.34)$$

In corrispondenza del minimo secondario (che rappresenta la situazione in cui la secondaria, più calda, è davanti alla primaria, più fredda) si ha:

$$B_S = k(4\pi R_1^2 - 4\pi R_2^2) F_1 + k4\pi R_2^2 F_2 \quad (5.35)$$

da cui

$$\frac{B_{1+2} - B_P}{B_{1+2} - B_S} = \frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 \quad (5.36)$$

Nel caso in cui la primaria sia la stella più calda, quindi la più brillante, quando è nascosta si vede la sua brillanza (minimo secondario), mentre quando sono entrambe visibili si vede la somma. Dal rapporto

$$\frac{B_{1+2}}{B_S} = \frac{R_1^2 F_1 + R_2^2 F_2}{R_1^2 F_1} = 1 + \frac{F_2}{F_1} = 1 + \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 \quad (5.37)$$

si ricava il rapporto delle luminosità.

Ovviamente una relazione analoga si ottiene misurando le variazioni di magnitudine nei due minimi. Se indichiamo con m_1 e m_2 la magnitudine apparente nei due minimi, e con m_{1+2} la magnitudine apparente quando entrambe le stelle sono visibili, abbiamo che

$$\begin{aligned}
 m_1 - m_{1+2} &= M_1 - M_{1+2} \\
 &= -2,5 \log \frac{L_1}{L_{1+2}} = 2,5 \log \frac{L_{1+2}}{L_1} \\
 &= 2,5 \log \frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4 + 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4}{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4} \\
 &= 2,5 \log \left[1 + \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^4 \right]
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

dove siamo potuti passare da magnitudine apparante m a magnitudine assoluta M perché il modulo di distanza delle due componenti è lo stesso. In maniera analoga abbiamo che

$$m_2 - m_{1+2} = 2,5 \log \left[1 + \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4 \right] \tag{5.39}$$

Quindi se, ad esempio, le temperature effettive delle due stelle sono $T_1 = 5000$ K e $T_2 = 12000$ K, allora il minimo primario corrisponderà ad una variazione di magnitudine di

$$m_1 - m_{1+2} = 2,5 \log \left[1 + \left(\frac{12000}{5000} \right)^4 \right] \simeq 3,8 \text{ mag}$$

mentre il minimo secondario sarà

$$m_2 - m_{1+2} = 2,5 \log \left[1 + \left(\frac{5000}{12000} \right)^4 \right] \simeq 0.03 \text{ mag}$$

A questo punto possiamo fare alcune osservazioni:

1. Le binarie visuali hanno permesso, anche se in pochi casi (quando sono vicine e la distanza è nota), di ricavare la relazione tra massa e luminosità. Si conoscono circa 50000 binarie visuali.
2. Di binarie spettroscopiche se ne conoscono circa 2000, da cui si sono potute ricavare informazioni utili relative la loro funzione di massa, assumendo che le inclinazioni dei sistemi, rispetto alla linea di vista, siano distribuite casualmente. Queste misure, unite all'informazione sul rapporto delle masse, hanno permesso di stimare statisticamente M_1 e M_2 .

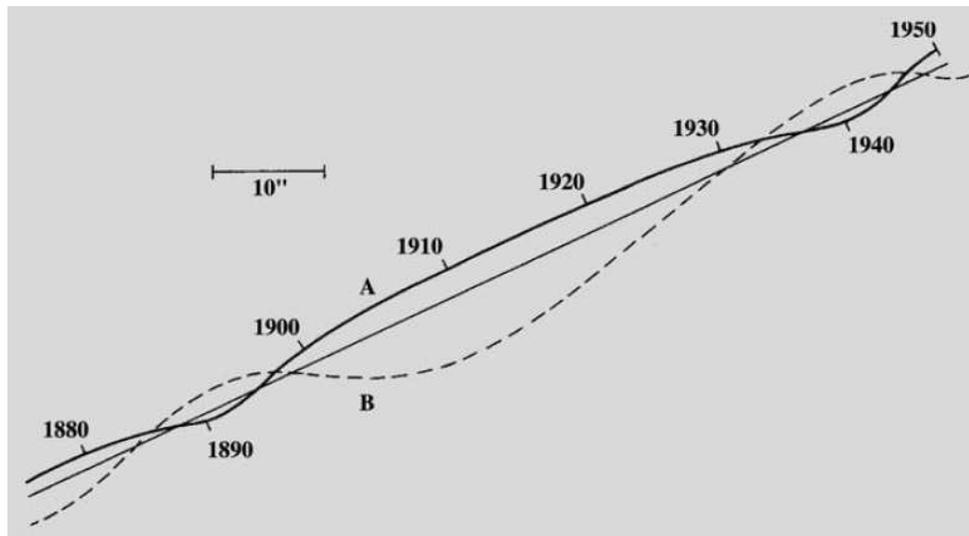


Figura 5.9: Il moto apparente di Sirio (α Canis Majoris) e della sua compagna nel cielo.

3. Si visto che dalle binarie spettroscopiche a eclisse si possono ricavare ulteriori proprietà, come il rapporto tra le temperature, tra le luminosità, il raggio delle stelle e quindi, dalla luminosità di corpo nero, la distanza. Si conoscono circa 4000 binarie a eclisse, ma purtroppo soltanto per il 10% di esse è stato possibile determinare le loro orbite e, di queste ultime, solo per una minima frazione è stato possibile determinare tutte le proprietà di interesse astrofisico.

5.6 Binarie astrometriche

Una binaria astrometrica è un sistema binario in cui soltanto una delle stelle componenti è visibile. La posizione della stella visibile presenta un'oscillazione dovuta all'influenza gravitazionale della sua compagna.

Un esempio di binaria astrometrica è Sirio (si veda Figura 5.9), composta dalle due stelle Sirio A e Sirio B. Sirio A mostra un periodo di 50 anni, noto sin dal 1844 dagli studi di Bessel. Solo nel 1862 l'astronomo inglese Alvan Clark scoprì Sirio B, che risultò essere una nana bianca (scoperta effettuata da Adams nel 1915).

5.7 Binarie X

Una binaria X è un sistema binario in cui almeno una delle due stelle emette nella banda dei raggi X. Verranno discusse in dettaglio nella Parte 2 del corso e quindi qui ci occuperemo solamente della parte astrometrica. Dato che il sistema emette in due bande, X e ottico, potremmo misurare due funzioni di massa

$$f_X(M) = \frac{M_o^3 \sin^3 i}{(M_X + M_o)^2} \quad (5.40a)$$

$$f_o(M) = \frac{M_X^3 \sin^3 i}{(M_X + M_o)^2} \quad (5.40b)$$

Dividendo membro a membro le Eqs. 5.40 possiamo ottenere una misura del rapporto delle masse

$$\left(\frac{M_o}{M_X}\right)^3 = \frac{f_X(M)}{f_o(M)} \quad (5.41)$$

Se indichiamo con $q \equiv M_X/M_o$ abbiamo che la funzione di massa X può essere scritta come

$$f_X(M) = \frac{M_X \sin^3 i}{q(1+q)^2} \quad (5.42)$$

da cui possiamo ricavarci

$$M_X = \frac{q(1+q)^2}{\sin^3 i} f_X(M) \quad (5.43)$$

Ovviamente rimane una dipendenza da $\sin i$ che deve essere ricavato in altri modi. Se la stella che emette in raggi X è un pulsatore è allora possibile risolvere il sistema binario. In questo caso si trova che, in media, la massa della stella X è

$$1,2 \leq \frac{M_X}{M_\odot} \leq 1,8 \quad (5.44)$$

5.8 Relazione Massa-Luminosità

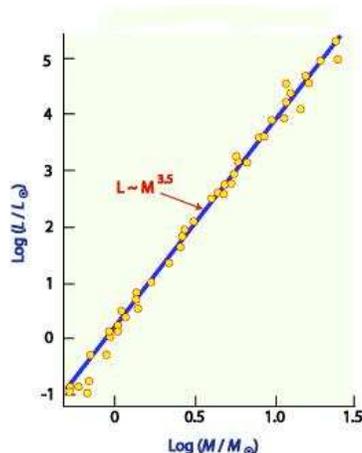


Figura 5.10: Relazione Massa-Luminosità.

Dalla stima della massa delle stelle binarie e dalla loro luminosità (per quelle con distanza nota si può determinare in diversi modi, ad esempio dalla misura della parallasse) si è potuto stabilire che esiste una relazione tra massa e luminosità delle stelle (si veda Figura 5.10). Oltre a cercare di capire l'origine di questa relazione in termini di principi fisici, è possibile sfruttarla per la stima della distanza d di stelle di massa nota, conoscendo la loro brillantezza. Infatti, conoscendo la massa, si può stimare la luminosità L e, sapendo che il flusso F è legato alla luminosità attraverso la relazione:

$$L = 4\pi d^2 F \quad (5.45)$$

si può ricavare

$$d = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (5.46)$$

Ovviamente la luminosità e il flusso devono essere riferiti alla stessa banda. Nel caso della relazione massa-luminosità si tratta di grandezze complessive, quindi anche per il flusso si deve considerare quello totale in arrivo dalla stella. In altri termini, bisogna fare riferimento alla magnitudine bolometrica.

Ovviamente dalla stessa equazione, se è nota la luminosità, si può ricavare la massa della stella. La relazione massa-luminosità è tale che

$$L \propto M^{3,5} \quad (5.47)$$

Si tenga presente che questa è valida nell'intervallo $1 M_{\odot} \leq M \leq 10 M_{\odot}$ mentre per $M < 1 M_{\odot}$ la relazione è meno prevalente.

5.9 Equazioni del moto in un sistema binario

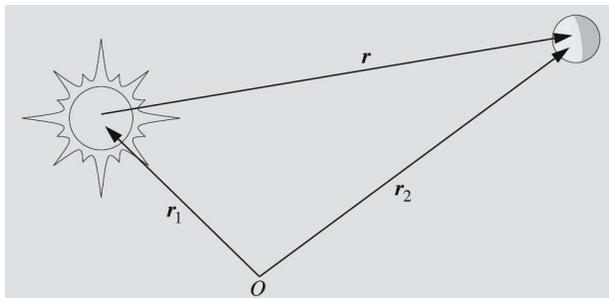


Figura 5.11: Definizione dei raggi vettori in un sistema binario.

Per determinare le equazioni del moto di un sistema composto da due corpi (di massa m_1 e m_2) in interazione gravitazionale (che chiameremo per comodità Sole e pianeta, ma che possono benissimo essere un pianeta ed una sua luna, o due stelle), consideriamo un sistema di riferimento inerziale centrato in O (si veda Figura 5.11). I raggi vettori dei due corpi saranno r_1 e r_2 , e quindi la posizione del pianeta rispetto al Sole sarà $r = r_2 - r_1$. Per la legge di gravitazione universale avremo che il pianeta subirà una forza F data da

$$\mathbf{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{-\mathbf{r}}{r} = -G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.48)$$

Dalla seconda legge della dinamica abbiamo che

$$\mathbf{F} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \quad (5.49)$$

e quindi, combinando Eq. 5.48 e 5.49, l'equazione del moto del pianeta sarà

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.50)$$

Dato che il Sole risente della stessa forza gravitazionale ma nella direzione opposta, avremo che

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = +Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.51)$$

Sottraendo Eq. 5.51 da Eq. 5.50 otteniamo

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.52)$$

dove abbiamo definito

$$\mu \equiv G(m_1 + m_2) \quad (5.53)$$

La soluzione di Eq. 5.52 ci fornisce l'orbita del pianeta relativa al Sole. Dato che in questa equazione viene coinvolto il raggio vettore e la sua derivata seconda rispetto al tempo, la soluzione dovrebbe fornirci $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Sfortunatamente, non è possibile esprimere il raggio vettore in funzione del tempo in termini di funzioni elementari. Quello che possiamo fare è di operare delle manipolazioni matematiche per determinare le proprietà della soluzione.

5.9.1 Soluzione dell'equazione del moto

Dato che l'equazione del moto è una equazione differenziale vettoriale del secondo ordine, saranno necessarie sei costanti di integrazione per la soluzione completa. La soluzione generale sarà una famiglia di orbite, mentre una soluzione particolare verrà definita una volta fissate le costanti di integrazione.

Il moto di un pianeta sarà quindi univocamente determinato una volta che verranno fissate la sua posizione e velocità ad un dato istante. Con questa scelta delle costanti di integrazione (che d'ora in avanti chiameremo *integrali*) non otteniamo però nessuna informazione riguardante la geometria dell'orbita. Un'altro insieme di integrali, che vedremo in seguito, ci forniscono invece queste informazioni: sono i cosiddetti *parametri orbitali*.

Iniziamo ora a cercare le cosiddette *costanti del moto*, cioè quantità che non cambiano al variare del tempo. La prima di queste è il momento angolare che, per definizione, è

$$\mathbf{L} = m_2 \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (5.54)$$

Se definiamo \mathbf{k} come il momento angolare per unità di massa, avremo che

$$\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (5.55)$$

la cui derivata rispetto al tempo vale

$$\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \quad (5.56)$$

Tenendo conto dell'equazione del moto Eq. 5.52 avremo che

$$\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{r} \times \left(-\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \left(-\frac{\mu}{r^3} \right) \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0 \quad (5.57)$$

Dato che il vettore momento angolare è, per definizione, perpendicolare al raggio vettore, ne segue che il moto del pianeta avviene su di un piano perpendicolare a \mathbf{k} .

Per trovare un'altra costante del moto calcoliamo il prodotto vettoriale

$$\mathbf{k} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \left(-\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = -\frac{\mu}{r^3} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}] \quad (5.58)$$

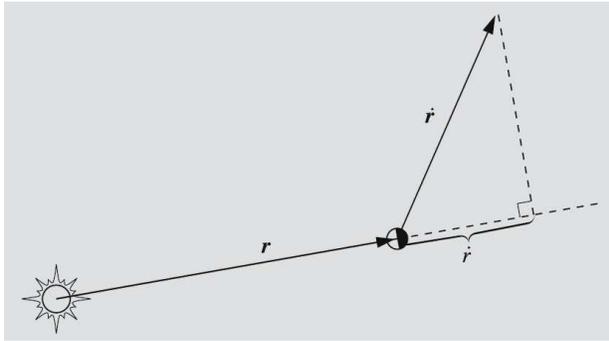


Figura 5.12: Velocità radiale e sua proiezione lungo r .

costante del moto, allora possiamo scrivere

$$\mathbf{k} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (5.61)$$

che, combinata con l'equazione precedente, diventa

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0 \quad (5.62)$$

e quindi

$$\left(\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \text{costante} = -\mu \mathbf{e} \quad (5.63)$$

Dato che \mathbf{k} è perpendicolare al piano orbitale, anche $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}$ deve giacere nello stesso piano. Dato che \mathbf{e} è una combinazione lineare di due vettori che giacciono sul piano orbitale, anche \mathbf{e} deve giacere sullo stesso piano.

Possiamo ricavarci una ulteriore costante del moto calcolando il prodotto $\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}$:

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \left(-\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = -\mu \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r^3} \right) = -\mu \left(\frac{r\dot{r}}{r^3} \right) = -\mu \left(\frac{\dot{r}}{r^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right) \quad (5.64)$$

Dato che

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) \quad (5.65)$$

combinandola con l'espressione precedente otteniamo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \quad (5.66)$$

che equivale a

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = \text{costante} = h \quad (5.67)$$

dove abbiamo definito v la velocità del pianeta rispetto al Sole. La costante h è chiamata *integrale di energia* e l'energia totale del pianeta è $m_2 h$. Nota importante: sia l'energia che il momento angolare **dipendono dal sistema di coordinate utilizzato!** Nel nostro caso abbiamo utilizzato un sistema eliocentrico, che è un sistema **accelerato**.

Le costanti del moto finora trovate sono tre: due vettoriali (\mathbf{k} ed \mathbf{e}) ed una scalare (h). Quindi abbiamo sette integrali del moto, cioè ne abbiamo uno di troppo! In realtà non tutte queste costanti sono indipendenti, infatti abbiamo che valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0 \quad (5.68)$$

$$\mu^2 (e^2 - 1) = 2hk^2 \quad (5.69)$$

dove e e k sono i moduli dei vettori \mathbf{e} e \mathbf{k} , rispettivamente. Eq. 5.68 deriva direttamente da Eq. 5.63. Per dimostrare Eq. 5.69 prendiamo il quadrato di entrambi i membri di Eq. 5.63:

$$\mu^2 e^2 = (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}) + 2(\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \frac{\mu \mathbf{r}}{r} + \mu^2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \quad (5.70)$$

Dato che \mathbf{k} è perpendicolare a $\dot{\mathbf{r}}$, avremo che $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} = kv$, quindi possiamo scrivere

$$\mu^2 e^2 = k^2 v^2 + 2 \frac{\mu}{r} (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) + \mu^2 \quad (5.71)$$

Nel termine vettoriale invertiamo il prodotto scalare con quello vettoriale e invertiamo (cambiando segno) l'ordine degli ultimi due fattori, in modo da scrivere

$$\mu^2 (e^2 - 1) = k^2 v^2 - 2 \frac{\mu}{r} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = k^2 v^2 - 2 \frac{\mu}{r} k^2 = 2k^2 \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \right) = 2k^2 h \quad (5.72)$$

che è proprio Eq. 5.69. Le due relazioni 5.68 e 5.69 riducono il numero di integrali del moto da sette a cinque, quindi abbiamo ancora bisogno di una costante di integrazione.

Le costanti del moto che abbiamo finora ricavato ci descrivono la forma, la dimensione e l'orientazione dell'orbita ma non ci dicono nulla sulla *posizione* del pianeta. Sarà quindi necessario fissare la posizione del pianeta ad un certo istante t_0 o, alternativamente, dare il tempo in cui esso si trova in una certa posizione. E' proprio quest'ultimo metodo che useremo per definire il sesto integrale: il momento del passaggio al perielio (o periastro nel caso non si parli del Sole ma di una stella qualsiasi) τ .

5.9.2 Equazione dell'orbita e prima legge di Keplero

Deriviamo ora l'equazione dell'orbita del pianeta attorno al Sole. Dato che e è un vettore costante che giace sul piano orbitale, lo usiamo come direzione di riferimento. Sia f l'angolo tra il raggio vettore r ed e . L'angolo f viene chiamato *anomalia vera*. Avremo quindi che

$$r \cdot e = r e \cos f \quad (5.73)$$

Se però usiamo la definizione di e data da Eq. 5.63 abbiamo che

$$\begin{aligned} r \cdot e &= -\frac{1}{\mu} \left(r \cdot k \times \dot{r} + \frac{\mu}{r} r \cdot r \right) \\ &= -\frac{1}{\mu} (k \cdot \dot{r} \times r + \mu r) = -\frac{1}{\mu} (-k^2 + \mu r) \\ &= \frac{k^2}{\mu} - r \end{aligned}$$

Se eguagliamo queste due ultime espressioni per $r \cdot e$ otteniamo

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e \cos f} \quad (5.74)$$

che è l'equazione, in coordinate polari, di una conica. Il modulo del vettore e definisce l'*eccentricità* della conica:

$$\begin{array}{ll} e = 0 & \text{circonferenza} \\ 0 < e < 1 & \text{ellisse} \\ e = 1 & \text{parabola} \\ e > 1 & \text{iperbole} \end{array}$$

Da Eq. 5.74 si vede come r raggiunga il minimo per $f = 0$ quindi nella direzione di e . Quindi e punta nella direzione del perielio. La prima legge di Keplero afferma che:

L'orbita di un pianeta è un'ellisse in cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

Da Eq. 5.74 possiamo vedere che, in generale, sono possibili altre tipi di orbite, come le paraboliche ed iperboliche.

5.9.3 I parametri orbitali

Gli integrali del moto che abbiamo ricavato precedentemente ci sono stati utili per risolvere l'equazione dell'orbita (studiare cioè la *dinamica* del moto orbitale). Per dare una descrizione *geometrica* dell'orbita è meglio utilizzare altre sei quantità che prendono il nome di *parametri orbitali*. Essi sono mostrati in Figura 5.13 e prendono il nome di

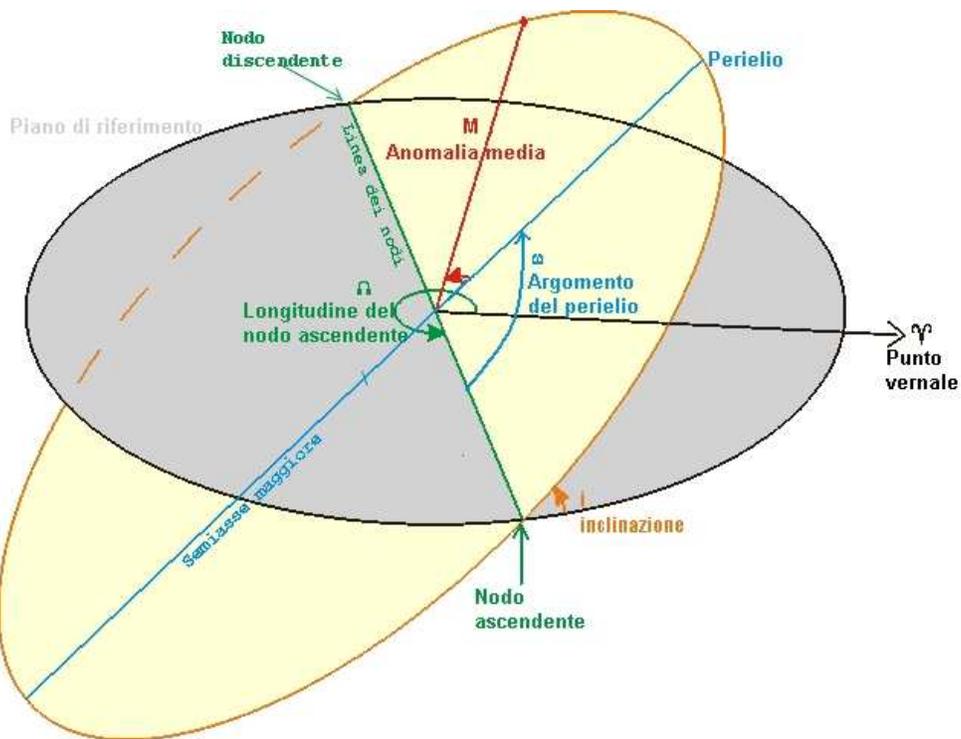


Figura 5.13: Definizione dei parametri orbitali.

- a semi-asse maggiore
- e eccentricità
- i inclinazione
- Ω longitudine del nodo ascendente
- ω argomento del perielio (periastro)
- τ tempo del passaggio al perielio (periastro)

Vediamo ora di mettere in relazione i parametri orbitali con le costanti del moto *dinamiche* che ci siamo ricavati precedentemente. L'eccentricità si ottiene facilmente come il modulo del vettore e . Dall'equazione dell'orbita 5.74 abbiamo che il *parametro* p dell'orbita (detto anche *semilatus rectum*) è $p = k^2/\mu$. Ma il parametro di una sezione conica è sempre $a|1 - e^2|$, quindi abbiamo che il semi-asse maggiore può essere scritto in funzione di e e k

$$a = \frac{k^2/\mu}{|1 - e^2|} \quad (5.75)$$

Utilizzando Eq. 5.69 possiamo ricavarci un'importante relazione tra il semi-asse maggiore a e l'integrale di energia h :

$$a = \begin{cases} -\mu/2h & \text{se l'orbita è un'ellisse} \\ \mu/2h & \text{se l'orbita è un'iperbole.} \end{cases} \quad (5.76)$$

Per un sistema legato (orbita ellittica) l'energia totale e l'integrale di energia sono negativi. Per un'orbita iperbolica h è positivo e quindi il corpo possiede una energia cinetica sufficiente per lasciare il sistema. Il caso di moto parabolico ($h = 0$) è il caso limite, anche se in realtà orbite paraboliche non esistono per la difficoltà di avere un integrale dell'energia esattamente nullo.

L'orientazione dell'orbita è determinata dalla direzione dei due vettori \mathbf{k} (perpendicolare al piano orbitale) ed \mathbf{e} (che punta verso il perielio). I tre angoli i , Ω ed ω forniscono la stessa informazione.

L'angolo di inclinazione i fornisce l'obliquità del piano orbitale rispetto ad un piano fisso di riferimento. Per corpi del sistema solare questo piano è l'eclittica. La longitudine del nodo ascendente Ω indica dove l'oggetto attraversa l'eclittica da Sud a Nord. È misurata in senso antiorario dal punto vernale Υ . Gli elementi orbitali i e Ω determinano insieme l'orientazione del piano orbitale e corrispondono alla direzione di \mathbf{k} .

L'argomento del perielio ω dà la direzione del perielio, misurata dal nodo ascendente nella direzione del moto. La stessa informazione è contenuta nella direzione di \mathbf{e} . Molto spesso, invece di usare ω si utilizza un altro angolo, detto *longitudine del perielio* ϖ (si pronuncia pi), definito come

$$\varpi = \Omega + \omega \quad (5.77)$$

Questo angolo è molto particolare, in quando è misurato in parte lungo l'eclittica ed in parte lungo il piano orbitale. Viene però utilizzato dato che è definito anche quando l'angolo di inclinazione è molto piccolo e quindi la direzione del nodo ascendente diventa indeterminata.

5.9.4 Seconda e terza legge di Keplero

Il raggio vettore \mathbf{r} di un pianeta in coordinate polari è

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r \quad (5.78)$$

dove $\hat{\mathbf{e}}_r$ è il versore nella direzione di \mathbf{r} (si veda Figura 5.14). Se il pianeta si muove con velocità angolare \dot{f} , la direzione di questo versore cambierà allo stesso tasso

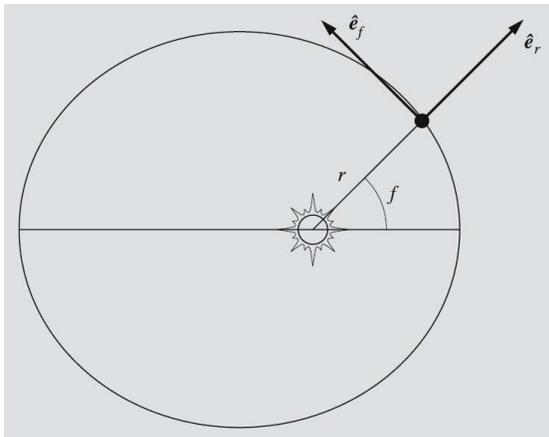
$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r = \dot{f} \hat{\mathbf{e}}_f \quad (5.79)$$

dove $\hat{\mathbf{e}}_f$ è il versore perpendicolare a $\hat{\mathbf{e}}_r$. Se vogliamo determinare la velocità del pianeta, usando Eq. 5.78 abbiamo

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\hat{\mathbf{e}}}_r = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{f} \hat{\mathbf{e}}_f \quad (5.80)$$

Utilizzando quest'ultima espressione, il momento angolare \mathbf{k} diventa

$$\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r^2 \dot{f} \hat{\mathbf{e}}_z \quad (5.81)$$



dove \hat{e}_z è il versore perpendicolare al piano orbitale. Il modulo di \mathbf{k} è

$$k = r^2 \dot{f} \quad (5.82)$$

La *velocità areolare* di un pianeta è definita come l'area che il raggio vettore spazzola nell'unità di tempo. In termini di r e dell'anomalia vera f essa sarà

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{f} \quad (5.83)$$

Tenendo conto di Eq. 5.82 abbiamo che

Figura 5.14: Definizione dei versori in un sistema di coordinate polari.

$$\dot{A} = \frac{1}{2} k \quad (5.84)$$

Dato che, come abbiamo visto, k è una costante del moto, lo sarà anche la velocità areolare \dot{A} . Abbiamo appena ottenuto la seconda legge di Keplero:

Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.

Dato che la distanza Sole-pianeta varia, deve variare anche la velocità. Dalla seconda legge di Keplero segue che un pianeta si muove più velocemente quando si trova più vicino al sole (perielio) e più lentamente quando si trova lontano (afelio). Eq. 5.84 può essere riscritta in forma differenziale

$$dA = \frac{1}{2} k dt \quad (5.85)$$

e integrata su di un periodo orbitale

$$\int_{\text{ellisse}} dA = \frac{1}{2} k \int_0^P dt \quad (5.86)$$

dove P è il periodo orbitale. Dato che l'area di un'ellisse è $\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$, dove a e b sono il semiasse maggiore e minore dell'ellisse, ed e la sua eccentricità, avremo che

$$\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2} k P \quad (5.87)$$

Da Eq. 5.69, tenendo conto del valore dell'integrale dell'energia (Eq. 5.76), otteniamo

$$k = \sqrt{G(m_1 + m_2)a(1 - e^2)} \quad (5.88)$$

Combinando queste due ultime equazioni otteniamo

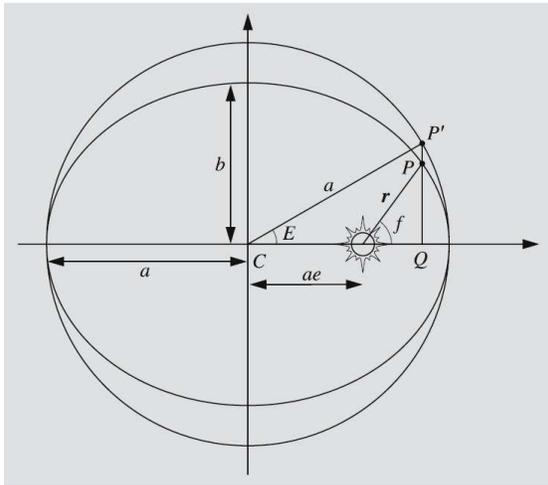


Figura 5.15: Definizione dell'anomalia eccentrica E .

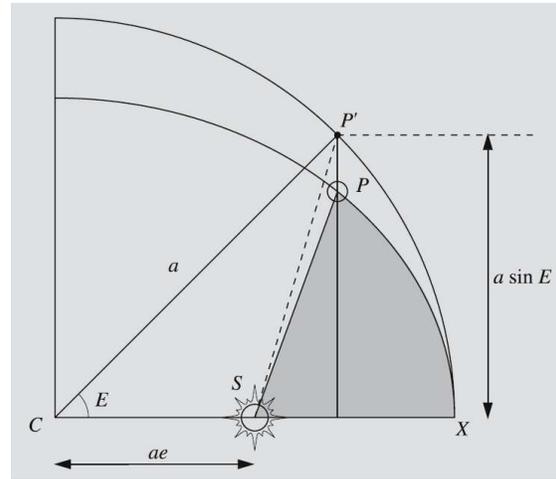


Figura 5.16: Geometria per determinare la relazione tra E ed r .

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \tag{5.89}$$

Questa è esattamente la forma della terza legge di Keplero

I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono direttamente proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite.

In questa forma la legge non è valida esattamente, anche per i pianeti del sistema solare, dato che la loro stessa massa influenza i loro periodi. L'errore che si compie ignorando questo effetto è comunque molto piccolo (si veda Appendice A per la storia, realmente sorprendente, sulla scoperta delle leggi di Keplero).

5.9.5 Posizione lungo l'orbita

Benché abbiamo determinato la geometria dell'orbita di un pianeta attorno al Sole, non siamo in grado di determinare la sua posizione ad un certo istante perché non conosciamo il raggio vettore r in funzione del tempo. La variabile nell'equazione dell'orbita 5.74 è un angolo, l'anomalia vera f , misurata dal perielio. Per passare da f ad r definiamo un nuovo angolo E , che chiameremo *anomalia eccentrica*, tale per cui

$$\mathbf{r} = a(\cos E - e) \hat{\mathbf{i}} + b \sin E \hat{\mathbf{j}} \tag{5.90}$$

dove $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ sono due versori paralleli ai due semiassi a e b dell'ellisse (si veda Figura 5.15). Molte formule del moto ellittico si semplificano se si utilizza l'anomalia eccentrica E . Ad esempio, abbiamo che

$$\begin{aligned}
 r^2 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \\
 &= a^2(\cos E - e)^2 + b^2 \sin^2 E \\
 &= a^2[(\cos E - e)^2 + (1 - e^2)(1 - \cos^2 E)] \\
 &= a^2[1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E]
 \end{aligned}$$

da cui

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (5.91)$$

Il nostro prossimo problema è quello di ricavarci E ad un certo istante del tempo. Per la seconda legge di Keplero la velocità areolare è costante. Quindi l'area più scura mostrata in Figura 5.16 è

$$A = \pi ab \frac{t - \tau}{P} \quad (5.92)$$

dove $t - \tau$ il tempo trascorso dal passaggio al periastrò, e P è il periodo orbitale. L'area di una parte di un'ellisse si può ottenere moltiplicando per b/a l'area corrispondente del cerchio circoscritto (in termini "matematici" un'ellisse è una trasformazione affine del cerchio). Quindi l'area SPX è

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{b}{a} (\text{area di } SP'X) \\
 &= \frac{b}{a} (\text{area del settore } CP'X - \text{area del triangolo } CP'S) \\
 &= \frac{b}{a} \left(\frac{1}{2} a \cdot a E - \frac{1}{2} a e \cdot a \sin E \right) \\
 &= \frac{1}{2} ab (E - e \sin E)
 \end{aligned}$$

Eguagliando queste due ultime espressioni di A otteniamo la *equazione di Keplero*

$$E - e \sin E = M \quad (5.93)$$

dove abbiamo definito

$$M \equiv \frac{2\pi}{P} (t - \tau) \quad (5.94)$$

l'*anomalia media* di un pianeta all'istante t . L'anomalia media aumenta ad un tasso costante nel tempo ed indica dove si troverebbe il pianeta se si muovesse lungo un'orbita circolare di raggio a . Ovviamente per orbite circolari i tre angoli f , E ed M coincidono.

Se conosciamo il periodo orbitale ed il tempo trascorso dal passaggio al perielio, possiamo usare Eq. 5.94 per calcolarci l'anomalia media. Nota M dobbiamo risolvere Eq. 5.93 per ottenere

l'anomalia eccentrica. Infine la distanza r viene data da Eq. 5.91. Dato che le componenti di r espresse in termini dell'anomalia vera sono $r \cos f$ e $r \sin f$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \cos f &= \frac{a(\cos E - e)}{r} = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \\ \sin f &= \frac{b \sin E}{r} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \end{aligned} \tag{5.95}$$

o equivalentemente

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \tag{5.96}$$

Una volta nota la posizione sul piano orbitale è possibile determinare, attraverso opportune trasformazioni di coordinate, la longitudine e latitudine eclittiche e, da queste, l'ascensione retta e la declinazione (per mezzo di Eq 2.2).

5.9.6 Soluzione dell'equazione di Keplero

L'equazione di Keplero (5.93) è una equazione trascendente e quindi non può essere invertita e risolta per E una volta dato M . Però, fin dalla sua scoperta, sono stati sviluppati molti algoritmi per la sua soluzione. Ad esempio possiamo espandere E in serie di potenze di e

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^n \tag{5.97}$$

dove i coefficienti a_n si possono ricavare dal teorema di inversione di Lagrange

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1} n!} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (n-2k)^{n-1} \sin[(n-2k)M]$$

La serie (5.97) diverge se $e > 0.6627434193\dots$ (*limite di Laplace*) e, per altri valori di e , converge come una serie geometrica di rapporto

$$r = \frac{e}{1 + \sqrt{1 + e^2}} \exp\left(\sqrt{1 + e^2}\right)$$

Un'altra soluzione per E è in termini di una serie di funzioni di Bessel di prima specie²

²Le funzioni di Bessel di ordine n sono definite come le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad n \geq 0$$

Le funzioni di Bessel di prima specie sono definite come

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-n}}{k! \Gamma(k+1-n)}$$

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(ne) \sin(nM) \quad (5.98)$$

che converge per ogni $e < 1$ come una serie geometrica di rapporto

$$r = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \exp\left(\sqrt{1 - e^2}\right)$$

5.9.7 La posizione di Venere il 11/01/1981

In questa sezione vogliamo mostrare in dettaglio i calcoli necessari per determinare la posizione di un pianeta (Venere) ad un certo istante quando siano noti i parametri orbitali. Il punto di partenza è quindi recuperare questi dati dagli almanacchi (abbiamo preso questo esempio dal libro di Antonio Leone *“Il moto dei corpi celesti”*, Muzzio Editore, 1982):

$$\begin{aligned} \text{Posizione il 01/01/1970 12:00 UT} & \quad 265^\circ 25' = 265,416666 \\ \text{Moto angolare medio (°/giorno)} & \quad 1^\circ 36' 7'',670 = 1,6021305 \end{aligned}$$

Da questi valori possiamo calcolarci l'anomalia media M all'epoca richiesta (11/01/1981)

$$M = 265,416666 + [(11 \times 365) + 14 - 0.5] \times 1,6021305 = 239,5993$$

dove il termine tra parentesi quadre è il numero di giorni tra il 01/01/1970 e la data richiesta 11/01/1981. Dobbiamo ora calcolarci l'anomalia eccentrica E usando l'equazione di Keplero (5.93)

$$239,5993 = E - 0,00679 \sin E$$

dove abbiamo utilizzato il valore dell'eccentricità dell'orbita di Venere. Per risolvere l'equazione utilizzeremo il metodo di Bessel, ferdandoci ad $n = 2$. Quindi

$$E = 239,5993 + \frac{2}{1} J_1(0,00679) \sin(239,5993) + \frac{2}{2} J_2(0,01358) \sin(119,1986)$$

Per calcolare le funzioni di Bessel useremo il loro sviluppo in serie ferdandoci al primo termine

$$J_1(0,00679) = \frac{0,00679}{2} \left(1 - \frac{4,61041 \times 10^{-5}}{8} \right) = 0,00339498$$

$$J_2(0,01358) = \frac{(2 \cdot 0,01358)^2}{2^2 \cdot 2} \left(1 - \frac{(2 \cdot 0,01358)^2}{2 \cdot 6} \right) = 0,0000230$$

con $J_{-n} = (-1)^n J_n$ e $\Gamma(n)$ la funzione Gamma. In particolare, per $n = 0, 1$ abbiamo che

$$J_0 = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad J_1 = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots$$

Abbiamo quindi che l'anomalia eccentrica E vale

$$E = 239^{\circ},5993 + 2 \cdot 0,00339498 \cdot (-0,8625074) + 0,0000230 \cdot 0.436467 = 239^{\circ},59346$$

Possiamo verificare che la soluzione trovata sia quella giusta sostituendola nell'equazione di Keplero

$$239^{\circ},5993 = 239^{\circ},59346 - 0.00679 \sin(239^{\circ},59346) = 239^{\circ},59931$$

che risulta quindi essere verificata a meno di 1×10^{-5} gradi. Dobbiamo ora calcolarci l'anomalia vera f partendo da Eq. 5.96. Quindi

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+0.00679}{1-0.00679}} \tan \frac{239^{\circ},59346}{2}$$

da cui otteniamo che

$$f = 2 \arctan[1,0068131 \cdot (-1,7463296)] = -120^{\circ},74149$$

e quindi

$$f = -120^{\circ},74149 + 360^{\circ} = 239^{\circ},25851$$

Se vogliamo metterci nel sistema di coordinate dell'eclittica (vogliamo cioè *ridurci* all'eclittica), sapendo che l'orbita di Venere è inclinata di un angolo $\cos i = 0,9982$, dobbiamo prima calcolare la longitudine del nodo ascendente Ω aggiornata alla data del 11/01/1981

$$\Omega = 76^{\circ} 25' + \left(11 + \frac{11}{365}\right) \times \frac{0',5}{60} = 76^{\circ},508584$$

e quindi, dato che per la latitudine eclittica β vale la

$$\sin \beta = \sin i \sin(f - \Omega)$$

otteniamo

$$\beta = \arcsin[\sin(3^{\circ},4) \sin(239^{\circ},25851 - 76^{\circ},508584)] = 1^{\circ},007701$$

La longitudine galattica λ è legata a $f - \Omega$ dalla relazione

$$\frac{\lambda - \Omega}{f - \Omega} = \cos i$$

da cui possiamo ricavare

$$\lambda = 238^{\circ},96555$$

Quelle che abbiamo ottenuto sono le coordinate di Venere rispetto al Sole, ma noi vogliamo le coordinate di Venere rispetto alla Terra. Sarà quindi necessario calcolarci le coordinate eclittiche

del Sole ed operare una traslazione del sistema di coordinate che aveva origine nel Sole fino a portare l'origine nel centro della Terra.

Dovremo ora calcolare in maniera del tutto analoga le coordinate eclittiche della Terra al 11/01/1981, tenendo conto che dalle tabelle abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Posizione il 01/01/1970 12:00 UT} & \quad 99^\circ 45' = 99,75 \\ \text{Moto angolare medio (°/giorno)} & \quad 59' 8'',193 = 0,9856091 \end{aligned}$$

Lascio per esercizio il verificare che le coordinate eclittiche eliocentriche della Terra il 11/01/1981 alle ore 00 TU sono

$$\lambda = 111,17216 \quad \beta = 0^\circ$$

Utilizzando il valore dell'inclinazione dell'eclittica aggiornato al 11/01/1981, cioè $\varepsilon = 23,441755$, nelle Eq. 2.2 ed effettuando una traslazione degli assi otteniamo

$$\begin{aligned} \alpha & = 17^{\text{h}} 57^{\text{m}} 1,0548 \\ \delta & = -22^\circ 57' 54'',5688 \end{aligned}$$

con una precisione al minuto d'arco.

5.9.8 La velocità di fuga

Se un oggetto possiede una velocità sufficiente, questa può consentirgli di superare il campo gravitazionale del corpo centrale. Questo avviene se il corpo riesce a raggiungere una distanza infinita con velocità finale nulla. Per la legge di conservazione dell'energia avremo che l'integrale di energia h sarà nullo, e quindi

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{R} = 0 \quad (5.99)$$

dove R è la distanza iniziale a cui l'oggetto si sta muovendo con velocità v . Quindi la *velocità di fuga* sarà

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{R}} = \sqrt{\frac{2G(m_1 + m_2)}{R}} \quad (5.100)$$

Per esempio, sulla superficie della Terra v_e è circa 11 Km/s (se $m_2 \ll m_1$).

Parte II

Astrofisica delle Alte Energie

Capitolo 6

Accrescimento come Sorgente di Energia

6.1 Fonti di energia per sorgenti cosmiche di raggi X

Per i fisici del 19° secolo l'unica fonte di energia in grado di spiegare l'emissione da sorgenti cosmiche era la gravità. Fu lo stesso Lord Kelvin a ricavare un tempo scale di durata della vita del nostro Sole assumendo che la sua luminosità L_{\odot} venga prodotta da contrazione gravitazionale: $\tau_{\text{KH}} = GM_{\odot}^2/R_{\odot}L_{\odot} \simeq 3 \cdot 10^7$ anni. Già allora questo valore era troppo piccolo rispetto all'età della stessa Terra. Nel 20° secolo, con la scoperta delle reazioni nucleari, la fonte di energia del nostro Sole è stata identificata con la reazione nucleare di fusione di quattro atomi di Idrogeno in un atomo di Elio ($4\text{H}_1^1 \rightarrow \text{He}_2^4 + 2e^+ + 2\nu_e + n\gamma$). Questa reazione avviene inoltre al ritmo "giusto", producendo il giusto equilibrio tra forze di radiazione e forze gravitazionali.

Con lo sviluppo di tecniche di rivelazione in altre bande dello spettro elettromagnetico, dal radio ai raggi X e γ , ci si è resi conto sia dell'esistenza di oggetti compatti (previsti teoricamente), sia che la gravità ricopre un ruolo fondamentale per la produzione di radiazione ad alta energia.

In particolare, l'*accrescimento* di materia, cioè la conversione dell'energia cinetica della materia che viene accresciuta in radiazione elettromagnetica, è stato riconosciuto come il motore principale in grado di spiegare l'emissione per sistemi contenenti oggetti compatti.

Possiamo dare una stima, per ordine di grandezza, dell'energia prodotta per unità di massa nel caso in cui la fonte sia energia gravitazionale

$$\frac{\Delta E_{\text{acc}}}{m} = G \left(\frac{M_*}{R_*} \right) \simeq \begin{cases} 10^{20} \text{ erg g}^{-1} & \text{SN} \\ 10^{17} \text{ erg g}^{-1} & \text{NB} \end{cases} \quad (6.1)$$

Se l'oggetto che accresce è una stella di neutroni (SN), allora $M_* \sim 1M_{\odot}$ e $R_* \sim 10 \text{ Km}$; per una nana bianca (NB) avremo invece $M_* \sim 1M_{\odot}$ e $R_* \sim 10^9 \text{ cm}$.

Per confronto, l'energia prodotta per unità di massa per fusione nucleare ($4\text{H}_1^1 \rightarrow \text{He}_2^4$) è:

$$\frac{\Delta E_{\text{nuc}}}{m} = 0.007 c^2 \simeq 6 \cdot 10^{18} \text{ erg g}^{-1} \quad (6.2)$$

Come vediamo, l'efficienza del processo di accrescimento è funzione del *parametro di compattezza* M/R .

6.2 Il limite di Eddington

Per un dato valore del parametro di compattezza, la luminosità di un sistema la cui fonte principale è l'accrescimento di massa dipenderà dal tasso di accrescimento \dot{M} . Per alte luminosità lo stesso tasso di accrescimento potrebbe essere controllato dal momento della quantità di moto (da ora in poi momento) trasferito dalla radiazione alla materia che accresce attraverso processi di scattering e assorbimento. Questo può dar luogo ad una luminosità limite.

Si consideri il caso di accrescimento **stazionario** ed a **simmetria sferica**. Assumiamo inoltre che la materia in accrescimento **sia composta principalmente da Idrogeno e sia completamente ionizzata**. Lo scattering Thomson dei fotoni¹ avverrà principalmente sugli elettroni, dato che

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \simeq 6.7 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

dove $r_0 = e^2/mc^2 \sim 2.8 \cdot 10^{-13}$ cm per un elettrone, misura la "dimensione" di una carica puntiforme assumendo che tutta l'energia a riposo sia di origine elettromagnetica.

Se indichiamo con S il flusso di energia (in unità di $\text{erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$) allora la forza dovuta alla radiazione sarà data da

$$F_{\text{rad}} = \sigma_T \frac{S}{c}$$

La forza elettrostatica di Coulomb tra elettroni e protoni fa sì che mentre la radiazione spinge gli elettroni, questi ultimi si *trascinano* con loro anche i protoni. La forza di gravità agisce quindi sul sistema elettrone-protoni con forza

$$F_{\text{grav}} = G \frac{M(m_p + m_e)}{r^2} \simeq G \frac{Mm_p}{r^2}$$

Se la luminosità (in unità di erg sec^{-1}) è L allora il flusso di energia sarà $S = L/4\pi r^2$, avendo assunto simmetria sferica. Quindi una coppia elettrone-protoni sarà soggetta alla forza

$$F_{\text{tot}} = F_{\text{grav}} - F_{\text{rad}} = \left(GMm_p - \frac{\sigma_T L}{4\pi c} \right) \frac{1}{r^2}$$

La luminosità limite, detta luminosità di Eddington, si ottiene quando

$$L_{\text{Edd}} = 4\pi c \frac{GMm_p}{\sigma_T} \simeq 1.3 \cdot 10^{38} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ erg sec}^{-1} \quad (6.3)$$

Per $L \gg L_{\text{Edd}}$ la pressione di radiazione è maggiore della forza gravitazionale e quindi l'accrescimento viene interrotto.

Nel caso di accrescimento *non simmetrico*, se questo avviene su una frazione f della superficie della stella, allora il limite sarà fL_{Edd} .

¹Quando radiazione investe una particella carica, questa verrà accelerata e quindi emetterà radiazione a sua volta, con la stessa frequenza della radiazione incidente nel caso non relativistico

Per processi *non stazionari* (vedi esplosioni di supernova) L_{Edd} può essere superata di molti ordini di grandezza.

Il limite di Eddington implica un limite sul tasso di accrescimento **stazionario**

$$L_{\text{acc}} = G \frac{M\dot{M}}{R_*} \simeq \begin{cases} 1.3 \cdot 10^{36} \dot{M}_{16}(M/M_{\odot})(10 \text{ Km}/R_*) & \text{erg sec}^{-1} \\ 1.3 \cdot 10^{33} \dot{M}_{16}(M/M_{\odot})(10^9 \text{ cm}/R_*) & \text{erg sec}^{-1} \end{cases} \quad (6.4)$$

quindi

$$\dot{M}_{16}|_{\text{sta}} \leq \begin{cases} 10^2 & \text{Stella Neutroni} \\ 10^5 & \text{Nana Bianca} \end{cases}$$

Nel caso di un buco nero si preferisce parametrizzare la luminosità di accrescimento in termini dell'efficienza η di conversione dell'energia a riposo per unità di massa in radiazione

$$\begin{aligned} L_{\text{acc}} &= \eta \dot{M} c^2 \\ &= 2\eta G \frac{M\dot{M}}{R_*} \end{aligned} \quad (6.5)$$

dove abbiamo usato $R_* = 2GM/c^2$ come “raggio” di un buco nero. Come abbiamo visto, per la reazione di fusione nucleare $4\text{H}_1^1 \rightarrow \text{He}_2^4$ abbiamo $\eta = 0.007$. Da osservazioni di AGN si stima che per un buco nero $\eta \simeq 0.1$, dello stesso ordine di grandezza (~ 0.15) di quella stimata per una stella di neutroni, nonostante il parametro di compattezza sia alquanto diverso.

6.3 Lo spettro di emissione

Diamo ora alcune stime, per ordine di grandezza, dello spettro di emissione che ci aspettiamo da un oggetto compatto in accrescimento di massa e vediamo se è possibile ricavare informazioni sul tipo di oggetto compatto dalla rivelazione del suo spettro. Definiamo innanzi tutto tre temperature

$$T_{\text{rad}} = \frac{h\bar{\nu}}{k} \Leftarrow kT_{\text{rad}} = h\bar{\nu} \quad (6.6a)$$

$$T_{\text{b}} = \left(\frac{L_{\text{acc}}}{4\pi R_*^2 \sigma} \right)^{1/4} \Leftarrow \frac{L_{\text{acc}}}{4\pi R_*^2} = \sigma T_{\text{b}}^4 \quad (6.6b)$$

$$T_{\text{th}} = \frac{GMm_{\text{p}}}{3kR_*} \Leftarrow G \frac{M(m_{\text{e}} + m_{\text{p}})}{R_*} = 2 \times \frac{3}{2} kT_{\text{th}} \quad (6.6c)$$

Nel caso di un mezzo *otticamente spesso* la radiazione raggiunge l'equilibrio termico con la materia che accresce **prima** che questa raggiunga l'osservatore, e quindi $T_{\text{rad}} \simeq T_{\text{b}}$.

Nel caso di un mezzo *otticamente sottile* l'energia di accrescimento è convertita direttamente in energia elettromagnetica e raggiunge l'osservatore, quindi $T_{\text{rad}} \simeq T_{\text{th}}$.

Dato che un sistema non può irradiare ad una temperatura minore di T_{b} , avremo che

$$T_b \leq T_{\text{rad}} \leq T_{\text{th}}$$

valida se possiamo caratterizzare il sistema con una unica temperatura. Dalla definizione abbiamo che l'intervallo di emissione aspettato per una stella di neutroni ed una nana bianca è

$$\begin{array}{l} 1 \text{ keV} \leq h\bar{\nu} \leq 50 \text{ MeV} \quad \text{Stella Neutroni} \\ 6 \text{ eV} \leq h\bar{\nu} \leq 100 \text{ keV} \quad \text{Nana Bianca} \end{array}$$

Capitolo 7

Elementi di Dinamica dei Gas

7.1 Dinamica dei gas

Tutta la materia che viene accresciuta si trova nello stato di gas, cioè le sue particelle (elettroni liberi più varie specie di ioni) interagiscono direttamente **solamente per collisioni**, invece che attraverso forze a “corto raggio”.

Una particella percorrerà una certa distanza, detta *libero cammino medio* λ , prima di cambiare il suo stato a causa di una collisione con un'altra particella. Se il gas è sufficientemente uniforme su lunghezze-scala dell'ordine alcune volte il libero cammino medio, l'effetto delle collisioni sarà quello di rendere casuali (“randomizzare”) le velocità delle particelle attorno ad una velocità media, che chiameremo velocità del gas v .

Se ci poniamo nel sistema di riferimento che si muove a velocità v , le particelle avranno una distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann e possono essere descritte da una temperatura T . Se siamo interessati a lunghezze-scala $l \gg \lambda$, possiamo considerare il gas come un **fluido**, caratterizzato da una velocità v , temperatura T e densità ρ in ogni punto.

Possiamo quindi studiare il comportamento di queste variabili in funzione della posizione e del tempo imponendo le leggi di conservazione della massa, del momento e dell'energia. Questo è il dominio di studio della dinamica dei gas.

Se vogliamo tenere in conto le interazioni tra particelle, allora dobbiamo considerare la fisica dei plasmi (o meglio la teoria cinetica dei plasmi).

Se dalla risoluzione delle equazioni troviamo che si hanno grandi variazioni dei parametri su lunghezze scala comparabili con il libero cammino medio delle particelle, allora l'approssimazione a fluido non è più valida e dobbiamo utilizzare la teoria cinetica dei plasmi.

7.2 Le equazioni della dinamica dei gas

Ricaviamoci ora le equazioni che governano la dinamica di un gas partendo dalle tre leggi di conservazione. Avremo inoltre bisogno, per descrivere completamente il flusso del gas, di una equazione di stato e di una appropriata scelta delle condizioni al contorno.

□ Conservazione della massa (equazione di continuità)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (7.1)$$

□ Equazione di stato

A causa del moto termico delle sue particelle, il gas è caratterizzato da una pressione P in ogni punto. L'equazione di stato mette in relazione questa pressione con la densità e la temperatura del gas. I gas "astrofisici" obbediscono alla legge dei gas perfetti

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \quad (7.2)$$

dove $m_H \simeq m_p$ è la massa dell'atomo di Idrogeno e μ è il peso molecolare medio, che è la massa media, per particella di gas, misurata in unità di m_H . Quindi $\mu = 1$ per l'Idrogeno neutro, $1/2$ per Idrogeno ionizzato, e qualcosa nel mezzo per una miscela di gas con abbondanze cosmiche, dipendente dal grado di ionizzazione.

□ Conservazione del momento

Gradienti nella pressione del gas implicano forze, dato che del momento viene trasferito. Indichiamo con \mathbf{f} la densità (forza per unità di volume) di ogni altro tipo di forze agenti sul sistema e non dovute a gradienti di pressione. La conservazione del momento (detta anche **equazione di Eulero**) ha allora la forma

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f} \quad (7.3)$$

Il termine $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ rappresenta la conservazione del momento attraverso il fluido a causa del gradiente di velocità. La presenza di questo termine significa che sono possibili moti stazionari anche nel caso in cui $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ ma $\mathbf{v} \neq 0$.

Un esempio di forza esterna è la gravità: $\mathbf{f} = -\rho \mathbf{g}$. Un altro esempio è la forza dovuta ad un campo magnetico esterno.

Un altro esempio importante di forza esterna è la viscosità, che è il trasferimento di momento lungo gradienti di velocità a causa di moti turbolenti o moti termici.

□ Conservazione dell'energia

Un elemento di gas possiede due forme di energia: energia cinetica (per unità di volume) $\frac{1}{2} \rho v^2$ ed energia interna (termica) $\rho \varepsilon$, dove ε , l'energia interna per unità di massa, dipende dalla temperatura del gas. Per il teorema di equipartizione dell'energia, ad ogni grado di libertà della particella del gas è assegnata una energia media $\frac{1}{2} k T$. Per un gas monoatomico, gli unici gradi di libertà sono i tre traslazionali, e quindi

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu m_H} \quad (7.4)$$

Se il gas è formato da molecole, vi saranno ulteriori gradi di libertà dovuti alla rotazione e vibrazione molecolari.

L'equazione di conservazione dell'energia ha dunque la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon + P \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (7.5)$$

Il membro a sinistra ci ricorda l'equazione di continuità, con $(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon)$ la quantità conservata. Il termine contenente P rappresenta il lavoro dovuto alla pressione.

Nel membro di destra compaiono due nuove quantità: il vettore flusso radiativo \mathbf{F}_{rad} ed il vettore flusso di calore per conduzione \mathbf{q} .

Per definire queste quantità è necessario introdurre il concetto di trasporto radiativo e trovare le equazioni che lo governano.

7.3 Trasporto radiativo: Introduzione

Per definire il flusso radiativo introduciamo la grandezza fisica che ne è alla base, la *intensità specifica* I_ν , la quale fornisce il flusso di energia dE per unità di tempo, per unità di area, per unità di angolo solido, per unità di frequenza in una direzione \mathbf{n} nel punto \mathbf{r} che attraversa l'unità di area perpendicolare a \mathbf{n} al tempo t . Quindi (si veda Figura 7.1)

$$dE = I_\nu dA \cos \theta d\nu d\Omega dt$$

Integrando sull'angolo solido si ottiene il flusso specifico F_ν , cioè il tasso netto a cui l'energia attraversa l'unità di area indipendentemente dalla posizione

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\Omega$$

Si noti che se I_ν è un campo di radiazione isotropo (cioè indipendente dall'angolo θ), allora il flusso specifico è zero, dato che $\int \cos \theta d\Omega = 0$. In altre parole, tanta energia attraverso l'unità di area dA nella direzione \mathbf{n} così come nella direzione $-\mathbf{n}$.

Il flusso specifico integrato su di una area che racchiude la sorgente ci fornisce la luminosità specifica

$$L_\nu = \int F_\nu dA$$

Integrando in frequenza si ottengono il flusso e la luminosità. Quindi, ritornando alla nostra equazione di conservazione dell'energia (7.5)

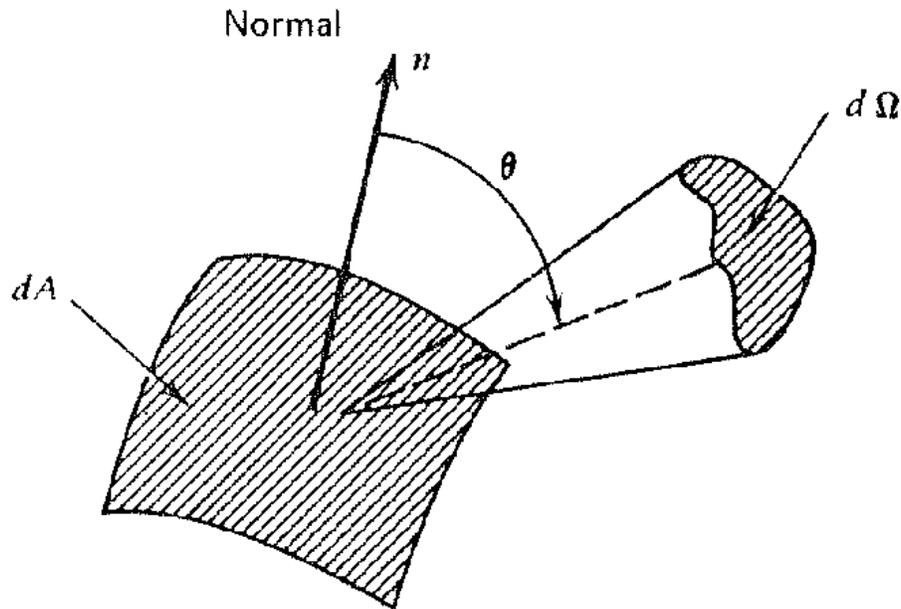


Figura 7.1: Geometria per raggi incidenti formanti un angolo θ con la normale \mathbf{n} all'unità di area dA .

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \int dV \int d\Omega \mathbf{n} I_{\nu}(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \quad (7.6)$$

Il termine $-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}}$ ci fornisce il tasso a cui l'energia viene emessa (energia negativa) o assorbita (energia positiva) per unità di volume del gas.

La intensità specifica I_{ν} è governata da una ulteriore equazione, che altro non è che la conservazione dell'energia per il campo radiativo, e prende il nome di **equazione del trasporto radiativo**.

La equazione del trasporto radiativo, nel caso **indipendente** dal tempo, può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla I_{\nu} &= -\mu_{\nu} I_{\nu} + j_{\nu} \\ &= -\kappa_{\nu} \rho I_{\nu} + j_{\nu} \end{aligned} \quad (7.7)$$

dove μ_{ν} è il coefficiente di assorbimento, j_{ν} il coefficiente di emissione (energia emessa per unità di tempo, per unità di angolo solido, per unità di volume in direzione \mathbf{n}), ed abbiamo introdotto la quantità κ_{ν} , detta opacità specifica e definita come $\mu_{\nu} = \kappa_{\nu} \rho$. Questi coefficienti dipendono dal tipo di processi che avvengono nel mezzo, che a loro volta dipendono dal campo di radiazione. Se introduciamo la funzione sorgente $S_{\nu} \equiv j_{\nu} / \mu_{\nu}$, e la profondità ottica τ_{ν} lungo un cammino $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ dalla sorgente all'osservatore

$$d\tau_{\nu} = \mu_{\nu} ds \quad (7.8)$$

allora possiamo riscrivere l'equazione del trasporto

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (7.9)$$

Se il *campo di radiazione* corrisponde ad uno stato di equilibrio termico ad una data temperatura T , allora sappiamo che $I_\nu = B_\nu(T)$, la funzione di Planck (corpo nero). Dato che I_ν non dipende dalla posizione (e quindi dalla profondità ottica), allora il membro di destra è nullo e quindi

$$S_\nu = I_\nu = B_\nu(T) \equiv \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (7.10)$$

indipendentemente dal meccanismo di radiazione.

Se il *mezzo* può essere caratterizzato da una temperatura T (cioè l'emissione è termica), allora

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\mu_\nu} = B_\nu(T) \quad (7.11)$$

che non è altro che la legge di Kirchhoff.

Se gli stati della materia che contribuiscono all'emissione ed all'assorbimento sono popolati con una distribuzione di Boltzmann (cioè $N(E) \propto \exp(-E/kT)$) ad una certa temperatura T , ma il campo di radiazione **non** è in equilibrio con la materia, allora il mezzo è detto trovarsi in uno stato di *equilibrio termodinamico locale*.

Una condizione necessaria affinché lo spettro emesso sia termico è che la profondità ottica $\tau_\nu \rightarrow \infty$. In questo caso diciamo che il mezzo è *otticamente spesso*. Per contro, in un mezzo otticamente spesso $I_\nu = S_\nu$ (ma non B_ν , a meno che non siamo in equilibrio termodinamico locale).

All'altro estremo, se $\tau_\nu \rightarrow 0$ possiamo trascurare l'assorbimento nell'equazione del trasporto radiativo e quindi Equazione 7.7 si riduce a

$$I_\nu = \int j_\nu ds \quad (7.12)$$

Un tale mezzo è detto *otticamente sottile*.

Infine, se $S_\nu = 0$, abbiamo un mezzo puramente assorbente. L'equazione del trasporto (7.9) diventa quindi

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu \quad \implies \quad I_\nu = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) \quad (7.13)$$

Nel caso di una stella, o ogni altro mezzo otticamente spesso, lo stato della materia può essere caratterizzato localmente da una temperatura T che varia lentamente con la posizione (cioè abbiamo un equilibrio termico localmente, un caso speciale di equilibrio termodinamico locale). In questa approssimazione, l'equazione del trasporto è equivalente a

$$F_\nu = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu\rho} \frac{dB_\nu(T)}{dr} \quad (7.14)$$

che se viene integrata in frequenza diventa

$$F = -\frac{c}{3\kappa_R\rho} \frac{d}{dr}(aT^4) \quad (7.15)$$

dove κ_R è la *opacità media di Rosseland*, definita come

$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{\int \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}$$

ed abbiamo usato la relazione $\int B_\nu d\nu = (ac/4\pi)T^4 \equiv (\sigma/\pi)T^4$.

Ritorniamo ora alla nostra equazione di conservazione dell'energia (7.5), ed in particolare alla discussione sul termine $-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}}$. Nel caso di un mezzo otticamente sottile (radiazione può uscire dal mezzo senza interazioni) abbiamo visto che

$$-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} = -4\pi \int j_\nu d\nu$$

Nel caso di un mezzo otticamente spesso, allora \mathbf{F}_{rad} è data dalla approssimazione di Rosseland (7.15)

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{16\sigma}{3\kappa_R\rho} T^3 \nabla T$$

La seconda nuova quantità introdotta nell'equazione di conservazione dell'energia è il flusso di calore dovuto a conduzione \mathbf{q} . Questo misura il tasso a cui moti disordinati (principalmente dovuti ad elettroni) trasportano energia termica nel gas, e quindi riducono le differenze di temperatura (termalizzano).

Il sistema di equazioni di conservazione, più l'equazione di stato, l'equazione del trasporto, e una descrizione delle quantità \mathbf{f} e \mathbf{q} permettono, in linea di principio, una descrizione completa del comportamento del gas date opportune condizioni al contorno.

Ovviamente, tutte le soluzioni conosciute corrispondono a casi particolari o soluzioni approssimate. Quello che tratteremo ora sono alcune semplici casi in cui la soluzione può dare utili informazioni per casi più complessi.

7.4 Flussi stazionari adiabatici ed isotermici

Prima di tutto consideriamo un flusso *stazionario*, per cui tutte le derivate rispetto al tempo siano nulle. Assumiamo poi che non vi siano perdite di energia attraverso radiazione ($\mathbf{F}_{\text{rad}} = 0$) e non vi sia conduzione termica ($\mathbf{q} = 0$) in Eq. 7.5.

Le nostre tre leggi di conservazione della massa, momento ed energia diventano

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (7.16a)$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f} \quad (7.16b)$$

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon + P \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (7.16c)$$

Sostituendo la prima equazione nella terza otteniamo

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon + \frac{P}{\rho} \right) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (7.17)$$

Moltiplicando scalarmente Eq. 7.16b per \mathbf{v} otteniamo

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla P = \rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla P$$

Quindi, eliminando $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ dalla Eq. 7.17 otteniamo

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla (\varepsilon + P/\rho) = \mathbf{v} \cdot \nabla P$$

ed espandendo $\nabla(P/\rho)$ e fattorizzando

$$\mathbf{v} \cdot [\nabla \varepsilon + P \nabla(1/\rho)] = 0$$

Questa relazione implica, dalla definizione dell'operatore gradiente, che se viaggiamo lungo una linea di flusso di gas, cioè seguiamo la velocità \mathbf{v} , per gli incrementi $d\varepsilon$ e $d(1/\rho)$ in ε e $1/\rho$ deve valere la relazione

$$d\varepsilon + P d(1/\rho) = 0$$

Ma dalla definizione di ε (7.4) e dalla legge dei gas perfetti (7.2) questo equivale a

$$\frac{3}{2} dT + \rho T d \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0$$

che ha come soluzione

$$\rho^{-1} T^{3/2} = \text{costante}$$

che può essere scritta in termini della pressione (usando l'equazione di stato (7.2)) come

$$P \rho^{-5/3} = \text{costante} \quad (7.18)$$

Equazione 7.18 descrive il cosiddetto *flusso adiabatico*.

Benché abbiamo dimostrato che $P \rho^{-5/3}$ è costante su una linea di flusso, in molti casi si assume che questa costante sia la stessa per ogni linea di flusso del gas. Questo è equivalente a porre

l'entropia del gas costante. Questi flussi vengono detti *isoentropici*. Si noti come i termini adiabatici e isoentropici vengono spesso intercambiati.

Se il gas non è mono-atomico, e quindi il coefficiente della energia interna ε non è $3/2$, avremmo ottenuto lo stesso un risultato come in Eq. 7.18, ma con un esponente diverso per ρ :

$$P\rho^{-\gamma} = \text{costante} \quad (7.19)$$

L'equazione 7.19 è detta *politropica* e γ è detto *indice politropico*. Esso è uguale al rapporto dei calori specifici del gas.

Un altro importante caso speciale di flusso si ottiene assumendo che la temperatura T sia costante in tutta la regione di interesse. Questo tipo di flusso viene detto *isotermico* ed è equivalente a postulare l'esistenza di un qualche processo fisico che mantenga costante T . In altre parole, l'equazione di conservazione dell'energia viene sostituita dalla relazione $T = \text{costante}$. Utilizzando l'equazione di stato, questa relazione corrisponde a

$$P\rho^{-1} = \text{costante}$$

che ha la stessa forma di Eq. 7.19 con $\gamma = 1$.

7.5 Onde sonore

Una importante classe di soluzioni del nostro sistema di equazioni del gas corrisponde al caso di *equilibrio idrostatico*. In questo caso, oltre ad imporre un flusso stazionario e l'assenza di perdite di radiazione, imponiamo che $\mathbf{v} = 0$. In questo caso la legge di conservazione del momento Eq. 7.16b si riduce a

$$\nabla P = \mathbf{f}$$

Soluzioni di questo tipo sono appropriate ad atmosfere stellari (o planetarie) in equilibrio radiativo.

Assumiamo che abbiamo una soluzione in cui P e ρ sono certe funzioni della posizione, P_0 e ρ_0 , e consideriamo piccole perturbazioni attorno ad essa. Sia quindi

$$P = P_0 + P', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

dove tutte le quantità primarie sono piccole, così possiamo trascurare prodotti di ordine superiore al secondo. Assumiamo inoltre che le perturbazioni siano adiabatiche (o isotermiche). Perciò

$$P + P' = K(\rho + \rho')^\gamma \quad (7.20)$$

dove $\gamma = 5/3$ nel caso adiabatico e $\gamma = 1$ nel caso isotermico. Linearizzando l'equazione di continuità (7.1) e di Eulero (7.3), ed usando il fatto che $\nabla P_0 = \mathbf{f}$, abbiamo che

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P' = 0 \quad (7.22)$$

Dato che P è una funzione solamente di ρ , allora $\nabla P' = (dP/d\rho)_0 \nabla \rho'$, dove il pedice 0 significa che la derivata deve essere valutata per la soluzione di equilibrio, cioè $(dP/d\rho)_0 = dP_0/d\rho_0$. Quindi Eq. 7.22 diventa

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0 \nabla \rho' = 0 \quad (7.23)$$

Eliminando \mathbf{v}' da (7.23) e (7.21) applicando gli operatori $\nabla \cdot$ e $\partial/\partial t$ e poi sottraendo, otteniamo

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \rho' \quad (7.24)$$

dove abbiamo definito

$$c_s = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0^{1/2} \quad (7.25)$$

L'equazione 7.24 non è altro che la *equazione d'onda*, con onda che si propaga a velocità c_s . Si può fare vedere che anche le altre variabili P' e \mathbf{v}' ubbidiscono a simili equazioni.

Questo implica che piccole perturbazioni attorno all'equilibrio idrostatico si propagano attraverso il gas come onde sonore con velocità c_s . Dalle Eq. 7.20 e 7.25 vediamo come la velocità del suono possa avere due valori

$$\text{adiabatico: } c_s^{\text{ad}} = \left(\frac{5P}{3\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{5kT}{3\mu m_H} \right)^{1/2} \propto \rho^{1/3} \quad (7.26a)$$

$$\text{isotermico: } c_s^{\text{iso}} = \left(\frac{P}{\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{kT}{\mu m_H} \right)^{1/2} \quad (7.26b)$$

Le velocità del suono c_s^{ad} e c_s^{iso} sono quantità che possono essere definite localmente in ogni punto del gas. Entrambe sono dello stesso ordine di grandezza della velocità termica media degli ioni del gas. Da un punto di vista numerico abbiamo che

$$c_s \simeq 10 \left(\frac{T}{10^4 \text{ K}} \right)^{1/2} \text{ Km sec}^{-1} \quad (7.27)$$

Dato che c_s è la velocità a cui le perturbazioni in pressione attraversano il gas, questa limita la rapidità con cui il gas risponde a variazioni di pressione. Per esempio, se la pressione in una

parte di una regione del gas di dimensione caratteristica l cambia improvvisamente, altre parti di questa regione non possono rispondere fino a quando non è passato un tempo dell'ordine l/c_s , il tempo di attraversamento del suono.

D'altro canto, se la pressione in una parte della regione cambia su un tempo-scala molto maggiore di l/c_s , il gas ha tutto il tempo di rispondere alla sollecitazione ed il gradiente di pressione rimarrà piccolo.

Quindi, se consideriamo *flussi supersonici*, dove il gas si muove con $|\mathbf{v}| > c_s$, il gas non riesce a rispondere su tempi scala $l/|\mathbf{v}| < l/c_s$, e quindi gradienti di pressione hanno effetti trascurabili sul flusso. All'altro estremo, per *flussi subsonici*, caratterizzati da $|\mathbf{v}| < c_s$, il gas riesce a rispondere a cambiamenti in pressione quindi, in prima approssimazione, si comporta come se fosse in equilibrio idrostatico.

Queste proprietà si possono ricavare direttamente da una analisi per ordine di grandezza dell'equazione di Eulero. Infatti, per un flusso supersonico abbiamo che

$$\frac{|\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|\nabla P|} \sim \frac{v^2/l}{P/\rho l} \sim \frac{v^2}{c_s^2} > 1$$

e quindi, in prima approssimazione, i gradienti di pressione possono essere trascurati.

Una importante proprietà della velocità del suono è la sua dipendenza dalla densità (Eq. 7.26a). Questo significa che regioni di densità superiore alla media avranno anche velocità del suono superiori alla media, il che comporta la possibilità di avere *onde d'urto* (*shock waves*).

In uno shock le grandezze che descrivono il fluido cambiano su lunghezze scala dell'ordine del libero cammino medio, e questo comporta una *discontinuità* nel fluido.

7.6 Accrescimento stazionario a simmetria sferica

Ora che abbiamo tutto l'apparato matematico a disposizione, possiamo attaccare il problema reale di accrescimento di massa. Si consideri una stella di massa M che accresce, con simmetria sferica, da una grande nube di gas. Questa è una buona approssimazione di una stella isolata che accresce dal mezzo interstellare, sempre che si possano trascurare il momento angolare, il campo magnetico ed il moto collettivo del gas rispetto alla stella.

In primo luogo, ci aspettiamo di poter determinare il tasso di accrescimento stazionario \dot{M} (in unità di g sec^{-1}) sulla stella date le condizioni ambientali (densità $\rho(\infty)$ e temperatura $T(\infty)$) per parti della nube di gas lontane dalla stella, e date delle condizioni al contorno sulla sua superficie. Secondo, tenteremo di comprendere fino a che distanza la nube è influenzata dalla presenza della stella che accresce.

Innanzitutto usiamo un sistema di coordinate polari sferiche (r, θ, ϕ) con origine al centro della stella. Avendo assunto simmetria sferica, tutte le variabili sono indipendenti da θ e ϕ . Inoltre la velocità del gas ha solamente la componente radiale $v_r = v$. Dato che consideriamo materia che cade sulla stella (accrescimento) v sarà negativa, mentre $v > 0$ corrisponderà a vento stellare.

Per un flusso stazionario l'equazione di continuità diventa

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 \rho v) = 0 \quad (7.28)$$

dove abbiamo usato l'espressione standard per la divergenza in coordinate sferiche. Questo ha come soluzione $r^2 \rho v = \text{costante}$. Dato che $\rho(-v)$ è il flusso di materia che cade, la costante deve essere in relazione con il tasso di accrescimento (costante) \dot{M} . Poiché abbiamo a che fare con una superficie di una sfera avremo che

$$4\pi r^2 \rho(-v) = \dot{M} \quad (7.29)$$

Nell'equazione di Eulero, l'unico contributo alla forza esterna f è dato dalla gravità, e questa ha solamente la componente radiale

$$f_r = -G \frac{M\rho}{r^2}$$

quindi la conservazione del momento diventa

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (7.30)$$

Utilizziamo infine l'equazione di stato politropica

$$P = K\rho^\gamma \quad (7.31)$$

al posto della legge di conservazione dell'energia. Questo ci permette di trattare simultaneamente sia accrescimento adiabatico ($\gamma = 5/3$) che quello isotermico ($\gamma = 1$). Dopo che avremo trovato la soluzione dovremo vedere se l'assunzione adiabatica o isotermica sia giustificata andando ad indagare i processi di riscaldamento e raffreddamento del gas.

Per esempio, l'approssimazione adiabatica sarà valida se i tempi-scala su cui il gas si scalda o raffredda sono lunghi rispetto al tempo che impiega un elemento del gas a cadere sulla stella. In realtà né l'accrescimento adiabatico né quello isotermico sono valide approssimazioni, per cui ci aspetteremo $1 < \gamma < 5/3$.

Una volta determinati $P(r)$ e $\rho(r)$, utilizzando l'equazione di stato possiamo ricavarci la temperatura T

$$T = \frac{\mu m_H P}{\rho k} \quad (7.32)$$

Il nostro problema si riduce quindi nell'integrazione dell'Equazione 7.30 con l'aiuto di (7.31) e (7.29) e quindi nell'identificazione dell'unica soluzione che corrisponde al nostro problema di accrescimento.

Prima di integrare l'Equazione 7.30 vediamo come sia possibile ottenere importanti informazioni senza una integrazione esplicita. Dato che

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = c_s^2 \frac{d\rho}{dr}$$

allora, il termine $(1/\rho)(dP/dr)$ nell'equazione di Eulero (7.30) può essere scritto come $(c_s^2/\rho)(d\rho/dr)$. Ma dalla equazione di continuità (7.28) abbiamo che

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{vr^2} \frac{d}{dr}(vr^2)$$

Quindi Equazione 7.30 diventa

$$v \frac{dv}{dr} - \frac{c_s^2}{vr^2} \frac{d}{dr}(vr^2) + \frac{GM}{r^2} = 0$$

che, con un pò di algebra, può essere riscritta nella forma

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) \frac{d}{dr}(v^2) = -\frac{GM}{r^2} \left[1 - \left(\frac{2c_s^2 r}{GM} \right) \right] \quad (7.33)$$

A prima vista sembra che le cose siano diventate molto più complicate, dato che c_s è in generale una funzione di r . Però l'interpretazione fisica di c_s come la velocità del suono nel gas, insieme alla struttura dell'Equazione 7.33, in cui i fattori di entrambi i membri possono (in linea di principio) diventare nulli, ci permette di classificare le possibili soluzioni di (7.33) in classi distinte e di trovare l'unica corrispondente al nostro problema.

In primo luogo, possiamo notare come a grande distanza dalla stella il fattore $[1 - (2c_s^2 r/GM)]$ nel membro di destra deve diventare negativo, dato che c_s^2 approssima un qualche valore asintotico finito $c_s^2(\infty)$, dipendente dalla temperatura del gas lontano dalla stella, mentre r aumenta senza alcun limite. Questo significa che per grandi r il membro di destra di (7.33) è positivo.

Nel membro di sinistra, il fattore $d(v^2)/dr$ deve essere negativo, dato che vogliamo che il gas si trovi a riposo a grandi distanze dalla stella, e che acceleri a mano a mano che si avvicina.

Questi due requisiti sono compatibili tra loro solamente se per grandi r il flusso del gas è subsonico, cioè

$$v^2 < c_s^2 \quad \text{per grandi } r \quad (7.34)$$

Questo è ovviamente un risultato molto ragionevole dato che il gas avrà una temperatura non nulla, e quindi una velocità del suono non nulla, a grandi distanze dalla stella.

Mentre il gas si avvicina alla stella, r decresce ed il fattore $[1 - (2c_s^2 r/GM)]$ deve tendere ad aumentare. Alla fine esso si annullerà, a meno che non si trovi un modo di aumentare c_s^2 riscaldando il gas. Questo però è molto improbabile, dato che il fattore si annulla ad una distanza r_s data da

$$r_s = \frac{GM}{2c_s^2(r_s)} \simeq 7.5 \cdot 10^{13} \left(\frac{T(r_s)}{10^4 \text{ K}} \right)^{-1} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ cm} \quad (7.35)$$

dove abbiamo usato (7.27) per introdurre la temperatura. L'ordine di grandezza di r_s è molto maggiore del raggio R_* di ogni oggetto compatto ($R_* \lesssim 10^9$ cm).

Una simile analisi dei segni nell'Equazione 7.33 per $r < r_s$ mostra che il flusso deve essere supersonico vicino alla stella:

$$v^2 > c_s^2 \quad \text{per piccoli } r \quad (7.36)$$

Questa discussione mostra come il problema che stiamo trattando non sia matematicamente ben posto se diamo solamente le condizioni all'infinito. Infatti è necessario specificare anche le condizioni sulla o vicino la superficie della stella. Vedremo che imponendo la condizione (7.36) otterremo solamente una soluzione al nostro problema (soluzione del Tipo 1). Senza l'imposizione (7.36) ci sarebbe anche un'altra possibile soluzione (di Tipo 3).

L'esistenza di un punto r_s che soddisfi l'Equazione 7.35 è di enorme importanza nella caratterizzazione del flusso di accrescimento. Infatti, da un punto di vista matematico, il fatto che per $r = r_s$ il membro di destra di (7.33) si annulli implica che anche il membro di destra deve annullarsi per $r = r_s$. Questo significa che devono valere le relazioni

$$v^2 = c_s^2 \quad \text{per } r = r_s \quad (7.37)$$

oppure (non necessariamente contemporaneamente)

$$\frac{d}{dr}(v^2) = 0 \quad \text{per } r = r_s \quad (7.38)$$

Tutte le soluzioni di (7.33) possono ora essere classificate in termini del loro comportamento a $r = r_s$, dato dalle condizioni (7.37) o (7.38), insieme con il loro comportamento per grandi r , come (7.34). Questo è molto semplice da vedere se grafichiamo $v^2(r)/c_s^2(r) \equiv \mathcal{M}^2$ in funzione di r (vedi Figura 7.1), da cui è chiaro che esistono sei distinte famiglie di soluzioni

$$\text{Tipo 1: } v^2(r_s) = c_s^2(r_s) \quad v^2 \rightarrow 0 \text{ per } r \rightarrow \infty \\ (v^2 < c_s^2, r > r_s; \quad v^2 > c_s^2, r < r_s)$$

$$\text{Tipo 2: } v^2(r_s) = c_s^2(r_s) \quad v^2 \rightarrow 0 \text{ per } r \rightarrow 0 \\ (v^2 > c_s^2, r > r_s; \quad v^2 < c_s^2, r < r_s)$$

$$\text{Tipo 3: } v^2(r_s) < c_s^2(r_s) \text{ dappertutto,} \quad \frac{d}{dr}(v^2) = 0 \text{ per } r = r_s$$

$$\text{Tipo 4: } v^2(r_s) > c_s^2(r_s) \text{ dappertutto,} \quad \frac{d}{dr}(v^2) = 0 \text{ per } r = r_s$$

$$\text{Tipo 5: } \frac{d}{dr}(v^2) = \infty \text{ per } v^2 = c_s^2(r_s); \quad r > r_s \text{ sempre}$$

$$\text{Tipo 6: } \frac{d}{dr}(v^2) = \infty \text{ per } v^2 = c_s^2(r_s); \quad r < r_s \text{ sempre}$$

Esiste solamente una soluzione del Tipo 1 e Tipo 2: queste soluzioni sono dette *transoniche*, in quanto rappresentano la transizione tra un flusso subsonico ad un flusso supersonico. Soluzioni di Tipo 3 e Tipo 4 rappresentano un flusso che è ovunque subsonico e supersonico, rispettivamente. Soluzioni di Tipo 5 e Tipo 6 non ammettono tutti i valori di r e per ogni valore di r esistono due possibili valori di v^2 . Per questi motivi escludiamo questo tipo di soluzioni del nostro problema.

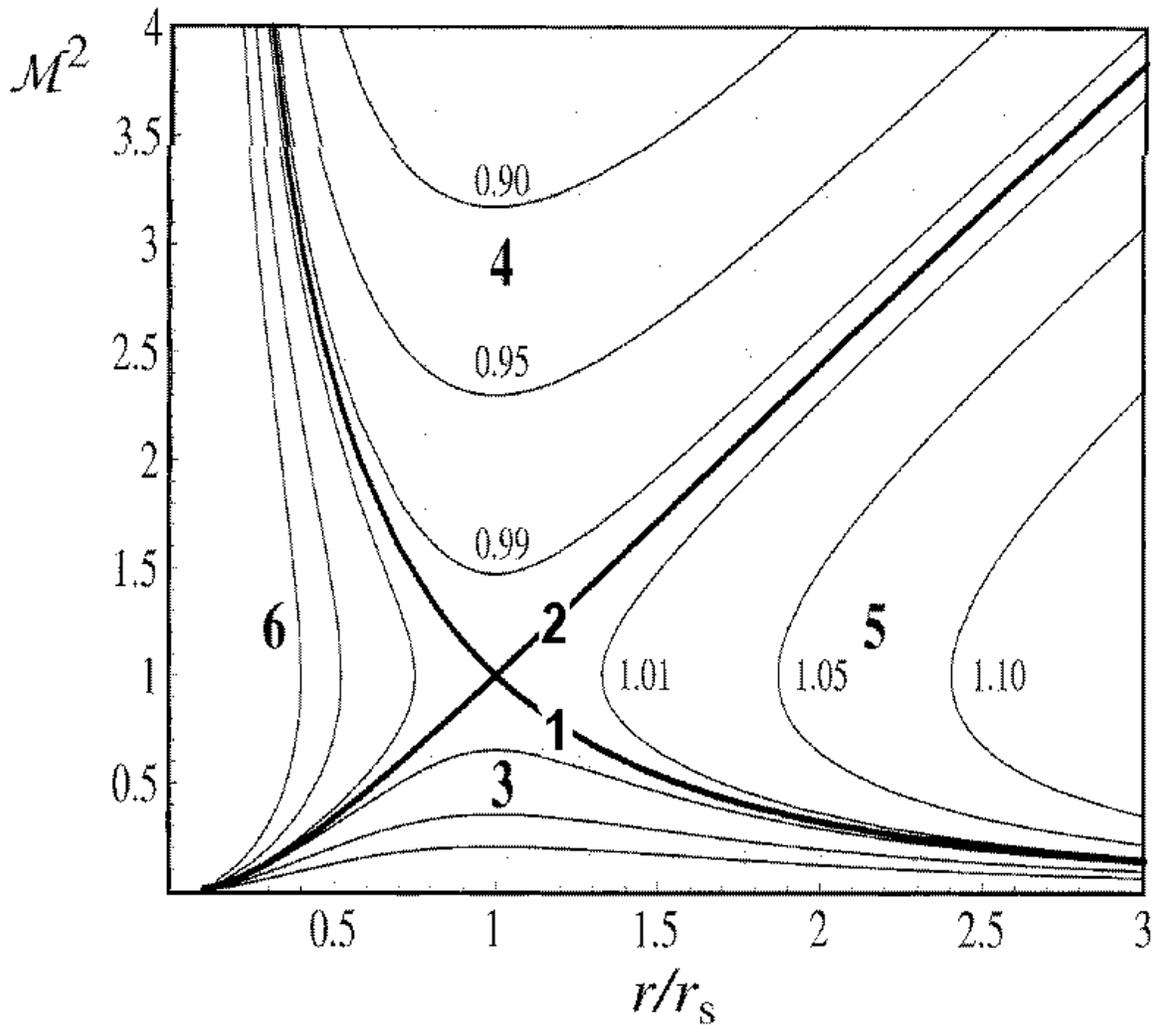


Figura 7.2: Numero di Mach al quadrato $\mathcal{M}^2 = v^2(r)/c_s^2(r)$ in funzione della distanza r/r_s per un flusso di gas adiabatico, in accrescimento a simmetria sferica, nel campo gravitazionale di una stella. Nel caso $v < 0$ abbiamo flussi in accrescimento, mentre per $v > 0$ abbiamo venti o “brezze” stellari. Le due soluzioni transoniche di Tipo 1 e Tipo 2, indicate da una linea spessa, dividono le rimanenti soluzioni in famiglie, come descritto nel testo.

Soluzioni di Tipo 2 e Tipo 4 sono da escludersi perché sono supersoniche per grandi r , in violazione alla condizione (7.34), mentre il Tipo 3 è subsonica per piccoli r , violando quindi la condizione (7.36).

Una soluzione di Tipo 2 con $v > 0$ descrive un vento stellare (si noti che (7.33) non cambia per $v \rightarrow -v$). Soluzioni di Tipo 3 con $v > 0$ rappresentano la cosiddetta “brezza stellare”, in cui il flusso è ovunque subsonico. Se $v < 0$ allora abbiamo una atmosfera che sta lentamente decadendo.

Ci è quindi rimasta la soluzione di Tipo 1: questa possiede tutte le proprietà che abbiamo richiesto ed è l’unica soluzione del nostro problema. La condizione al punto sonico (7.37) ci permetterà di collegare il tasso di accrescimento \dot{M} con la condizione all’infinito.

Una volta risolto il problema della unicità della soluzione, integriamo l’Equazione 7.30 utilizzando l’equazione di stato politropica (7.31) per passare da p a ρ :

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} - \frac{GM}{r} = \text{costante}$$

Dalla Eq. 7.31 abbiamo che $dP = K\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho$, quindi per $\gamma \neq 1$ otteniamo

$$\frac{v^2}{2} + \frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \text{costante}$$

Dato però che $K\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma P/\rho = c_s^2$ otteniamo il cosiddetto *integrale di Bernoulli*:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_s^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \text{costante} \quad (7.39)$$

Nel caso di un flusso isotermico ($\gamma = 1$) si ottiene un integrale logaritmico. Per la proprietà fisica della nostra soluzione (Tipo 1) dobbiamo avere che $v^2 \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$, quindi la costante in (7.39) deve essere $c_s^2(\infty)/(\gamma-1)$, dove $c_s^2(\infty)$ è la velocità del suono nel gas a grande distanza dalla stella. La condizione al punto sonico (7.35) mette in relazione $c_s^2(\infty)$ con $c_s^2(r_s)$

$$c_s^2(r_s) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma-1} - 2 \right] = \frac{c_s^2(\infty)}{\gamma-1}$$

che può essere riscritta come

$$c_s(r_s) = c_s(\infty) \left(\frac{2}{5-3\gamma} \right)^{1/2} \quad (7.40)$$

Riprendendo l’equazione di continuità (7.29) abbiamo che

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(-v) = 4\pi r_s^2 \rho(r_s) c_s(r_s) \quad (7.41)$$

dato che \dot{M} è indipendente da r . Usando il fatto che $c_s^2 \propto \rho^{\gamma-1}$, abbiamo che

$$\rho(r_s) = \rho(\infty) \left[\frac{c_s(r_s)}{c_s(\infty)} \right]^{2/(\gamma-1)}$$

Mettendo questa relazione, insieme alla (7.41) nella (7.40) otteniamo la relazione tra il tasso di accrescimento \dot{M} e le condizioni all'infinito:

$$\dot{M} = \pi G^2 M^2 \frac{\rho(\infty)}{c_s^3(\infty)} \left[\frac{2}{5-3\gamma} \right]^{(5-3\gamma)/2(\gamma-1)} \quad (7.42)$$

Si noti come la dipendenza da γ sia molto debole: infatti il fattore $[2/(5-3\gamma)]^{(5-3\gamma)/2(\gamma-1)}$ varia tra 1 per $\gamma = 5/3$ a $e^{3/2} \simeq 4.5$ per $\gamma = 1$. Per un valore tipico di $\gamma = 1.4$ il fattore vale 2.5.

L'equazione 7.42 ci dice che è difficile che l'accrescimento dal mezzo interstellare sia un fenomeno osservabile. Infatti per $c_s(\infty) = 10 \text{ Km sec}^{-1}$, $\rho(\infty) = 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$, corrispondenti ad una temperatura di 10 K ed una densità numerica di 1 particella per cm^3 , abbiamo

$$\dot{M} \simeq 1.4 \cdot 10^{11} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{\rho(\infty)}{10^{-24} \text{ g cm}^{-3}} \right) \left(\frac{c_s(\infty)}{10 \text{ Km sec}^{-1}} \right)^{-3} \text{ g sec}^{-1} \quad (7.43)$$

La luminosità di accrescimento in questo caso sarebbe di $2 \cdot 10^{31} \text{ erg sec}^{-1}$, che ad una distanza tipica di 1 kpc corrisponde ad un flusso troppo basso per essere osservabile.

Vediamo ora di completare la soluzione scrivendo tutte le quantità in funzione di r . In primo luogo, possiamo ricavare $v(r)$ in termini di $c_s(r)$ dalla (7.41)

$$(-v) = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 \rho(r)} = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 \rho(\infty)} \left[\frac{c_s(\infty)}{c_s(r)} \right]^{2/(\gamma-1)}$$

Sostituendo questa relazione nell'integrale di Bernoulli (7.39) otteniamo una relazione algebrica per $c_s(r)$, da cui poi ci si può ricavare $v(r)$ e $\rho(r)$. In pratica però questa equazione può essere risolta soltanto numericamente. Un andamento generale della soluzione può però essere ricavato studiando l'integrale di Bernoulli. Per grandi distanze la forza gravitazionale della stella è debole e tutte le quantità avranno i loro valori "ambientali" ($\rho(\infty)$, $c_s(\infty)$ e $v \simeq 0$). Mano a mano che ci si avvicina alla stella, la velocità del flusso del gas aumenta fino a quando $-v$ raggiunge $c_s(\infty)$, la velocità del suono all'infinito. L'unico termine in (7.39) capace di bilanciare questo aumento è il termine gravitazionale GM/r .

Dato che $c_s(r)$ non è molto più grande di $c_s(\infty)$, questo deve accadere ad una distanza

$$r \simeq r_{\text{acc}} = \frac{2GM}{c_s(\infty)^2} \simeq 3 \cdot 10^{14} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{10^4 \text{ K}}{T(\infty)} \right) \text{ cm} \quad (7.44)$$

In questo punto $\rho(r)$ e $c_s(r)$ iniziano ad aumentare al di sopra dei valori ambientali. Al punto sonico $r = r_s$ il flusso diventa supersonico ed il gas è in caduta libera. Infatti la relazione $v^2 \gg c_s^2$ sostituita nell'integrale di Bernoulli diventa

$$v^2 \simeq \frac{2GM}{r} = v_{\text{ff}}$$

L'equazione di continuità ci permette di scrivere

$$\rho \simeq \rho(r_s) \left(\frac{r_s}{r} \right)^{3/2} \quad \text{per } r \lesssim r_s$$

Infine possiamo, in linea di principio, ottenere la temperatura usando l'equazione di stato poliotropica

$$T \simeq T(r_s) \left(\frac{r_s}{r} \right)^{3(\gamma-1)/2} \quad \text{per } r \lesssim r_s$$

Si noti però che l'aumento di T al diminuire di r predetto da questa equazione è probabilmente non realistico.

Il raggio r_{acc} definito dall'Equazione 7.44 ha una semplice interpretazione: ad un dato raggio r il rapporto tra l'energia interna (termica) e l'energia di legame gravitazionale di un elemento di gas di massa m è

$$\frac{\text{Energia termica}}{\text{Energia gravitazionale}} \sim \left(\frac{1}{2} m c_s^2(r) \right) \left(\frac{r}{GMm} \right) \sim \frac{r}{r_{\text{acc}}} \quad \text{per } r \gtrsim r_{\text{acc}}$$

dato che $c_s(r) \sim c_s(\infty)$ per $r > r_{\text{acc}}$. Quindi, per $r \gg r_{\text{acc}}$ la forza gravitazionale della stella non influenza il gas. La distanza r_{acc} viene detta *raggio di accrescimento*.

Si noti come la relazione (7.42) che fornisce il tasso di accrescimento in funzione delle condizioni all'infinito può essere scritta come

$$\dot{M} \sim \pi r_{\text{acc}}^2 c_s(\infty) \rho(\infty) \quad (7.45)$$

Ricapitoliamo le conclusioni a cui siamo pervenuti studiando il caso (particolare) di accrescimento stazionario a simmetria sferica:

- ① Il tasso di accrescimento stazionario \dot{M} è determinato dalle condizioni “ambientali” all'infinito (Equazione 7.42) e da una condizione al contorno (ad esempio (7.36)). L'accrescimento diretto dal mezzo interstellare da parte di stelle di neutroni isolate comporta un valore di \dot{M} troppo piccolo per avere conseguenze osservabili.
- ② Il comportamento del gas subisce l'influenza della forza gravitazionale solamente all'interno del raggio di accrescimento r_{acc} .
- ③ Un flusso di accrescimento stazionario con \dot{M} maggiore o uguale al valore dato da (7.42) **deve** possedere un punto sonico, cioè la velocità del gas in accrescimento **deve** diventare supersonica vicino alla superficie della stella.

L'immediata conseguenza del punto ③ è che, dato che la materia accresciuta deve arrivare alla superficie della stella con una velocità piccola, deve esistere una maniera di frenare il flusso supersonico. Questo però ci conduce nel campo di dominio della fisica del plasma, dato che dovremo tenere conto del comportamento del gas su lunghezze-scala comparabili con il libero cammino medio tra le collisioni.

Capitolo 8

Teoria Cinetica del Plasma

8.1 Definizione di plasma

Un plasma consiste in una miscela di due gas di particelle elettricamente cariche: un gas di elettroni ed un gas di ioni, con masse delle particelle molto differenti m_e e m_i .

Gli elettroni e gli ioni interagiscono tra di loro attraverso forze di Coulomb attrattive e repulsive. Queste forze decrescono molto lentamente ($\propto r^{-2}$) con la distanza e non possiedono una lunghezza-scala caratteristica. Quindi una particella di plasma interagisce contemporaneamente con tutte le altre, e questo rende la descrizione delle collisioni molto complessa. Una ulteriore complicazione è dovuta alla grande differenza di massa tra elettroni e ioni. Dato che le collisioni tra particelle di massa molto diversa riescono a trasferire solamente una piccola frazione dell'energia cinetica, è possibile che gli ioni e gli elettroni possiedano una temperatura molto diversa su tempi-scala lunghi.

8.2 Neutralità di carica, oscillazioni di plasma e lunghezza di Debye

Vediamo ora di esaminare in dettaglio le conseguenze del carattere a lungo raggio della forza di Coulomb tra particelle cariche.

Innanzitutto abbiamo che la densità numerica di ioni ed elettroni in ogni punto deve essere approssimativamente uguale, e quindi il plasma deve sempre essere vicino alla neutralità di carica. Infatti anche un piccolo eccesso di carica risulterebbe in un campo elettrico molto grande che farebbe muovere le particelle in modo da ristabilire molto velocemente la neutralità.

Supponiamo che ci sia un eccesso di carica di 1% in una sfera di raggio r in un plasma di densità numerica N . Allora gli elettroni che si trovano vicino al bordo della sfera risentiranno di un campo elettrico E e di una accelerazione

$$\dot{v} = \frac{e|E|}{m_e} \simeq \frac{4\pi r^3}{3m_e} \frac{N}{100} \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]r^2}$$

dove $(-e)$ è la carica di un elettrone.

Per una sfera di raggio $r = 1$ cm in un tipico plasma astrofisico con $N = 10^{10}$ particelle per cm^3 abbiamo che $v \sim 10^{17}$ cm sec^{-2} , e quindi gli elettroni impiegherebbero $3 \cdot 10^{-9}$ sec a ristabilire la neutralità. Infatti essi si muoverebbero così velocemente da indurre *oscillazioni* nel plasma. Dato che tutti i plasmi sono soggetti a piccole perturbazioni che tendono a disturbare la neutralità di carica (ad esempio il passaggio di radiazione elettromagnetica, o il moto termico delle particelle del plasma stesso), la frequenza naturale di queste oscillazioni è una grandezza fondamentale chiamata **frequenza di plasma**.

Per determinarla consideriamo un plasma uniforme con un piccolo eccesso di elettroni in qualche (piccola) regione. Assumiamo che gli ioni abbiano in media una carica $Ze \simeq e$, e che le densità numeriche di ioni ed elettroni siano, rispettivamente

$$N_i \simeq N_0 \quad N_e = N_0 + N_1(\mathbf{r}, t)$$

con $N_1 \ll N_0$ e $N_1 = 0$ al di fuori della nostra piccola regione.

L'eccesso di carica N_1 dà luogo ad un campo elettrico \mathbf{E} dato dalla legge di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{[4\pi\epsilon_0]} N_1 e \quad (8.1)$$

Questo campo elettrico provoca il movimento delle particelle. Dato che $m_i \gg m_e$ possiamo trascurare il moto degli ioni. Gli elettroni si muoveranno come un fluido ed ubbidiranno alle equazioni di conservazione. Dato che N_1 è assunto piccolo, possiamo trascurare il termine $(\mathbf{v}_e \cdot \nabla)\mathbf{v}_e$ nell'equazione di Eulero, che così diventa

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -e\mathbf{E} \quad (8.2)$$

L'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot (N_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (8.3)$$

che, trascurando prodotti di piccole quantità, diventa

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + N_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_e = 0 \quad (8.4)$$

Possiamo eliminare \mathbf{v}_e da queste equazioni prendendo la divergenza della (8.2) e la derivata rispetto al tempo della (8.4) e sottraendo

$$\frac{1}{N_0} \frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2} - \frac{e}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Usando l'equazione di Maxwell (8.1) per eliminare $\nabla \cdot \mathbf{E}$ otteniamo

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2} + \left\{ \frac{4\pi}{[4\pi\epsilon_0]} \frac{N_0 e^2}{m_e} \right\} N_1 = 0$$

Perciò l'eccesso di carica N_1 oscilla con frequenza di plasma

$$\omega_p = \left\{ \frac{4\pi}{[4\pi\epsilon_0]} \frac{N_0 e^2}{m_e} \right\}^{1/2} \quad (8.5)$$

Da un punto di vista numerico, con N_0 misurato in cm^{-3} , abbiamo

$$\begin{aligned} \omega_p &= 5.7 \cdot 10^4 N_0^{1/2} \text{ rad sec}^{-1} \\ \nu_p &= \frac{\omega_p}{2\pi} = 9.0 \cdot 10^3 N_0^{1/2} \text{ Hz} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Un plasma è opaco alla radiazione elettromagnetica di frequenza $\nu < \nu_p$ perché le oscillazioni del plasma sono più rapide delle variazioni nel campo elettromagnetico, e gli elettroni del plasma si muovono “cancellando” la radiazione. Per la ionosfera della Terra abbiamo che $N_0 \simeq 10^6 \text{ cm}^{-3}$, quindi onde radio di frequenza minore di circa 10^7 Hz non possono penetrarla e quindi sono riflesse.

Associato al tempo-scala ν_p^{-1} delle oscillazioni di carica deve esistere una grandezza-scala l che definisce su quali distanze il campo elettrico viene generato dall'eccesso di carica N_1 . Possiamo calcolarlo, come ordine di grandezza, valutando le derivate come

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \omega_p, \quad \nabla \sim \frac{1}{l}$$

Dall'equazione (8.3) otteniamo quindi

$$l \sim \frac{v_e}{\omega_p} \quad (8.7)$$

Quindi il campo elettrico E generato dall'eccesso di carica N_1 è limitato ad una distanza-scala l dall'effetto di schermo degli elettroni.

Dato che anche un plasma non perturbato sarà soggetto a piccole fluttuazioni di carica dovute al moto termico degli elettroni, esisterà una distanza di schermo, detta **lunghezza di Debye** λ_{Deb} , che otteniamo ponendo nell'espressione della velocità degli elettroni in (8.7) $v_e \sim (kT_e/m_e)^{1/2}$, dove T_e è la temperatura degli elettroni

$$\lambda_{\text{Deb}} = \left\{ \frac{[4\pi\epsilon_0]kT_e}{4\pi N_0 e^2} \right\}^{1/2} \quad (8.8)$$

Numericamente, con N_0 misurato in cm^{-3} e T_e in K

$$\lambda_{\text{Deb}} \simeq 7 \left(\frac{T_e}{N_0} \right)^{1/2} \text{ cm} \quad (8.9)$$

L'importanza di λ_{Deb} risiede nel fatto che questa distanza ci fornisce la lunghezza-scala su cui può esistere un sostanziale eccesso di carica; quindi ci fornisce la portata delle collisioni Coulombiane nel plasma.

Affinché la nostra trattazione del plasma sia consistente è necessario che il numero di particelle coinvolte nell'oscillazione sia grande, ed inoltre che le grandezze fisiche del plasma non subiscano variazioni apprezzabili su grandezze-scala l molto minori della lunghezza di Debye:

$$N_e \lambda_{\text{Deb}}^3 \gg 1 \quad l \gg \lambda_{\text{Deb}} \quad (8.10)$$

Se queste condizioni non sono soddisfatte, allora possiamo trattare il gas come un sistema di particelle indipendenti e trascurare così i cosiddetti “effetti collettivi”.

8.3 Collisioni Coulombiane

Consideriamo ora collisioni Coulombiane tra particelle del plasma. Dato che queste collisioni coinvolgono l'accelerazione di particelle cariche, verrà prodotta radiazione elettromagnetica a spese dell'energia cinetica delle due particelle. Comunque si può dimostrare come questi due tassi di perdita di energia (per radiazione e per collisione) di una particella che si muove a velocità v stanno nel rapporto

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{coll}}} \lesssim \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]\hbar c} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim \frac{1}{137} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1 \quad (8.11)$$

dove $e^2/[4\pi\epsilon_0]\hbar c$ è la costante di struttura fine. Quindi la perdita di energia per radiazione durante una collisione è trascurabile e quindi possiamo considerare l'urto come *elastico*. Il nostro problema quindi consiste nel descrivere l'urto tra due particelle cariche e_1 ed e_2 che interagiscono via forza di Coulomb $e_1 e_2 / [4\pi\epsilon_0] r^2$ ad una certa distanza r .

Il modo più semplice per trattare il problema di urto tra due particelle è quello di porci nel sistema di riferimento (SdR) del centro di massa. Se le velocità iniziali delle due particelle nel SdR del laboratorio sono v_1 e v_2 , ed esse hanno massa m_1 e m_2 , il SdR del centro di massa avrà velocità

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (8.12)$$

In questo SdR le particelle incidenti hanno momento della quantità di moto uguale in modulo ed opposto in segno $\pm m\mathbf{v}$, e la loro energia cinetica totale è $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$, dove abbiamo definito

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (8.13)$$

Dato che la forza di Coulomb ubbidisce ad una legge dell'inverso del quadrato della distanza, le traiettorie delle particelle in collisione nel SdR del centro di massa saranno iperboli, che possono essere caratterizzate da un parametro di impatto b . Dato che l'urto è elastico, sia le velocità che le energie delle particelle rimangono inalterate: si ha soltanto una deflessione di traiettoria.

L'angolo di deflessione θ sarà apprezzabile, diciamo dell'ordine di 90° , per un certo valore del parametro di impatto, che indicheremo con b_0 , tale per cui l'energia cinetica e l'energia potenziale siano comparabili al momento di massimo avvicinamento (si veda Figura 8.1):

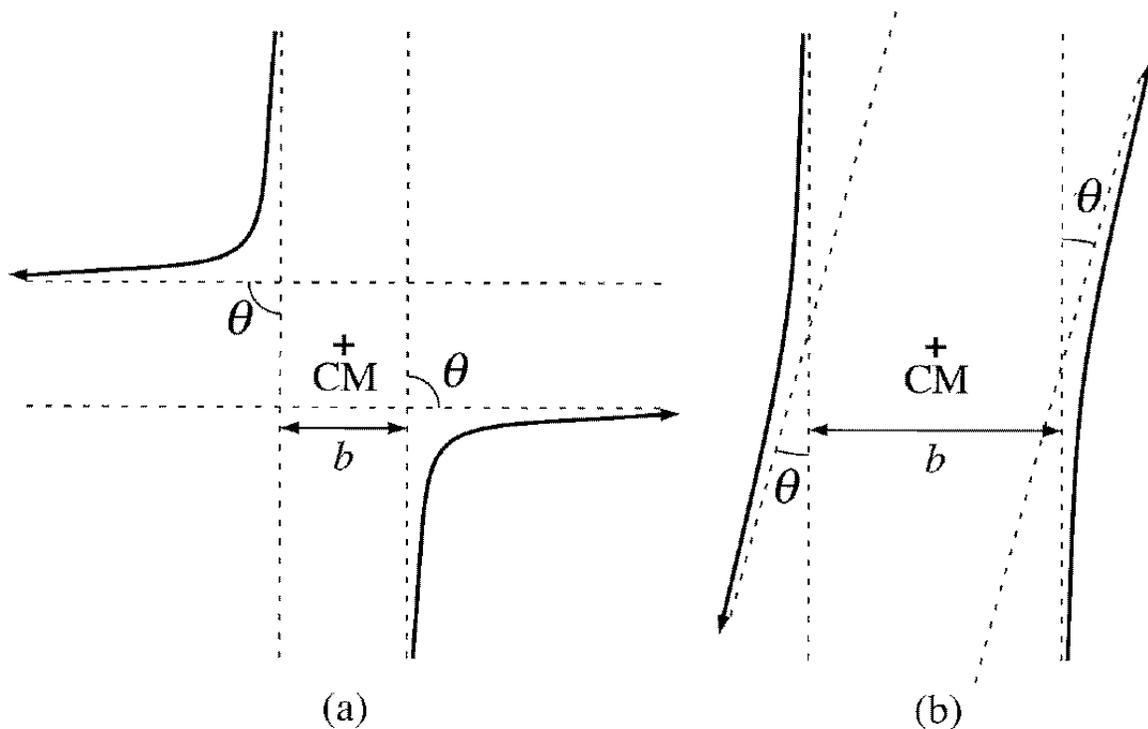


Figura 8.1: Collisioni Coulombiane di due particelle di stessa carica (in questo caso positiva) e stessa massa: (a) collisione ravvicinata; (b) collisione distante. Il parametro di impatto b prima e dopo l'urto rimane lo stesso per la conservazione della quantità di moto.

$$\frac{e_1 e_2}{[4\pi\epsilon_0]b_0} \sim \frac{1}{2}mv^2 \sim kT \quad (8.14)$$

dove l'ultima uguaglianza vale per particelle termalizzate. Per $b \gg b_0$ allora $\theta \sim e_1 e_2 / [4\pi\epsilon_0] b m v^2$ che è molto piccolo.

Nel caso di gas atomico o molecolare b_0 dà una misura, per ordine di grandezza, delle dimensioni delle particelle del gas, e definisce quindi una sezione d'urto

$$\sigma_{\perp} = \pi b_0^2 = \frac{\pi}{[4\pi\epsilon_0]^2} \frac{e_1^2 e_2^2}{(kT)^2} \quad (8.15)$$

Per una densità numerica del gas N , il libero cammino medio λ_{\perp} tra collisioni sarà

$$\lambda_{\perp} = \frac{1}{N\sigma_{\perp}} \simeq \frac{[4\pi\epsilon_0]^2}{\pi N} \left(\frac{kT}{e_1 e_2} \right)^2 \quad (8.16)$$

Infatti, per la definizione di λ_{\perp} , abbiamo che lungo λ_{\perp} non avvengono collisioni, quindi il volume $\lambda_{\perp} \cdot \sigma_{\perp}$ può contenere solamente una particella (altrimenti ci sarebbero collisioni!), quindi

$\lambda_{\perp} \cdot \sigma_{\perp} = 1/N$, da cui la (8.16). Mettendo i valori numerici delle costanti, per $e_1 = e_2 = e$ abbiamo

$$\lambda_{\perp} \simeq 7 \cdot 10^5 \frac{T^2}{N} \text{ cm} \quad (8.17)$$

Ad ogni istante, ogni particella carica deve interagire elettrostaticamente con le particelle del plasma contenute in una sfera di raggio λ_{Deb} . Questi urti lontani producono però solamente piccole deflessioni, dato che

$$\frac{\lambda_{\text{Deb}}}{b_0} \sim \frac{[4\pi\epsilon_0]kT\lambda_{\text{Deb}}}{e^2} \sim 4\pi N_0 \lambda_{\text{Deb}}^3 \gg 1$$

avendo usato (8.8) e (8.10). D'altro canto, ci sono così tante particelle in una sfera di Debye che l'effetto cumulativo dell'insieme di tutte le collisioni distanti è maggiore di quello degli incontri ravvicinati per $b \sim b_0$. Dato che questo è un punto importante, studiamo in dettaglio il caso in cui le particelle in interazione abbiano tutte la stessa massa $m_1 \sim m_2 \sim m$ (ad esempio il caso di urti elettrone-elettrone o ione-ione). Allora ogni particella avrà una velocità iniziale $\sim v$, ed in un urto distante la sua velocità aumenterà di

$$\Delta v_b \sim v\theta \sim \frac{e_1 e_2}{[4\pi\epsilon_0]m v b}$$

in una direzione ortogonale alla sua direzione di moto originale.

Poichè le particelle hanno la stessa massa, così come le stesse velocità (termiche) iniziali, allora possiamo metterci nel SdR del laboratorio (ma questo **non è vero nel caso più generale!**).

Per calcolare l'effetto totale di tutti gli urti distanti nel deviare una data particella sarà necessario sommare in maniera opportuna gli incrementi Δv_b su tutti i possibili valori di b . Dato che Δv_b può essere sia positivo che negativo, a seconda delle condizioni iniziali, è meglio considerare il suo quadrato.

Consideriamo ora un guscio cilindrico (si veda Figura 8.2) contenente N particelle nel volume $2\pi b db v dt$, dove dt è il tempo in cui una data particella "urta" con parametro di impatto b le N particelle.

Allora, il tasso di variazione di $(\Delta v)^2$ sarà

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta v)^2}{dt} &\sim N v \int (\Delta v_b)^2 2\pi b db \\ &= \frac{2\pi N e_1^2 e_2^2}{[4\pi\epsilon_0]^2 m^2 v} \ln\left(\frac{b_{\text{max}}}{b_{\text{min}}}\right) \end{aligned} \quad (8.18)$$

dove b_{max} e b_{min} sono il valore più grande e più piccolo di b che contribuiscono all'integrale, e di cui stabiliremo più tardi i valori.

Per potere stabilire l'importanza relativa degli urti con parametro di impatto grande e piccolo, è necessario associare un libero cammino medio al cambio di velocità (8.18), per poterlo poi confrontare con λ_{\perp} . A questo scopo definiamo un *tempo di deviazione*

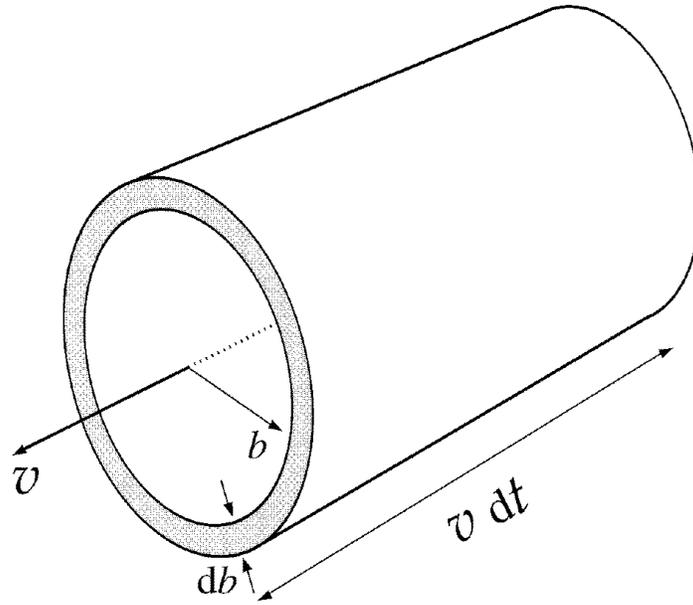


Figura 8.2: Definizione della geometria nel caso urti Coulombiani di una particella di plasma di velocità v .

$$t_d = \frac{v^2}{d(\Delta v)^2/dt} = \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m^2 v^3}{2\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \quad (8.19)$$

dove abbiamo usato la notazione standard $\Lambda = b_{\max}/b_{\min}$. Dalla sua definizione, il tempo di deviazione misura il tempo che intercorre prima che una particella del plasma di velocità v venga deviata in maniera significativa dalla sua traiettoria iniziale.

Associata al tempo di deviazione t_d viene definita la *lunghezza di deviazione* λ_d

$$\lambda_d = v t_d = \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m^2 v^4}{2\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \quad (8.20)$$

Confrontando Eq. 8.20 con (8.16), ed usando il fatto che $mv^2 \sim kT$, troviamo che

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_d} \sim \ln \Lambda \quad (8.21)$$

Quindi, urti distanti e a piccole deflessioni dominano urti ravvicinati e a grandi angoli se $\ln \Lambda > 1$. Vedremo ora che $\ln \Lambda$, detto *logaritmo di Coulomb* è normalmente dell'ordine di 10–20, e quindi tra tutte le possibili collisioni sono quelle a piccoli angoli che danno il contributo maggiore.

Innanzitutto, dato che siamo interessati al logaritmo di Λ , sarà sufficiente ottenere una stima di Λ , senza dover entrare troppo nel dettaglio. Come primo tentativo, potremmo prendere per b_{\min} la distanza di massimo avvicinamento b_0 data dall'Eq. 8.14.

Bisogna però stare attenti a non violare il principio di indeterminazione, secondo il quale non è possibile conoscere simultaneamente la posizione ed il momento di una particella con incertezze minori di Δx e Δp tali che

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

Quindi non possiamo porre $b_{\min} = b_0$ se quest'ultimo è minore di

$$b_{\min}(MQ) \sim \frac{\hbar}{\Delta p} \sim \frac{\hbar}{mv} \quad (8.22)$$

dove abbiamo usato $\Delta p \sim mv$. Equazione 8.22 dà b_{\min} come la lunghezza d'onda di de Broglie di una particella di momento mv . In generale, quindi, avremo che

$$b_{\min} = \max \left\{ \frac{\hbar}{mv}, \frac{2e_1 e_2}{[4\pi\epsilon_0]mv^2} \right\} \quad (8.23)$$

quindi b_{\min} avrà il suo valore classico b_0 a meno che

$$v \lesssim \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]\hbar c} c = \frac{c}{137} \quad (8.24)$$

Per ricavarci una stima di b_{\max} ricordiamoci che il plasma reagisce a perturbazioni nella carica in un tempo caratteristico $1/v_p$ (dato da Eq. 8.6). Quindi, il plasma riesce a schermare il campo Coulombiano di ogni particella il cui tempo di interazione $\sim b/v$ sia maggiore di $1/v_p$. Quindi possiamo ragionevolmente porre

$$b_{\max} = \frac{v}{v_p}$$

Ovviamente, se v è la velocità termica degli elettroni v_e , otteniamo

$$b_{\max} = \lambda_{\text{Deb}}$$

come deve essere. Dato che per plasmi astrofisici le particelle hanno $mv^2 \sim kT$, allora il logaritmo di Coulomb avrà valore

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{\lambda_{\text{Deb}}}{b_0} \right)$$

che può essere scritta, utilizzando l'espressione numerica per λ_{Deb} data da Eq. 8.9

$$\ln \Lambda \simeq 10 + 3.45 \log T - 1.15 \log N_e \quad (8.25)$$

con N_e misurato in cm^{-3} . È facile verificare come $\ln \Lambda$ sia nell'intervallo 10–20 per plasmi di interesse astrofisico. Questo quindi dimostra come l'effetto di molti urti deboli e distanti sia più importante di urti forti e ravvicinati.

Si noti inoltre come $\ln \Lambda$ sia estremamente insensibile agli errori sulle stime di b_{\min} e b_{\max} : se $\ln \Lambda = 15$, allora anche un errore su Λ di un fattore 100 produce $\ln \Lambda$ nell'intervallo 10–20. Quindi (8.25) dà una stima ragionevole, anche se (8.24) non dovesse essere soddisfatta.

8.4 Plasmi termici: tempo di rilassamento e libero cammino medio

Vediamo ora di applicare i nostri risultati sugli urti tra particelle ad un plasma in cui le particelle hanno velocità termiche. Per semplificare non effettueremo la somma su tutte le possibili velocità delle particelle che contribuiscono agli urti, ma **porremo** $mv^2 \sim kT$. Questo ci fornirà il corretto ordine di grandezza per λ_d , la lunghezza di deviazione definita in (8.20).

E' bene evidenziare come, in generale, sia necessaria una analisi dell'evoluzione temporale della distribuzione di velocità risolvendo l'equazione di Fokker-Planck. Questo è particolarmente vero per la determinazione del tempo di scambio energetico t_E nel caso di particelle veloci (sopratermiche) che vedremo nel seguito.

Comunque, ponendo $mv^2 \sim kT$ nella (8.20) abbiamo che per particelle di massa comparabile

$$\lambda_d \simeq \frac{7 \cdot 10^5}{\ln \Lambda} \frac{T^2}{N} \text{ cm} \quad (8.26)$$

Una importante proprietà di (8.26) è la sua indipendenza dalla massa delle particelle, quindi la distanza media attraversata prima che la particella subisca un urto è la stessa per gli elettroni e per gli ioni. Questo però non è vero per il tempo di deviazione: infatti il tempo di deviazione $t_d(e-e)$ per elettroni con elettroni è $\sqrt{m_p/m_e} \sim 43$ volte più breve di quello di ioni con ioni, ma questo è compensato dalla maggiore velocità degli elettroni.

Nel caso di particelle con masse diverse (come nel caso di urti elettroni con ioni), si può dimostrare che le equazioni (8.19) e (8.20) valgono ancora con m dell'ordine della massa più piccola e v dell'ordine della velocità termica più grande. Quindi, nel caso di urti elettrone-ione avremo $m \sim m_e$ e $v \sim (kT/m_e)^{1/2}$

$$t_d(e-i) \sim \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m_e^{1/2} (kT)^{3/2}}{2\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \sim t_d(e-e) \quad (8.27)$$

Quindi gli urti elettrone-ione avvengono allo stesso tasso degli urti elettrone-elettrone. Può essere utile, a questo punto, definire una frequenza d'urto (elettronica)

$$v_c \sim \frac{1}{t_d(e-i)} \simeq 2 \ln \Lambda Z^2 N_e T^{-3/2} \text{ sec}^{-1} \quad (8.28)$$

con N_e misurato in cm^{-3} e Ze la carica media degli ioni. Analogamente definiamo la frequenza d'urto ione-ione

$$v_c(i-i) \sim \frac{1}{t_d(i-i)} \simeq 5 \cdot 10^{-2} \ln \Lambda Z^4 N_e T^{-3/2} \text{ sec}^{-1} \quad (8.29)$$

Finora abbiamo considerato soltanto *deflessioni* delle traiettorie di particelle del plasma: il tempo-scala t_d dà una misura approssimata del tempo necessario affinché una distribuzione di velocità inizialmente anisotropa venga resa isotropa (termalizzazione). Alla fine però ogni distribuzione iniziale di velocità deve tendere alla distribuzione di equilibrio di Maxwell-Boltzmann.

Il tempo-scala affinché questo accada è detto *tempo-scala di scambio energetico* t_E :

$$t_E = \frac{E^2}{d(\Delta E)^2/dt} \quad (8.30)$$

dove E è l'energia di una particella di prova, e ΔE è la variazione di energia durante gli urti (si veda Eq. 8.19).

Si noti che, a priori, non c'è alcuna ragione per cui t_E sia uguale a t_d : infatti nel SdR del centro di massa avviene una deflessione delle traiettorie θ ma nessun scambio di energia, dato che le velocità delle particelle non cambiano prima e dopo l'urto.

Un importante esempio che mette in luce questa differenza è il caso degli urti elettrone-ione in un plasma in equilibrio termico: in questo caso $m_e \ll m_p$ ed il SdR nel centro di massa differisce da quello del laboratorio soltanto per una velocità $v_{CM} \simeq (m_e/m_p)^{1/2} v_i \ll v_i$ (si veda (8.12)). Per il fatto che non viene scambiata energia nel SdR del centro di massa, abbiamo che il massimo trasferimento nel SdR del laboratorio si ha in un urto frontale, ed è uguale a

$$\Delta E = 2m_i v_{CM}^2 \simeq 2m_e v_i^2$$

e quindi

$$\frac{\Delta E}{\frac{1}{2}m_i v_i^2} \sim \frac{m_e}{m_i} \ll 1 \quad (8.31)$$

Quindi le collisioni tra elettroni e ioni non sono molto efficienti nel trasferire energia. Come abbiamo visto in precedenza (vedi Eq. 8.27), il tasso di collisione elettrone-ione ed elettrone-elettrone sono simili, ma una differenza nell'energia media tra elettroni e ioni verrà livellata dalle collisioni in un tempo $\sim m_i/m_e \sim m_p/m_e \sim 1836$ volte più lungo rispetto ad una stessa differenza tra le energie degli elettroni. Per urti tra particelle di massa e velocità simili ci aspettiamo che $t_E \sim t_d$, quindi dalle loro definizioni (8.28) e (8.29) ci aspettiamo che i tempi di rilassamento necessari per stabilire, da una condizione iniziale di non-equilibrio, (i) una distribuzione termica per gli elettroni, (ii) una distribuzione termica per gli ioni, (iii) una equipartizione di energia tra elettroni e ioni siano nel rapporto

$$t_E(e-e) : t_E(i-i) : t_E(e-i) = 1 : \left(\frac{m_p}{m_e}\right)^{1/2} : \left(\frac{m_p}{m_e}\right) \quad (8.32)$$

Quindi, i primi a raggiungere l'equilibrio sono gli elettroni, seguiti dagli ioni, ed infine avviene l'equipartizione. Questo comportamento è particolarmente importante nello studio delle onde d'urto, che vedremo in seguito.

Capitolo 9

Processi Radiativi

9.1 Introduzione

Nel Capitolo 2 abbiamo introdotto l'equazione del trasporto radiativo (7.7), che qui riscriviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu &= -\mu_\nu I_\nu + j_\nu \\ &= -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \end{aligned} \quad (9.1)$$

dove μ_ν è il coefficiente di assorbimento, j_ν il coefficiente di emissione (energia emessa per unità di tempo, per unità di angolo solido, per unità di volume in direzione \mathbf{n}), ed abbiamo introdotto la quantità κ_ν , detta opacità specifica e definita come $\mu_\nu = \kappa_\nu \rho$.

Abbiamo inoltre introdotto il concetto di funzione sorgente S , definita come il rapporto tra i coefficienti di emissione e di assorbimento; ed il concetto di profondità ottica τ_ν (vedi Eq. 7.8) che ci ha permesso di definire un mezzo *otticamente spesso* (*opaco*) quando τ_ν integrato lungo un percorso tipico attraverso il mezzo soddisfa $\tau_\nu > 1$.

Al contrario, quando $\tau_\nu < 1$ il mezzo è detto *otticamente sottile* (*trasparente*).

Un concetto che si dimostra utile nella trattazione del trasporto radiativo è quello di *libero cammino medio*, definito come la distanza media che un fotone riesce a percorrere prima di essere assorbito dalla materia in cui si muove. Come abbiamo già visto (si veda Eq. 7.13), la probabilità che un fotone attraversi almeno una profondità ottica τ_ν è semplicemente $e^{-\tau_\nu}$. La profondità ottica *media* è quindi uguale all'unità

$$\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1$$

La distanza media attraversata in un mezzo omogeneo è definita *libero cammino medio* l_ν ed è data da $\langle \tau_\nu \rangle = \mu_\nu l_\nu = 1$, o equivalentemente

$$l_\nu = \frac{1}{\mu_\nu} = \frac{1}{N\sigma_\mu} \quad (9.2)$$

In altre parole, il libero cammino medio, per un mezzo omogeneo, non è altro che il reciproco del coefficiente di assorbimento.

9.2 Processo di scattering

Nel caso di pura emissione termica la quantità di radiazione emessa da un elemento di materiale **NON** dipende dal campo di radiazione incidente: la funzione sorgente è sempre $B_\nu(T)$. Questo elemento emetterà lo stesso spettro sia che si trovi isolato nello spazio sia che si trovi immerso all'interno una stella dove il campo di radiazione ambientale è preponderante.

Esiste però un altro processo di emissione molto comune in astrofisica (e non solo), detto *scattering*, che dipende completamente dalla quantità di radiazione che cade sull'elemento. Se la radiazione "scatterata" è emessa in maniera isotropa sull'angolo solido, così che il coefficiente di emissione è indipendente dalla direzione, si parla di *scattering isotropo*.

Se la quantità totale di radiazione **emessa** per unità di frequenza è uguale alla quantità totale di radiazione **assorbita** nello stesso intervallo di frequenza si parla di *scattering coerente (elastico o monocromatico)*.

Il coefficiente di emissione per scattering isotropo e coerente può essere trovato eguagliando la potenza assorbita per unità di volume:

$$j_\nu = \sigma_\nu J_\nu \quad (9.3)$$

dove σ_ν è il coefficiente di assorbimento del processo di scattering, a volte chiamato *coefficiente di scattering*. La funzione sorgente per il processo di scattering è dunque

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\mu_\nu} = \frac{j_\nu}{\sigma_\nu} = J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega \quad (9.4)$$

L'equazione del trasporto per il processo di scattering diventa quindi

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\sigma_\nu(I_\nu - J_\nu) \quad (9.5)$$

Questa è un'equazione integro-differenziale, la cui soluzione da un punto di vista matematico è alquanto complessa.

L'emissione e l'assorbimento di radiazione può essere governata da più di un processo: ad esempio, consideriamo il caso di un materiale con coefficiente di assorbimento μ_ν descrivente emissione termica e coefficiente di scattering σ_ν descrivente scattering coerente isotropo. L'equazione del trasporto avrà allora due termini

$$\begin{aligned} \frac{dI_\nu}{ds} &= -\mu_\nu(I_\nu - B_\nu) - \sigma_\nu(I_\nu - J_\nu) \\ &= -(\mu_\nu + \sigma_\nu)(I_\nu - S_\nu) \end{aligned} \quad (9.6)$$

La funzione sorgente

$$S_\nu = \frac{\mu_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\mu_\nu + \sigma_\nu} \quad (9.7)$$

è una media di due funzioni sorgenti separate, pesate per i loro rispettivi coefficienti di assorbimento.

Il coefficiente di assorbimento netto è $\mu_\nu + \sigma_\nu$, che può essere usato per definire la profondità ottica $d\tau_\nu = (\mu_\nu + \sigma_\nu)ds$.

Questo coefficiente di assorbimento netto è chiamato *coefficiente di estinzione*, per distinguerlo dal coefficiente di assorbimento “vero” μ_ν . Se un elemento di materia si trova all’interno di un mezzo ad una temperatura costante, ci aspettiamo che il campo di radiazione si trovi prossimo al valore termodinamico $J_\nu = B_\nu(T)$. Se invece l’elemento si trova isolato nello spazio libero, allora $J_\nu = 0$, e quindi la funzione sorgente è $S_\nu = \mu_\nu B_\nu / (\mu_\nu + \sigma_\nu)$, una frazione della funzione di Planck.

9.3 Random walk

Un modo particolarmente utile di studiare lo scattering è per mezzo del cosiddetto *random walk*. E’ possibile studiare i processi di assorbimento, emissione, e propagazione in termini probabilistici per un singolo fotone piuttosto che studiare il comportamento medio di un gran numero di fotoni, come abbiamo fatto finora. Ad esempio, il decadimento esponenziale di un fascio di fotoni può essere interpretato come il fatto che la probabilità di un fotone che attraversa un mezzo di profondità ottica τ_ν di essere assorbito è data da $\exp(-\tau_\nu)$.

Consideriamo ora un fotone emesso in una regione omogenea ed infinita che subisca scattering. Esso attraverserà una distanza r_1 prima di subire un altro scattering e viaggiare una distanza r_2 prima di subire un altro scattering e viaggiare una distanza r_3 , ecc. Lo spostamento totale del fotone dopo N cammini sarà

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \cdots + \mathbf{r}_N \quad (9.8)$$

Per trovare una stima della distanza attraversata dal fotone $|\mathbf{R}|$ non possiamo fare la media di (9.8), dato che questa sarà nulla. Se quadriamo però la (9.8) e poi prendiamo la media otterremo lo spostamento quadratico medio l_*^2

$$\begin{aligned} l_*^2 \equiv \langle \mathbf{R}^2 \rangle &= \langle \mathbf{r}_1^2 \rangle + \langle \mathbf{r}_2^2 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{r}_N^2 \rangle \\ &+ 2\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \rangle + 2\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 \rangle + \cdots \\ &+ \cdots \end{aligned} \quad (9.9)$$

Ogni termine $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ avrà come valore il quadrato del tipico cammino del fotone, che indicheremo con l^2 , e che corrisponde al quadrato del libero cammino medio. I termini con i prodotti incrociati coinvolgono medie del coseno dell’angolo tra le direzioni prima e dopo lo scattering, e queste devono essere nulle per scattering isotropo. Quindi la (9.9) diventa

$$\begin{aligned} l_*^2 &= Nl^2 \\ l_* &= \sqrt{N} l \end{aligned} \quad (9.10)$$

Questo risultato può essere usato per stimare il numero medio di scattering in un mezzo finito. Supponiamo che un fotone sia generato da qualche parte in un mezzo; allora il fotone subirà scattering fino a quando non riuscirà ad uscire completamente. Per regioni che hanno una profondità

ottica grande allora $l_* \sim L$, la dimensione tipica del mezzo. Da Eq. 9.10 abbiamo che $N \simeq L^2/l^2$. Dato che l è dell'ordine del libero cammino medio, L/l dà una misura dello spessore ottico del mezzo, quindi

$$N \simeq \tau^2 \quad (\tau \gg 1) \quad (9.11)$$

Per regioni di profondità ottica piccola, invece, il numero medio di scattering sarà dell'ordine di $1 - e^{-\tau} \simeq \tau$, quindi

$$N \simeq \tau \quad (\tau \ll 1) \quad (9.12)$$

Per stime per ordine di grandezza, è sufficiente usare $N \simeq \tau^2 + \tau$ o $N \simeq \max(\tau, \tau^2)$ valide per ogni profondità ottica τ .

Riprendendo il caso in cui siano presenti contemporaneamente scattering ed assorbimento, il cammino che un fotone può percorrere è in questo caso determinato dal coefficiente di estinzione $\mu_v + \sigma_v$. Il libero cammino medio prima che un fotone subisca scattering o assorbimento sarà quindi (vedi Eq. 9.2)

$$l_v = \frac{1}{\mu_v + \sigma_v} \quad (9.13)$$

Durante un random walk, la probabilità che un fotone venga assorbito sarà (si veda Eq. 9.7)

$$\varepsilon_v = \frac{\mu_v}{\mu_v + \sigma_v} \quad (9.14)$$

mentre la corrispondente probabilità che venga scatterato sarà

$$1 - \varepsilon_v = \frac{\sigma_v}{\mu_v + \sigma_v} \quad (9.15)$$

La quantità $1 - \varepsilon_v$ viene detta *albedo per scattering singolo*. In questo caso la funzione sorgente può essere scritta

$$S_v = (1 - \varepsilon_v)J_v + \varepsilon_v B_v \quad (9.16)$$

Vediamo di calcolare ora il numero medio di scattering. Nel caso di un mezzo infinito un random walk inizia con l'emissione termica di un fotone e termina con il suo assorbimento dopo un certo numero di scattering. Dato che il cammino può essere terminato con probabilità ε alla fine di ogni cammino libero, il numero di cammini liberi sarà $N = \varepsilon^{-1}$. Da Eq. 9.10 allora abbiamo che

$$l_*^2 = \frac{l^2}{\varepsilon} \quad (9.17)$$

$$l_* = \frac{l}{\sqrt{\varepsilon}}$$

che, utilizzando (9.13) e (9.14) diventa

$$l_* \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_\nu(\mu_\nu + \sigma_\nu)}} \quad (9.18)$$

La lunghezza l_* fornisce una stima dello spostamento effettivo netto tra il punto in cui un fotone viene creato ed il punto in cui un fotone viene assorbito, e viene chiamata indifferentemente *lunghezza di diffusione*, lunghezza di termalizzazione o libero cammino effettivo. Si noti come l_* sia dipendente dalla frequenza.

Nel caso di un mezzo finito, il suo comportamento varierà a seconda che la sua dimensione caratteristica L sia maggiore o minore del libero cammino effettivo l_* . Per descrivere quantitativamente queste differenze di comportamento, è conveniente introdurre lo *spessore ottico effettivo* $\tau_* \equiv L/l_*$.

Utilizzando Eq. 9.18 avremo che

$$\tau_* \equiv \frac{L}{l_*} \simeq \sqrt{\tau_a(\tau_a + \tau_s)} \quad (9.19)$$

dove gli spessori ottici di assorbimento τ_a e di scattering τ_s sono definiti

$$\tau_a = \mu_\nu L; \quad \tau_s = \sigma_\nu L \quad (9.20)$$

Quando il cammino libero effettivo è grande rispetto alla dimensione del mezzo avremo che

$$\tau_* \ll 1 \quad (9.21)$$

ed il mezzo è detto *effettivamente sottile (traslucido)*. In questo caso la maggior parte dei fotoni riusciranno a scappare per random walk prima di essere distrutti da assorbimento. Quando il cammino libero effettivo è invece piccolo rispetto alla dimensione del mezzo avremo che

$$\tau_* \gg 1 \quad (9.22)$$

ed il mezzo è detto *effettivamente spesso*.

La maggior parte dei fotoni emessi termicamente a profondità maggiori del libero cammino effettivo verranno distrutti per assorbimento prima di poter uscire dal mezzo. Quindi le condizioni fisiche del mezzo per grandi profondità effettive approssimeranno le condizioni in cui la materia è in equilibrio termico con la radiazione, per cui $I_\nu \rightarrow B_\nu$ e $S_\nu \rightarrow B_\nu$. E' per questa proprietà che l_* viene detta lunghezza di termalizzazione.

9.4 Bremsstrahlung

Particelle che attraversano la materia subiscono scattering e perdono energia per urto. In questi urti le particelle sono soggette ad accelerazioni, quindi emettono a loro volta radiazione elettromagnetica. La radiazione emessa durante urti atomici, cioè dovuta alla accelerazione di una carica in un campo Coulombiano di un'altra carica, è chiamata *bremsstrahlung* od anche *radiazione di frenamento*. Questo nome le deriva dal fatto che fu osservata la prima volta con elettroni di alta energia frenati in una spessa lastra di metallo. Un trattamento rigoroso di questo processo

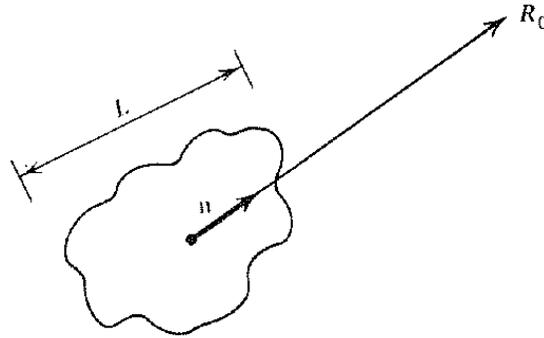


Figura 9.1: Campo di radiazione per un mezzo di dimensione L .

richiede l'uso della meccanica quantistica, dato che possono essere prodotti fotoni con energie dello stesso ordine di grandezza di quelle delle particelle in gioco. Comunque con un trattamento classico del processo si ottiene la corretta dipendenza funzionale per la maggior parte dei parametri fisici. Le correzioni quantistiche verranno incorporate in fattori correttivi (detti fattori di Gaunt) alle formule classiche.

Si può dimostrare che la radiazione di bremsstrahlung dovuta a collisioni di particelle dello stesso tipo (elettrone-elettrone o ione-ione) è zero. Quindi radiazione verrà prodotta da collisioni elettrone-ione, in cui gli elettroni sono la principale fonte di radiazione, dato che le accelerazioni relative sono inversamente proporzionali alle masse.

Inoltre, dato che gli ioni hanno masse molto maggiori di quella dell'elettrone, potremo trattare l'elettrone come in movimento nel campo Coulombiano fisso dello ione.

Per ricavarci lo spettro della radiazione di bremsstrahlung ricordiamo che quando si trattano cariche in movimento il campo elettrico può essere scomposto in due termini: il primo termine, detto *campo di velocità*, che ha andamento $\propto r^{-2}$, altro non è che la generalizzazione della legge di Coulomb per cariche in movimento. Il secondo termine, detto *campo di radiazione*, ha andamento $\propto r^{-1}$ ed è proporzionale alla accelerazione della particella che, nella cosiddetta approssimazione di dipolo, ha espressione

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \ddot{\mathbf{d}})}{c^2 R_0} \quad (9.23)$$

dove \mathbf{n} è il versore che unisce la particella al punto R_0 dove si calcola il campo, e \mathbf{d} è il momento di dipolo

$$\mathbf{d} = \sum q_i \mathbf{r}_i \quad (9.24)$$

delle cariche q_i (vedi Figura 9.1).

In questa approssimazione abbiamo che l'energia emessa per unità di tempo per unità di angolo solido è

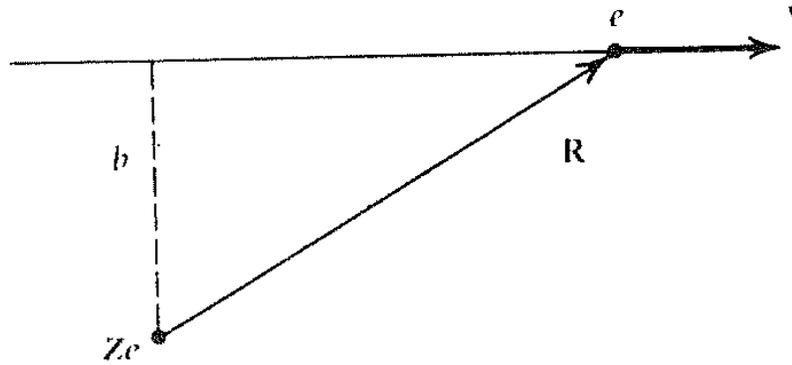


Figura 9.2: Definizione della geometria per un elettrone e che si muove nel campo di radiazione dello ione di carica Ze .

$$\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta \quad (9.25)$$

che integrata sull'angolo solido mi dà la potenza emessa

$$P \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{c^3} \quad (9.26)$$

Come abbiamo già visto, sono le collisioni a piccolo angolo di deflessione ed a grande parametro di impatto b che contribuiscono all'emissione. Se quindi consideriamo un elettrone di carica $-e$ che collide a grande distanza con uno ione di carica Ze (vedi Figura 9.2), allora il momento di dipolo sarà $\mathbf{d} = -e\mathbf{R}$, e la sua derivata seconda (da porre in Eq. 9.25) è

$$\ddot{\mathbf{d}} = -e\dot{\mathbf{v}} \quad (9.27)$$

dove \mathbf{v} è la velocità dell'elettrone. E' possibile fare vedere come

$$\frac{dE}{d\omega} = \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi c^3} |\Delta\mathbf{v}|^2 & \omega\tau_c \ll 1 \\ 0 & \omega\tau_c \gg 1 \end{cases} \quad (9.28)$$

dove $\Delta\mathbf{v}$ è la variazione di velocità che avviene nella collisione, $\tau_c = b/v$ è il tempo di collisione in cui l'elettrone e lo ione sono in interazione, e $\omega = 2\pi\nu$.

Dato che consideriamo deflessioni piccole, il cambio di velocità avverrà perpendicolarmente alla direzione di moto, quindi (si veda la dimostrazione completa in Appendice C a pagina 185)

$$\Delta\mathbf{v} = \frac{Ze^2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2Ze^2}{mbv} \quad (9.29)$$

Quindi l'emissione da una singola collisione sarà

$$\frac{dE(b)}{d\omega} = \begin{cases} \frac{8Z^2 e^6}{3\pi c^3 m^2 v^2 b^2} & b \ll v/\omega \\ 0 & b \gg v/\omega \end{cases} \quad (9.30)$$

Possiamo ora ricavarci lo spettro totale per un mezzo composto da N_i ioni per unità di volume e N_e elettroni per unità di volume che si muovono a velocità v . Si noti come il flusso di elettroni (elettroni per unità di tempo per unità di area) incidente su di uno ione non è altro che $N_e v$. L'elemento di area attorno ad uno ione è $2\pi b db$, quindi l'emissione totale per unità di tempo per unità di volume per unità di frequenza è

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = N_i N_e 2\pi v \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{dE(b)}{d\omega} b db \quad (9.31)$$

dove b_{\min} e b_{\max} sono il minimo e massimo valore del parametro di impatto, discussi nel Capitolo 3. Sostituendo (9.30) in (9.31) otteniamo

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = \frac{16e^6}{3c^3 m^2 v} N_i N_e Z^2 \ln \Lambda \quad (9.32)$$

Quando per b_{\min} è necessario prendere il valore $b_{\min}(MQ)$ (vedi Eq. 8.22), la trattazione classica non è più valida. Il risultato esatto di Eq. 9.32 viene espresso in termini di un fattore correttivo, detto *fattore di Gaunt* g_{ff} :

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3 m^2 v} N_i N_e Z^2 g_{ff}(v, \omega) \quad (9.33)$$

da cui si vede, confrontando (9.32) con (9.33) che

$$g_{ff}(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \Lambda \quad (9.34)$$

Il fattore di Gaunt (9.34) è una certa funzione dell'energia dell'elettrone e della frequenza di emissione. I suoi valori sono tabulati e reperibili in letteratura.

9.4.1 Bremsstrahlung termico

L'uso più interessante delle formule appena trovate è la loro applicazione al caso in cui la distribuzione delle velocità degli elettroni sia termica. Quello che quindi faremo sarà di mediare le espressioni trovate qui sopra per una singola velocità su di una distribuzione termica di velocità. La probabilità dP che una particella abbia una velocità nell'intervallo d^3v è

$$dP \propto e^{-E/kT} d^3v = \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d^3v$$

Dato però che per una distribuzione isotropa delle velocità abbiamo che $d^3v = 4\pi v^2 dv$, la probabilità che una particella abbia velocità nell'intervallo dv è

$$dP \propto v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv \quad (9.35)$$

Quello che ora bisogna fare è integrare Eq. 9.33 su questa funzione. Quali sono i limite di integrazione? A prima vista sembrerebbe $0 \leq v < \infty$, ma ad una frequenza ν la velocità incidente deve essere almeno tale che

$$h\nu \leq \frac{1}{2}mv^2$$

altrimenti un fotone di energia $h\nu$ non potrebbe essere creato. Questo limite di integrazione sulle velocità degli elettroni è detto *photon discreteness effect*. L'integrale diventa

$$\frac{dE(T, \omega)}{dV dt d\omega} = \frac{\int_{v_{\min}}^{\infty} \frac{dE(v, \omega)}{d\omega dV dt} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}{\int_0^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}$$

dove $v_{\min} \equiv \sqrt{2h\nu/m}$. Dato che $d\omega = 2\pi d\nu$ otteniamo

$$\frac{dE(T, \omega)}{dV dt d\nu} = \frac{2^5 \pi e^6}{3mc^3} \left(\frac{2\pi}{3km}\right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \bar{g}_{\text{ff}} \quad (9.36)$$

Nel caso di emissione abbiamo che il coefficiente di emissione j_ν definito in Eq. 7.7 in unità di $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{Hz}^{-1}$ è dato da

$$4\pi j_\nu \equiv \frac{dE(T, \omega)}{dV dt d\nu} = 6.8 \cdot 10^{-38} Z^2 N_i N_e T^{-1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \bar{g}_{\text{ff}} \quad (9.37)$$

Il termine $\bar{g}_{\text{ff}}(T, \nu)$ è chiamato fattore di Gaunt *mediato in velocità*.

Il fattore $T^{-1/2}$ risulta dal fatto che $dE/dV dt d\omega \propto v^{-1}$ (vedi Eq. 9.33) e $\langle v \rangle \propto T^{1/2}$. Il termine $\exp(-h\nu/kT)$ viene dal limite di integrazione sulla velocità ed alla forma della distribuzione termica delle velocità.

E' possibile far vedere come $\bar{g}_{\text{ff}} \sim 1$ per $u = h\nu/kT \sim 1$, ed è 1-5 per $10^{-4} < u < 1$. Quindi una buona stima dell'ordine di grandezza di \bar{g}_{ff} è l'unità.

Si noti come lo spettro di bremsstrahlung sia abbastanza "piatto" (in un grafico log-log) fino al suo cutoff a circa $h\nu \sim kT$ (in realtà questo è vero solamente per sorgenti otticamente sottili).

Per ottenere l'espressione per bremsstrahlung *non termico* è necessario conoscere la distribuzione di velocità, e la formula per l'emissione per un elettrone a singola velocità deve essere mediata su quella distribuzione.

Possiamo ora anche ottenere la potenza totale per unità di volume emessa per bremsstrahlung termico. Basta integrare in frequenza Eq. 9.36

$$\frac{dE}{dt dV} = \left(\frac{2\pi kT}{3m}\right)^{1/2} \frac{2^5 \pi e^6}{3hmc^3} Z^2 N_i N_e \bar{g}_B \quad (9.38)$$

che numericamente è uguale a (unità di $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-3}$)

$$4\pi j = \frac{dE}{dt dV} = 1.4 \cdot 10^{-27} T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \bar{g}_B \quad (9.39)$$

Il termine $\bar{g}_B(T)$ è il fattore di Gaunt *mediato in frequenza e mediato in velocità*, il quale è nell'intervallo 1.1–1.5. Prendendo il valore di 1.2 si ottiene una accuratezza di circa il 20%.

9.4.2 Assorbimento per bremsstrahlung termico

Dalla legge di Kirchhoff (7.11) abbiamo che

$$j_\nu^{\text{ff}} = \mu_\nu^{\text{ff}} B_\nu(T)$$

dove μ_ν^{ff} è il coefficiente di assorbimento libero-libero. Usando l'espressione (7.10) per la funzione di Planck abbiamo che

$$\mu_\nu^{\text{ff}} = \frac{4e^6}{3mhc} \left(\frac{2\pi}{3km} \right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-3} (1 - e^{-h\nu/kT}) \bar{g}_{\text{ff}} \quad (9.40a)$$

$$= 3.7 \cdot 10^8 T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-3} (1 - e^{-h\nu/kT}) \bar{g}_{\text{ff}} \text{ cm}^{-1} \quad (9.40b)$$

Per $u \gg 1$ l'esponenziale è trascurabile, e μ_ν è proporzionale a ν^{-3} . Per $u \ll 1$ siamo nel regime di Rayleigh-Jeans e Eq. 9.40 diventa

$$\mu_\nu^{\text{ff}} = \frac{4e^6}{3mhc} \left(\frac{2\pi}{3km} \right)^{1/2} T^{-3/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-2} \bar{g}_{\text{ff}} \quad (9.41a)$$

$$= 0.018 T^{-3/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-2} \bar{g}_{\text{ff}} \text{ cm}^{-1} \quad (9.41b)$$

9.5 Scattering Compton

9.5.1 Scattering da elettroni a riposo

Consideriamo il caso di scattering di fotoni da parte di elettroni che si trovino a riposo. Nel caso in cui l'energia del fotone $h\nu \ll mc^2$, ci ritroviamo nel caso classico di scattering Thomson, in cui

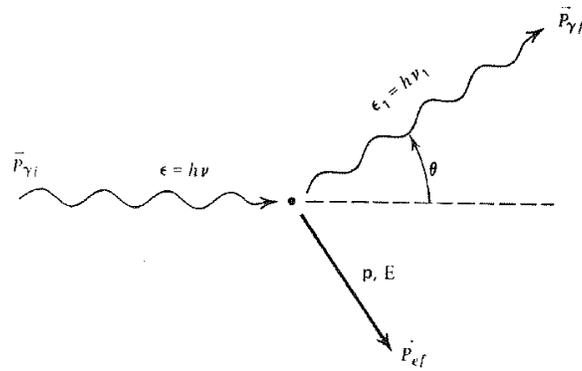


Figura 9.3: Definizione della geometria per un lo scattering di un fotone da parte di un elettrone inizialmente a riposo.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \quad (9.42a)$$

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (9.42b)$$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (9.42c)$$

dove ε e ε_1 sono l'energia del fotone incidente e scatterato, $d\sigma_T/d\Omega$ è la sezione d'urto Thomson differenziale per radiazione incidente non polarizzata, e $r_0 = e^2/mc^2$ è il raggio classico dell'elettrone. Quando $\varepsilon = \varepsilon_1$ lo scattering è detto *coerente* o *elastico*.

Effetti quantistici hanno due effetti: (i) modificano la cinematica del processo di scattering e (ii) modificano le sezioni d'urto.

Gli effetti cinematici avvengono perché un fotone possiede, oltre la sua energia $\varepsilon = h\nu$, anche una quantità di moto \mathbf{p} , con $|\mathbf{p}| = \varepsilon/c$. Lo scattering quindi non sarà più elastico a causa del rinculo della carica. Consideriamo il sistema in cui un fotone di energia ε incide su di un elettrone a riposo il quale, dopo l'urto, avrà acquistato una velocità \mathbf{v} (vedi Figura 9.3).

Dalla legge di conservazione dell'energia prima e dopo l'urto avremo che

$$\varepsilon + mc^2 = \varepsilon' + c\sqrt{m^2c^2 + p_e^2}$$

mentre dalla conservazione della quantità di moto abbiamo che

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$$

Dalla seconda segue $\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$, che quadrando e sostituendo nella prima

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{mc^2}(1 - \cos \theta)} \quad (9.43)$$

che può essere riscritta in termini della lunghezza d'onda come

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) = \lambda_c(1 - \cos \theta) \quad (9.44)$$

dove $\lambda_c = 2.4 \cdot 10^{-10}$ cm è detta lunghezza d'onda Compton. Vediamo quindi che compare una variazione in lunghezza d'onda dell'ordine di λ_c durante uno scattering Compton. Per lunghezze d'onda $\lambda \gg \lambda_c$ (cioè $h\nu \ll mc^2$) lo scattering è elastico, e quindi non c'è variazione nell'energia del fotone nel SdR dell'elettrone.

Diamo ora una descrizione qualitativa degli effetti quantistici sulla sezione d'urto. Si può far vedere che la sezione d'urto differenziale per radiazione non polarizzata in elettrodinamica quantistica è data dalla formula di *Klein-Nishina*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} - \sin^2 \theta \right) \quad (9.45)$$

Si noti che per $\varepsilon_1 \simeq \varepsilon$ questa si riduce all'espressione classica (9.42b). Il principale effetto che si può ricavare dall'espressione quantistica (9.45) è che all'aumentare dell'energia del fotone la sezione d'urto si riduce rispetto a quella classica (9.42b). Quindi lo scattering Compton diventa meno efficiente all'aumentare dell'energia. La sezione d'urto totale ha l'espressione

$$\sigma = \sigma_T \frac{3}{4} \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[\frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\} \quad (9.46)$$

dove $x \equiv h\nu/mc^2$. Nel regime non relativistico abbiamo che

$$\sigma \simeq \sigma_T \left(1 - 2x + \frac{26x^2}{5} + \dots \right) \quad x \ll 1 \quad (9.47)$$

mentre nel regime relativistico abbiamo

$$\sigma \simeq \frac{3}{8} \sigma_T x^{-1} \left(\ln 2x + \frac{1}{2} \right) \quad x \gg 1 \quad (9.48)$$

9.5.2 Scattering da elettroni in movimento

Nella sezione precedente abbiamo considerato il caso che gli elettroni che fanno da diffusori per la radiazione fossero in quiete. Trattiamo ora il caso in cui gli elettroni posseggono una propria velocità. Assumeremo che nel SdR dell'elettrone i fotoni abbiano $h\nu \ll mc^2$, in modo da poter trascurare le correzioni quantistiche nella sezione d'urto di Klein-Nishina.

Se l'elettrone in movimento possiede sufficiente energia cinetica rispetto al fotone, è possibile che sia l'elettrone a trasferire energia al fotone. In questo caso si parla di **scattering Compton inverso**.

Siano ora K il SdR del laboratorio (osservatore) e sia K' il SdR in cui l'elettrone si trovi a riposo. L'evento di scattering visto nei due SdR è mostrato in Figura 9.4. Si noti che tutte le formule ricavate nella sezione precedente dovrebbero essere riscritte in forma primata, dato che valgono nel SdR in cui l'elettrone è a riposo.

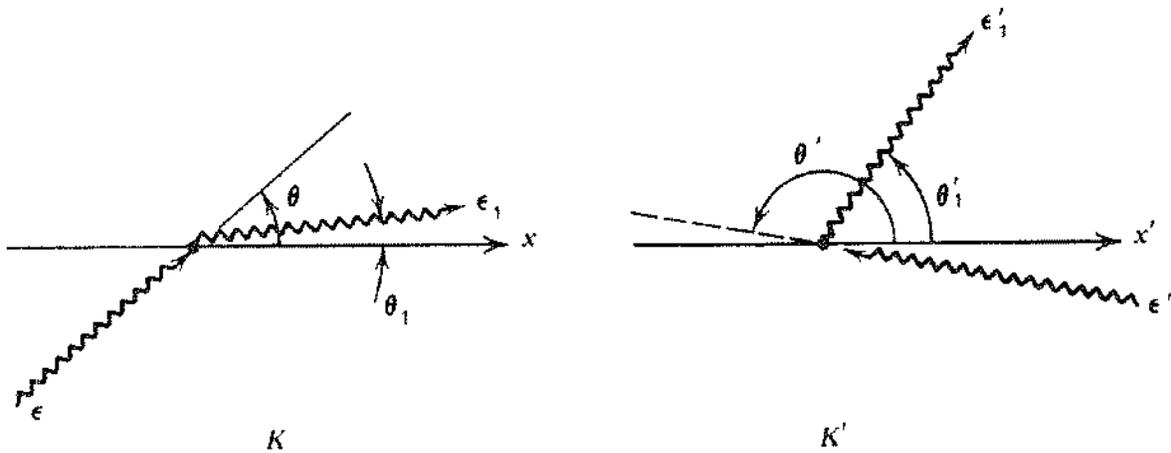


Figura 9.4: Definizione della geometria dello scattering Compton nel SdR K dell'osservatore e nel SdR K' dell'elettrone a riposo.

Dalle formule dell'effetto Doppler relativistico abbiamo che

$$\varepsilon' = \varepsilon \gamma (1 - \beta \cos \theta) \quad (9.49a)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 \gamma (1 + \beta \cos \theta'_1) \quad (9.49b)$$

Dall'Eq. 9.43 abbiamo però che

$$\varepsilon'_1 \simeq \varepsilon' \left[1 - \frac{\varepsilon'}{mc^2} (1 - \cos \Theta) \right] \quad (9.50a)$$

$$\cos \Theta = \cos \theta'_1 \cos \theta' + \sin \theta' \sin \theta'_1 \cos(\phi' - \phi'_1) \quad (9.50b)$$

dove ϕ'_1 e ϕ' sono gli angoli azimutali del fotone scatterato e del fotone incidente nel SdR dell'elettrone a riposo.

Nel caso di elettroni relativistici, $\gamma^2 - 1 \gg h\nu/mc^2$, l'energia del fotone prima dello scattering, nel SdR K' e dopo lo scattering stanno nel rapporto

$$1 : \gamma : \gamma^2$$

sempre che venga soddisfatta la condizione per scattering Thomson nel SdR K' $\gamma\varepsilon \ll mc^2$. Questo segue direttamente dalle (9.49), dato che $\theta \simeq \theta'_1 \simeq \pi/2$.

Questo processo quindi converte un fotone di bassa energia in uno di alta energia moltiplicandone l'energia per un fattore dell'ordine di γ^2 . Dato che nel limite di Thomson possiamo avere fotoni fino a 100 keV, si può vedere come in questo modo si possano ottenere fotoni di energie enormi. Se l'energia intermedia è troppo alta, allora gli effetti quantistici menzionati precedentemente agiscono riducendo l'efficienza del processo (facendo sì che $\varepsilon'_1 < \varepsilon$) e riducendo la probabilità di scattering (riduzione di σ).

Da un punto di vista cinematico abbiamo che l'energia massima raggiungibile dal fotone sarà $\sim \gamma mc^2$, dato che per conservazione dell'energia dobbiamo avere $\varepsilon_1 < \gamma mc^2 + \varepsilon$.

9.5.3 Il parametro di Comptonizzazione y

Prima di discutere in dettaglio quale sia l'effetto di ripetuti scattering Compton sullo spettro totale e sulla distribuzione di energia dei fotoni, determiniamo quali sono le condizioni per cui il processo di scattering altera in maniera significativa l'energia totale del fotone. Al solito ci poniamo nel limite di Thomson $\gamma\varepsilon \ll mc^2$.

In un mezzo finito possiamo definire il parametro di Comptonizzazione y per determinare se un fotone subirà una variazione significativa della sua energia nell'attraversare un mezzo:

$$y \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{variazione di energia frazio-} \\ \text{nale media per scattering} \end{array} \right\} \times \left(\begin{array}{l} \text{numero medio di scatte-} \\ \text{ring} \end{array} \right) \quad (9.51)$$

In generale, se $y > 1$ l'energia totale del fotone, così come il suo spettro, saranno significativamente modificati; nel caso in cui $y \ll 1$ non avremo variazioni apprezzabili.

Cerchiamo ora di dare una stima per il primo termine di (9.51). Per convenienza supporremo che la distribuzione degli elettroni sia termica. Nel caso di elettroni non relativistici, mediando la (9.50a) sull'angolo abbiamo che

$$\frac{\Delta\varepsilon'}{\varepsilon'} \equiv \frac{\varepsilon_1' - \varepsilon'}{\varepsilon'} = -\frac{\varepsilon'}{mc^2} \quad (9.52)$$

Nel SdR del laboratorio, al primo ordine nei due parametri (piccoli) ε/mc^2 e kT/mc^2 , dobbiamo avere

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{mc^2} + \alpha \frac{kT}{mc^2} \quad (9.53)$$

dove α è un certo parametro da determinare. Per calcolarlo, immaginiamo che fotoni ed elettroni siano in completo equilibrio ma che interagiscano solamente per scattering. Assumiamo inoltre che la densità dei fotoni sia sufficientemente piccola che processi di emissione stimolata possano essere trascurati. In questo caso i fotoni devono seguire una funzione di distribuzione di Bose-Einstein con un certo potenziale chimico. Infatti, dato che per scattering non si possono nè creare nè distruggere fotoni, una distribuzione di Planck non può essere valida.

Per una distribuzione termica degli elettroni abbiamo che

$$N(\varepsilon) = K\varepsilon^2 e^{-\varepsilon/kT}$$

e quindi

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int \varepsilon \frac{dN}{d\varepsilon} d\varepsilon}{\int \frac{dN}{d\varepsilon} d\varepsilon} = 3kT \quad (9.54a)$$

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = 12(kT)^2 \quad (9.54b)$$

In questo caso specifico abbiamo che non ci può essere scambio di energia tra i fotoni e gli elettroni, quindi

$$\begin{aligned} \langle \Delta \varepsilon \rangle &= 0 = \alpha \frac{kT}{mc^2} - \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle}{mc^2} \\ &= \frac{3kT}{mc^2} (\alpha - 4) kT \end{aligned}$$

da cui segue che $\alpha = 4$. Quindi per elettroni non relativistici in equilibrio termico, l'espressione per il trasferimento di energia per scattering è

$$\Delta \varepsilon|_{\text{NR}} = \frac{\varepsilon}{mc^2} (4kT - \varepsilon) \quad (9.55)$$

Si noti che se gli elettroni hanno una temperatura maggiore dell'energia dei fotoni incidenti, i fotoni acquistano energia. Se invece $\varepsilon > 4kT$ allora energia viene trasferita dai fotoni agli elettroni.

Nel limite ultrarelativistico $\gamma \gg 1$, dalle relazioni (9.49) abbiamo che

$$\Delta \varepsilon|_{\text{R}} \simeq \frac{4}{3} \gamma^2 \varepsilon \quad (9.56)$$

dove il fattore $\frac{4}{3}$ deriva dalla mediazione sugli angoli. Con argomenti analoghi a quelli utilizzati per ricavare le relazioni (9.54) abbiamo che

$$\langle \gamma^2 \rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{(mc^2)^2} = 12 \left(\frac{kT}{mc^2} \right)^2$$

quindi Eq. 9.56 diventa

$$\Delta \varepsilon|_{\text{R}} \simeq 16\varepsilon \left(\frac{kT}{mc^2} \right)^2 \quad (9.57)$$

Ora, il secondo termine della relazione (9.51), ricordando la discussione fatta sul random walk, (relazioni (9.11) e (9.12)), sarà dato da

$$\left(\begin{array}{c} \text{numero medio di scatte-} \\ \text{ring} \end{array} \right) \simeq \max(\tau_{\text{es}}, \tau_{\text{es}}^2) \quad (9.58)$$

dove abbiamo definito la profondità ottica per scattering elettronico

$$\tau_{\text{es}} \sim \rho \kappa_{\text{es}} R \quad (9.59)$$

κ_{es} è l'opacità per scattering elettronico, che per un gas composto da Idrogeno ionizzato vale

$$\kappa_{\text{es}} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{m_{\text{p}}} = 0.40 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (9.60)$$

mentre R è la dimensione del mezzo. Ricapitolando, l'espressione per il parametro di Comptonizzazione y per elettroni termici relativistici e non relativistici è

$$y = \max(\tau_{\text{es}}, \tau_{\text{es}}^2) \begin{cases} \left(\frac{4kT}{mc^2}\right) & \text{Non Relativistico} \\ 16 \left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2 & \text{Relativistico} \end{cases} \quad (9.61)$$

Nel ricavare queste espressioni abbiamo trascurato il trasferimento di energia nel SdR dell'elettrone a riposo, cioè $4kT \gg \varepsilon$ nel caso non relativistico.

In situazioni in cui l'assorbimento sia un effetto importante, è conveniente definire il parametro di Comptonizzazione $y(\nu)$ dipendente dalla frequenza. In questo caso τ_{es} deve essere valutato a partire dalla profondità ottica effettiva $\tau_*(\nu)$, dell'ordine dell'unità. Quindi $\tau_{\text{es}}(\nu) = \rho \kappa_{\text{es}} l_*(\nu)$ da cui, usando (9.17),

$$\tau_{\text{es}}(\nu) \simeq \left(\frac{\kappa_{\text{es}}/\kappa_a(\nu)}{1 + \kappa_a(\nu)/\kappa_{\text{es}}} \right)^{1/2} \quad (9.62)$$

dove $\kappa_a(\nu)$ è l'opacità per assorbimento. Questa equazione fornisce la profondità ottica per scattering dal punto di vista di emissione di un fotone di frequenza ν . Le definizioni del parametro di Comptonizzazione rimangono le stesse con τ_{es} sostituito da $\tau_{\text{es}}(\nu)$.

9.5.4 Significato fisico del parametro di Comptonizzazione y

L'importanza del parametro di Comptonizzazione y risiede nel fatto che esso rappresenta il fattore di amplificazione di energia nel caso di scattering Compton. Quello che ora dimostreremo è che se un fotone di energia iniziale ε_i incide su di una nube composta da elettroni termici non relativistici ad una temperatura T , allora dopo scattering Compton esso emergerà con una energia $\varepsilon_f \simeq \varepsilon_i e^y$ (se ovviamente $\varepsilon_f \ll 4kT$).

Consideriamo quindi una nube di elettroni non relativistici mantenuta ad una temperatura T . La nube è otticamente spessa per scattering elettronico, cioè $\tau_{\text{es}} \gg 1$, ma nello stesso tempo è otticamente sottile per assorbimento, cioè $\tau_*(h\nu = kT) \ll 1$. Una grossa quantità di elettroni "soffici", ognuno di energia caratteristica $\varepsilon_i \ll kT$ viene iniettata nella nube.

Come risultato di scattering Compton inverso, questi fotoni "soffici" emergeranno dalla nube con energia caratteristica ε_f . Il trasferimento di energia in uno scattering singolo, come abbiamo visto in (9.55) è dato da

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon \left(\frac{4kT}{mc^2} - \frac{\varepsilon}{mc^2} \right)$$

Per fotoni di energia $\varepsilon \ll 4kT$ il trasferimento di energia può essere messo in forma differenziale

$$\frac{d\varepsilon}{dN} \sim \varepsilon \frac{4kT}{mc^2}$$

dove dN è il numero differenziale di scattering. Dopo N scattering, l'energia iniziale ε_i di un fotone sarà

$$\varepsilon_N \sim \varepsilon_i \exp\left(\frac{4kT}{mc^2} N\right) \quad (9.63)$$

per $\varepsilon_N \ll 4kT$. In un mezzo di profondità ottica $\tau_{es} \gg 1$, il numero di scattering prima che il fotone riesca ad uscire dalla nube è, come abbiamo visto $\sim \tau_{es}^2$, quindi la (9.63) diventa

$$\varepsilon_f \sim \varepsilon_i e^y \quad y \equiv \frac{4kT}{mc^2} \tau_{es}^2 \quad (9.64)$$

Dalla definizione del parametro di Comptonizzazione abbiamo che ε_f aumenta rapidamente all'aumentare di τ_{es} . Ad un certo punto però la profondità ottica raggiungerà un valore critico τ_{crit} oltre il quale il processo di Comptonizzazione satura. Questo ovviamente avviene quando $\varepsilon_f \sim 4kT$. Se poniamo questo valore nell'Eq. 9.64 otteniamo

$$\tau_{crit} = \left[\frac{mc^2}{4kT} \ln\left(\frac{4kT}{\varepsilon_i}\right) \right]^{1/2} \quad (9.65)$$

9.5.5 Regimi spettrali per scattering multipli

Una analisi dettagliata dell'evoluzione dello spettro in presenza di scattering ripetuti su elettroni relativistici è molto difficile perché il trasferimento di energia per scattering è grande, dello stesso ordine di grandezza delle energie in gioco nel processo. Se però gli elettroni sono non relativistici il trasferimento di energia razionale per scattering è in questo caso piccolo. In particolare, l'equazione di Boltzmann (che regola il comportamento della densità n dei fotoni nello spazio delle fasi dovuta a scattering di elettroni) può essere espansa al secondo ordine in questa piccola quantità dando luogo alla cosiddetta equazione di Fokker-Planck. Per fotoni scatterati da elettroni termici non relativistici l'equazione di Fokker-Planck è nota con il nome di *equazione di Kompaneets*

$$\frac{\partial n}{\partial t_c} = \left(\frac{kT}{mc^2} \right) \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 (n' + n + n^2) \right] \quad (9.66)$$

dove n è la funzione di distribuzione dei fotoni che subiscono ripetuti scattering Compton inverso non relativistici, $n' = \partial n / \partial x$, $x = h\nu/kT$, e $t_c = (N_e \sigma_T c) t$ è il tempo in unità di tempo medio tra scattering. In generale, Eq. 9.66 deve essere risolta numericamente.

E' però possibile considerare casi limite ($y \ll 1 \rightarrow$ corpo nero modificato; $y \gg 1 \rightarrow$ Comptonizzazione saturata), in cui una analisi approssimata è sufficiente. Per i casi intermedi (Comptonizzazione non saturata) bisognerà ritornare ad un trattamento più dettagliato.

Per poter meglio delineare i regimi di validità delle nostre approssimazioni, introduciamo delle frequenze (energie) caratteristiche. In astrofisica abbiamo a che fare con mezzi termici in cui i fenomeni di assorbimento ed emissione sono dovuti a processi di bremsstrahlung. In questo caso abbiamo visto che il peso dell'assorbimento è maggiore a bassa energia (si vedano le espressioni (9.40) e (9.41) per il coefficiente di assorbimento per scattering libero-libero). Se indichiamo con ν_0 la frequenza a cui i coefficienti di assorbimento e di scattering sono uguali, allora dalla definizione di opacità e dalle equazioni (9.60) e (9.40) abbiamo che

$$\kappa_{\text{es}} = \kappa_{\text{ff}}(\nu_0) \tag{9.67a}$$

$$\frac{x_0^3}{1 - e^{-x_0}} \sim 4 \cdot 10^{25} T^{-7/2} \rho \bar{g}_{\text{ff}}(x_0) \tag{9.67b}$$

dove abbiamo definito $x_0 \equiv h\nu_0/kT$ e $\bar{g}_{\text{ff}}(x)$ è il fattore di Gaunt libero-libero. Nel nostro intervallo di interesse $\bar{g}_{\text{ff}}(x)$ è approssimato dalla espressione

$$\bar{g}_{\text{ff}}(x) \sim \frac{3}{\pi} \ln\left(\frac{2.25}{x}\right)$$

Se $x < x_0$ allora lo scattering sarà trascurabile, mentre per $x > x_0$ lo scattering modificherà lo spettro. Si noti che se $x_0 \gtrsim 1$ allora lo scattering può essere trascurato lungo la maggior parte dello spettro. Nella discussione che seguirà assumeremo che $x_0 \ll 1$.

Consideriamo ora la frequenza ν_t a cui il mezzo diventa effettivamente sottile (traslucido). Dalle equazioni (9.40) e (9.18) abbiamo che

$$\kappa_{\text{es}} = \kappa_{\text{ff}}(\nu_t) \tau_{\text{es}}^2 \tag{9.68a}$$

$$\frac{x_t^3}{1 - e^{-x_t}} \sim 4 \cdot 10^{25} T^{-7/2} \rho \bar{g}_{\text{ff}}(x_t) \tau_{\text{es}}^2 \tag{9.68b}$$

dove $x_t \equiv h\nu_t/kT$ e τ_{es} è la profondità ottica totale per scattering elettronico definita in (9.59). Per $x > x_t$ l'assorbimento è trascurabile. Nell'intervallo $x_0 < x < x_t$ sia lo scattering che l'assorbimento sono importanti.

Infine introduciamo la frequenza ν_{coe} a cui lo scattering incoerente (inelastico, cioè effetti dovuti a Compton inverso) diventa importante.

Questa energia è definita in modo che il parametro di Comptonizzazione $y(\nu_{\text{coe}}) = 1$. Cioè per $\nu > \nu_{\text{coe}}$ il processo di scattering Compton inverso diventa importante tra l'emissione e l'uscita dal mezzo. Si noti che questa frequenza è definita soltanto se il parametro $y > 1$ (altrimenti Compton inverso è trascurabile ad ogni frequenza). Dalle equazioni (9.61), (9.62) e (9.40), per $x_{\text{coe}} \ll 1$

$$\kappa_{\text{es}} = \left(\frac{mc^2}{4kT} \right) \kappa_{\text{ff}}(v_{\text{coe}}) \quad (9.69a)$$

$$x_{\text{coe}} \sim 2.4 \cdot 10^{17} \rho^{1/2} T^{-9/4} [\bar{g}_{\text{ff}}(x_{\text{coe}})]^{1/2} \quad (9.69b)$$

Dalle equazioni (9.68b) e (9.69b) segue che scattering Compton inverso è importante e x_{coe} è definito solamente quando $x_{\text{coe}} < x_t$.

Una volta definite queste energie, vediamo di studiare diversi casi limite per gli spettri di Comptonizzazione.

□ **Corpo nero modificato:** $y \ll 1$

Nel caso in cui $y \ll 1$ allora solo scattering coerente è importante. In questo caso è possibile dimostrare che l'intensità della radiazione emergente in un mezzo semi-infinito in cui siano presente sia scattering che assorbimento ha la forma

$$I_\nu = \frac{2B_\nu}{1 + \sqrt{\frac{\kappa_{\text{ff}} + \kappa_{\text{es}}}{\kappa_{\text{ff}}}}} \quad (9.70)$$

Nel limite $x \ll x_0$ abbiamo che la (9.70) si riduce all'intensità di corpo nero, mentre per $x \gg x_0$ la (9.70) diventa un corpo nero "modificato"

$$\begin{aligned} I_\nu^{\text{MB}} &\equiv 2B_\nu \sqrt{\frac{\kappa_{\text{ff}}}{\kappa_{\text{es}}}} \\ &= 8.4 \cdot 10^{-4} T^{5/4} \rho^{1/2} \bar{g}_{\text{ff}}^{-1/2} x^{3/2} e^{-x/2} (e^x - 1)^{-1/2} \end{aligned} \quad (9.71)$$

dove I_ν^{MB} è misurata in $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{Ster}^{-1}$. Per $x_0 \ll 1$ Eq. 9.67b ci fornisce una equazione approssimata per x_0 :

$$x_0 \sim 6.3 \cdot 10^{12} T^{-7/4} \rho^{1/2} [\bar{g}_{\text{ff}}(x_0)]^{1/2} \quad (9.72)$$

Si noti che nell'intervallo $x_0 \ll x \ll 1$ $I_\nu^{\text{MB}} \propto \nu$ invece della legge di Rayleigh-Jeans $I_\nu^{\text{RJ}} \propto \nu^2$.

L'Equazione 9.70 vale solamente per un mezzo semi-infinito. Nel caso di un mezzo finito bisogna determinare il valore di x_t . Se $x_t < x_0$ l'emissione è di corpo nero per $x < x_t$ ed un bremsstrahlung otticamente sottile per $x > x_t$ (lo scattering non è mai importante). Per $x_0 < x_t < 1$ l'emissione è correttamente descritta da (9.70) per $x < x_t$ e poi diventa bremsstrahlung otticamente sottile per $x > x_t$. Per $x_t > 1$ il mezzo si comporta come se fosse infinito, e (9.70) può essere usata per l'intero spettro.

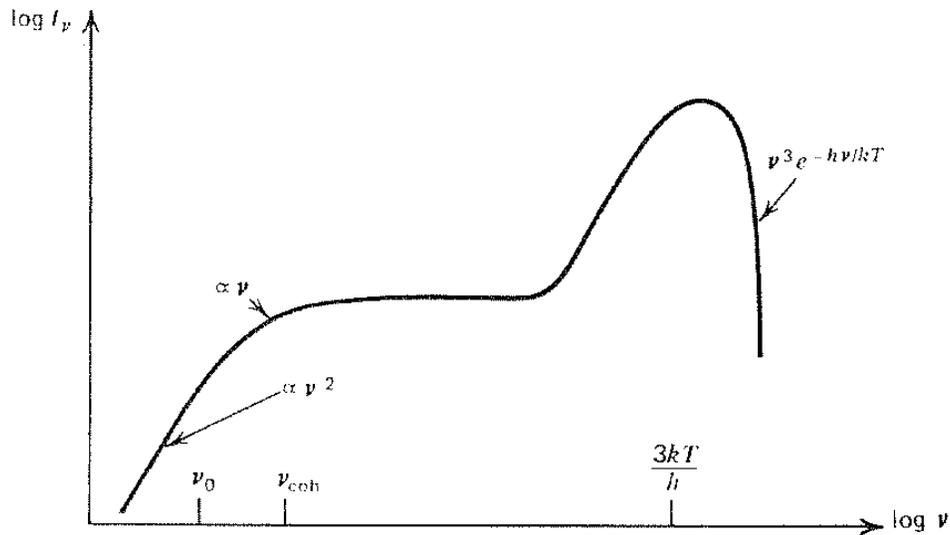


Figura 9.5: Spettro emergente da un mezzo termico, non relativistico caratterizzato da emissione ed assorbimento libero-libero e da scattering Compton inverso saturato. A basse frequenze lo spettro è un corpo nero, poi diventa un corpo nero modificato e ad alte frequenze diventa uno spettro di Wien.

□ **Spettro di Wien:** $y \gg 1$

Quando $y \gg 1$, Compton inverso può essere importante, a seconda che $x_{\text{coe}} \ll 1$ o $x_{\text{coe}} \gg 1$. Nell'ultimo caso Compton inverso può essere trascurato, dato che la maggior parte dei fotoni subisce scattering coerente. Lo spettro avrà in questo caso la forma di un corpo nero modificato. Per $x_{\text{coe}} \ll 1$, dalle relazioni (9.67b) e (9.69b), abbiamo

$$x_{\text{coe}} = \left(\frac{mc^2}{4kT} \right)^{1/2} x_0 \tag{9.73}$$

Lo spettro è descritto correttamente dalla (9.70) per $x \ll x_{\text{coe}}$, ma per $x \gtrsim x_{\text{coe}}$ dobbiamo considerare effetti di scattering Compton inverso (si veda Figura 9.5). In questa regione dello spettro, se $x_{\text{coe}} \ll 1$, Compton inverso sarà saturato producendo uno spettro di Wien

$$I_\nu^W = \frac{2h\nu^3}{c^2} n = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\alpha} e^{-h\nu/kT} \tag{9.74}$$

dove il fattore $e^{-\alpha}$ è funzione del tasso di produzione dei fotoni.

Il flusso totale emesso nello spettro (9.74) è

$$F^W (\text{erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-2}) = \pi \int I_\nu^W d\nu = \frac{12\pi e^{-\alpha} (kT)^4}{c^2 h^3} \tag{9.75}$$

mentre l'energia media del fotone è $\bar{h\nu} = 3kT$.

□ Comptonizzazione non saturata

Consideriamo infine il caso in cui $y \gg 1$ ma in cui $x_{\text{coe}} \sim 1$, cioè mezzi in cui il processo di Compton inverso è importante ma in cui lo spettro non satura allo spettro di Wien. In questo caso è necessaria una analisi dell'equazione di Kompaneets (9.66). Senza entrare nei dettagli è possibile fare vedere come una soluzione di (9.66) in cui abbiamo un input di fotoni “soffici” ha la forma di una legge di potenza

$$\begin{aligned} n &\propto x^m \\ m(m+3) &= \frac{4}{y} \\ m &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4}{y}} \end{aligned} \quad (9.76)$$

e dove y è il parametro di Comptonizzazione definito in (9.61). La radice positiva è appropriata se $y \gg 1$; per $y \ll 1$ è invece appropriata la radice negativa. Per $y \sim 1$ bisogna prendere una combinazione lineare delle due soluzioni e non esiste una soluzione a legge di potenza. Dalla misura della pendenza dello spettro di Comptonizzazione non saturata con fotoni “soffici” si possono determinare sia la temperatura degli elettroni che la profondità ottica di scattering della sorgente.

Lo spettro da Comptonizzazione non saturata è mostrato in Figura 9.6. L'intensità emergente nel regime di legge di potenza soddisfa la

$$I_\nu \sim I_{\nu_s} \left(\frac{\nu}{\nu_s} \right)^{3+m} \quad (9.77)$$

Lo spettro è molto sensibile alle variazioni in y . L'energia iniziale dei fotoni è significativamente amplificata per $m \geq -4$, cioè se $y \geq 1$, analogamente a quanto abbiamo visto nel caso relativistico.

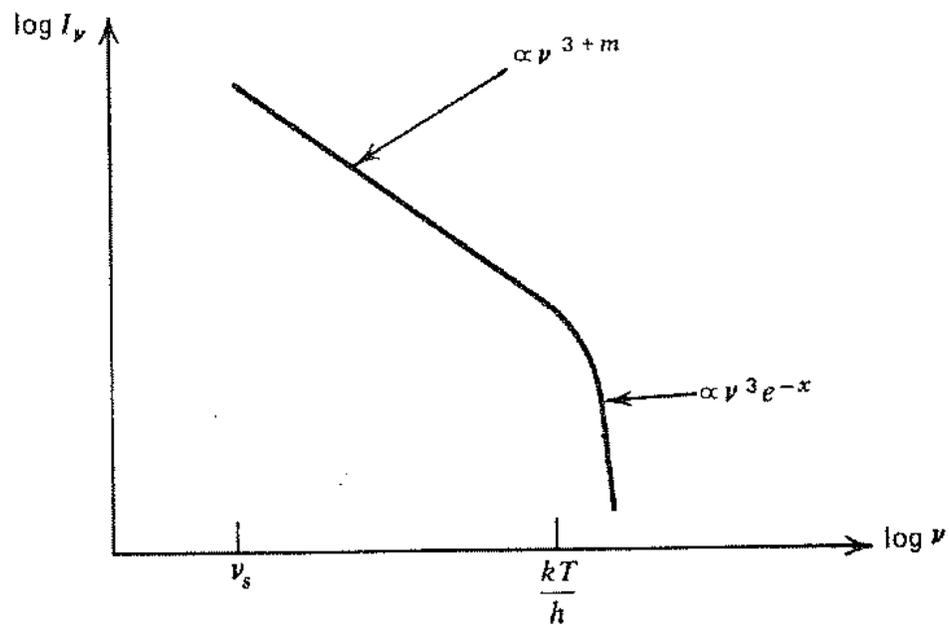


Figura 9.6: Spettro prodotto da Comptonizzazione non saturata di fotoni di bassa energia su elettroni termici.

Capitolo 10

Tecniche di Osservazione

10.1 Introduzione

Gli esperimenti per lo studio dell'emissione nella banda X da parte di oggetti celesti devono confrontarsi con due realtà: (i) a causa dell'effetto di schermo della nostra atmosfera, gli strumenti devono essere portati a grandi altezze (vedi Figura 10.1); (ii) i fotoni X possiedono una tale energia che la loro interazione con la materia produce un effetto osservabile.

In generale i dati dell'astronomia X saranno nella forma di numero di eventi (conteggi) misurati in un certo intervallo temporale, o il tempo di arrivo per un certo evento. Questi conteggi sono molto piccoli: ad esempio, il flusso della sorgente più brillante del cielo X, Sco X-1, è circa 100 fotoni $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$. La seconda sorgente più brillante, la Nebulosa del Granchio, è soltanto un decimo di questa.

Il fatto che i rivelatori debbono essere portati al di sopra dell'atmosfera, fa sì che vi siano un certo numero di eventi significativi che non appartengono all'emissione della sorgente, ma che fanno da *fondo* e debbono essere discriminati dall'emissione di sorgente: ad esempio raggi X e γ dovuti alla interazione dei raggi cosmici con la nostra atmosfera.

Per cercare di limitare questa sorgente di fondo sono stati studiati dispositivi di collimazione meccanica, in modo da limitare il campo di vista del rivelatore, o tecniche di anti-coincidenza. Per basse energie sono inoltre a disposizione anche sistemi di focalizzazione, in modo da aumentare il rapporto segnale/rumore.

10.2 Rivelatori per astronomia X

Il principio di funzionamento di una classe di rivelatori di raggi X utilizzati in astronomia si basa sull'assorbimento (scattering) di fotoni incidenti provenienti dal sorgenti celesti con il materiale del rivelatore. Questi raggi X generano un elettrone che trasporta una qualche frazione dell'energia del fotone. Questo elettrone produce elettroni secondari che possono essere rivelati come una corrente, oppure luce visibile che può essere rivelata in un fotomoltiplicatore. Una ulteriore classe di rivelatori usati in astronomia X determina l'energia del fotone incidente misurando la variazione di temperatura associata al suo assorbimento (microcalorimetri).

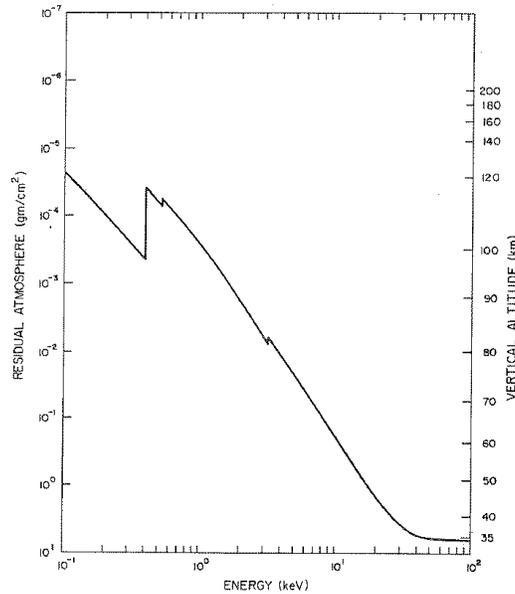


Figura 10.1: L'atmosfera terrestre attenua raggi X incidenti per assorbimento fotoelettrico e, al di sopra dei 30 keV, per scattering Compton. Questa curva rappresenta una profondità ottica unitaria in funzione dell'energia. La scala sulla sinistra indica la densità colonnare atmosferica sulla verticale che produce l'attenuazione di una profondità ottica, mentre sulla destra la scala indica l'altezza minima richiesta per produrre almeno questa attenuazione. Le discontinuità sono dovute agli *edges* di Azoto, Ossigeno ed Argon.

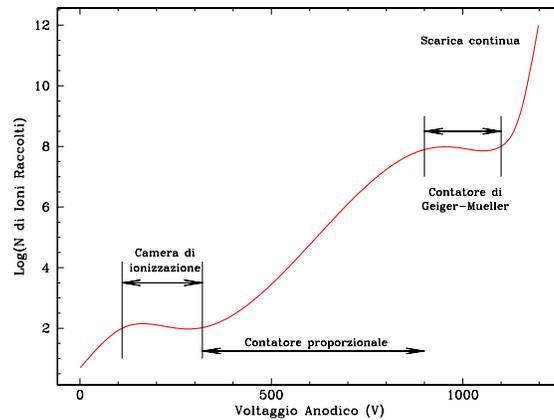


Figura 10.2: Output di un rivelatore a gas in funzione del voltaggio applicato all'anodo. Si tenga presente che i valori esatti dell'alta tensione variano moltissimo in funzione della geometria del rivelatore, del tipo e della pressione del gas utilizzato.

Possiamo classificare i rivelatori per astronomia X in quattro famiglie: 1. Rivelatori a gas; 2. Rivelatori a scintillazione; 3. Rivelatori a semiconduttore; 4. Calorimetri. La scelta di un particolare tipo di rivelatore dipende dalla energia dei fotoni che si vogliono rivelare, da requisiti di risoluzione energetica ed efficienza, e dal costo.

Un rivelatore a gas consiste in una scatola metallica (che funziona da catodo) riempita di gas e contenente uno o più fili (anodi). Un fotone che passa attraverso il gas lo ionizza producendo elettroni e ioni liberi. Gli elettroni vengono attratti all'anodo, producendo un impulso elettrico. Se la differenza di potenziale tra anodo e catodo è bassa, gli elettroni si possono ricombinare con gli ioni. La ricombinazione può avvenire anche in presenza di una alta densità di ioni. Per un voltaggio sufficientemente elevato praticamente tutti gli elettroni vengono raccolti sull'anodo, ed il rivelatore è detto *camera di ionizzazione*. Aumentando il voltaggio, gli elettroni sono accelerati verso l'anodo con energie sufficienti a ionizzare altri atomi, creando così altri elettroni. Questo rivelatore è detto *contatore proporzionale*. Aumentando ancora il voltaggio, la moltiplicazione degli elettroni è ancora maggiore, ed il numero di elettroni raccolti all'anodo diventa *indipendente* dalla ionizzazione iniziale. Quest'ultimo tipo di rivelatore è detto *contatore Geiger-Mueller*, in cui il segnale all'anodo è lo stesso per tutti i fotoni. Per voltaggi ancora superiori avviene la scarica continua. I diversi regimi di alte tensioni descritti sono visualizzati in Fig. 10.2.

Vediamo ora di descrivere in dettaglio l'interazione tra i raggi X incidenti ed il materiale che compone il rivelatore. Fino ad una certa energia e a seconda del numero atomico Z del materiale avremo che il processo principale per cui il fotone X viene assorbito è *assorbimento fotoelettrico*. In questo processo si ha l'espulsione dell'elettrone più interno che è energeticamente permesso. L'energia dell'elettrone sarà $E_x - E_s$ dove E_x è l'energia del fotone X incidente ed E_s l'energia della shell. Ad esempio, nell'Alluminio $E_s = 1.56$ keV per elettroni della shell K . Ovviamente la transizione avverrà solamente se $E_x \geq E_s$. Se il fotone X possiede una energia leggermente inferiore non riuscirà ad estrarre l'elettrone dalla shell K , ma uno dalla shell L e quindi vi sarà

una discontinuità (*edge*) nella sezione d'urto di assorbimento, come mostrato in Figura 10.3. Il salto è di circa un fattore 10. A parte queste discontinuità, la sezione d'urto ha un andamento $\propto E^{-3} Z^4$.

A seguito dell'emissione dell'elettrone, l'atomo si trova in uno stato eccitato e può liberare l'eccesso di energia E_s in due modi: può rilasciare una cascata di fotoni, uno dei quali potrebbe essere nella banda X con una energia vicina a E_s . In questo caso si parla di fluorescenza. Alternativamente, può emettere un secondo elettrone di energia prossima a E_s dovuto alla redistribuzione degli elettroni nei livelli atomici (effetto Auger). Il rapporto delle probabilità dei due tipi di processi (fluorescenza e Auger) va come Z^{-4} , quindi per elementi leggeri prevarrà l'effetto Auger mentre per quelli pesanti prevarrà la fluorescenza. Nel caso dell'Alluminio, la probabilità che venga emesso un elettrone di Auger a causa dell'assorbimento di un fotone X di energia maggiore di 1.56 keV è il 96%.

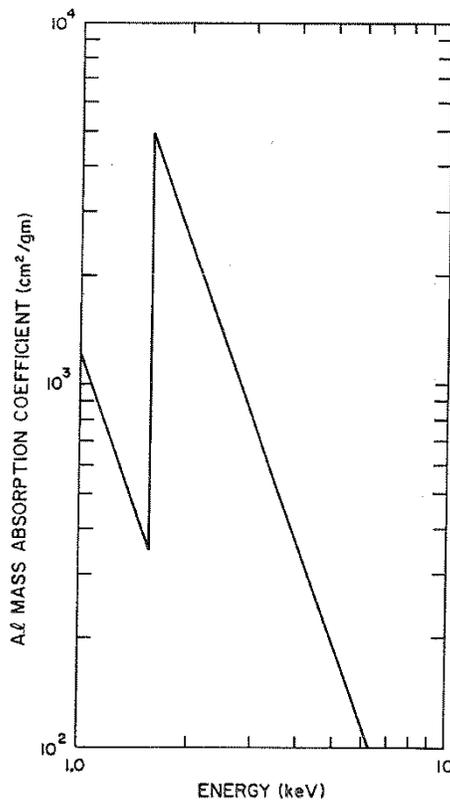


Figura 10.3: Coefficiente di assorbimento per unità di massa per l'Alluminio. Nell'intervallo di energia mostrato, tutto l'assorbimento è dovuto ad effetto fotoelettrico. L'assorbimento mostra una discontinuità a 1.56 keV perché un fotone X di maggiore energia può espellere un elettrone della shell K.

Esiste però una probabilità significativa che il fotone X venga scatterato dagli elettroni atomici piuttosto che essere assorbito. Come abbiamo visto, per fotoni di bassa energia questo non è altro che scattering Thomson, la cui sezione d'urto (vedi Eq. 6.2) è $6.7 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$, indipendente dall'energia. Ad alta energia lo scattering risulta in una variazione della frequenza del fotone (effetto Compton) e trasferimento di energia all'elettrone che funge da diffusore. Come abbiamo visto, la condizione affinché vi sia scattering Compton è che l'energia del fotone sia minore di $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$. Per un atomo contenente Z elettroni, la sezione d'urto sarà Z volte maggiore. In riferimento alla Figura 10.1, scattering Compton è responsabile dell'assorbimento al di sopra dei 40 keV.

Il terzo processo di assorbimento di raggi X è la creazione di coppie, che non può avvenire al di sotto di 1.02 MeV, due volte l'energia a riposo dell'elettrone, ed è per questo che non ce ne occuperemo.

Per descrivere l'assorbimento dei fotoni X nel materiale si utilizza la relazione (vedi Eq. 7.13)

$$I = I_0 \exp(-\mu x) \quad (10.1)$$

dove I_0 è il flusso incidente, I è il flusso rimanente dopo l'attraversamento di una quantità

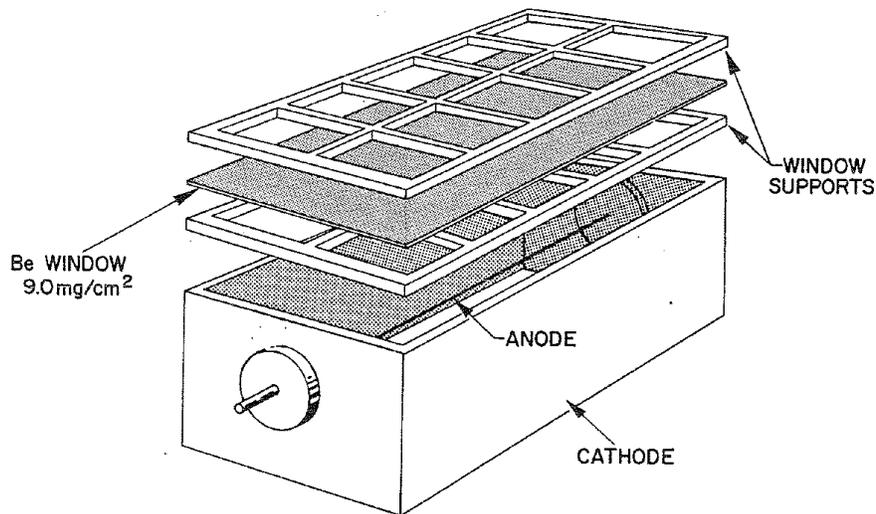


Figura 10.4: Configurazione tipica di un contatore proporzionale. La finestra di Berillio viene cementata in una struttura di supporto a *sandwich* che viene a sua volta saldata ermeticamente sul catodo per preservare l'integrità del gas. L'anodo viene tenuto in tensione da una molla. Un preamplificatore ed un generatore di alta tensione vengono montati il più vicino possibile all'ingresso dell'anodo.

di materiale di densità colonnare $x \text{ g cm}^{-2}$ e μ è il coefficiente di assorbimento per unità di massa, in unità di $\text{cm}^2 \text{ g}^{-1}$.

La quantità μ è legata alla sezione d'urto attraverso la relazione

$$\mu \equiv \frac{\sigma N_0}{A_x} \quad \text{cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (10.2)$$

dove N_0 è il numero di Avogadro¹ e A_x è il peso atomico del materiale. Si noti come sotto certe condizioni la (10.1) possa dare risultati non corretti dato che fotoni non sono necessariamente rimossi dal fascio dalle interazioni con il materiale.

10.2.1 Contatori proporzionali

Un contatore proporzionale consiste essenzialmente di un gas e da elettrodi che sono sistemati in maniera tale per cui viene creato un forte gradiente di campo elettrico vicino agli elettrodi positivi che generalmente hanno la forma di fili. Il catodo può anche essere utilizzato come contenitore del gas e struttura principale del rivelatore, e contiene una sottile finestra di entrata per i fotoni X. In Figura 10.4 viene mostrata una configurazione tipica.

¹Numero di atomi contenuti in un grammo-atomo, che è la quantità di sostanza chimicamente semplice la cui massa è uguale al suo peso atomico. $N_0 = 6.023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Un fotone X che è assorbito nel gas ionizza un atomo, che reagisce espellendo un foto-elettrone, seguito dall'espulsione di un elettrone Auger ed il rilascio di fotoni di fluorescenza. Il foto-elettrone interagirà con il gas dando luogo ad una ulteriore coppia elettrone-ione. Alla fine la sua energia verrà dissipata ed una nube di coppie elettrone-ione si formerà lungo il suo percorso. Anche gli elettroni Auger interagiranno con il gas ed anche loro formeranno coppie elettrone-ione. Se i fotoni di fluorescenza non possono uscire dal contatore, allora il numero totale di coppie elettrone-ione sarà in media proporzionale all'energia del fotone incidente.

Gli elettroni secondari, sotto l'influenza del forte campo elettrico, si sposteranno verso l'anodo nelle cui vicinanze vi sarà una ulteriore ionizzazione del gas, con la conseguente formazione di ulteriori elettroni secondari. Il numero di elettroni continua perciò ad aumentare fino a quando non sono raccolti sull'anodo. Il moto degli elettroni verso il filo centrale produce, per induzione, il segnale misurato sul catodo. In questo modo si riesce ad ottenere un guadagno tra 10^3 a 10^5 .

Per avere il massimo guadagno si utilizzano gas nobili, in modo da ridurre al massimo meccanismi di perdita di energia non dovuti a ionizzazione, quali eccitazione di stati rotazionali o vibrazionali molecolari. Un gas nobile *puro* è però un contatore instabile, dato che piccolissime tracce di impurità possono dominare il comportamento del gas. Inoltre un gas nobile è trasparente alla radiazione ultravioletta emessa dagli atomi eccitati del gas nobile che hanno energia sufficiente per espellere elettroni dal catodo ed iniziare una nuova sequenza di moltiplicazione.

Nel processo di moltiplicazione degli elettroni gli atomi di un gas nobile potrebbero essere eccitati in stati metastabili di lunga vita media, i quali si dis-eccitano con collisioni con le pareti del contatore. Per assorbire questa radiazione ultravioletta e dis-eccitare gli stati metastabili viene aggiunto al gas nobile un gas poliatomico, come metano, propano, alcol. Questo gas viene chiamato *quenching gas (smorzatore)*. L'introduzione del quenching gas non introduce cascate di elettroni, dato che il libero cammino medio per questi eventi è piccolo.

L'efficienza di rivelazione di un contatore è la probabilità che un fotone non venga assorbito nella finestra e sia così assorbito nel gas. Dato che la sezione d'urto per effetto fotoelettrico, nella banda al di sotto del 20 keV, è proporzionale a $Z^4 E^{-8/3}$, è importante avere **una finestra sottile di basso Z ed un gas spesso di alto Z**. Per energie nella banda 1–10 keV viene utilizzato il Berillio come elemento costituente la finestra. Per energie più basse bisogna usare altri materiali, per poter rendere le finestre più sottili, come formvar, polipropilene. Il problema è però che questi film sottili non sono in grado di trattenere il gas, quindi in questi casi è necessaria una riserva di gas.

L'efficienza di un contatore proporzionale nella rivelazione di un fotone X di energia E è

$$\varepsilon(E) = \exp\left(-\frac{t_w}{\lambda_w}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\lambda_g}\right)\right] \quad (10.3)$$

dove t_w e t_g sono lo spessore della finestra e del gas, e λ_w e λ_g sono il libero cammino medio di assorbimento nella finestra e nel gas all'energia E .

La carica che viene raccolta all'anodo è proporzionale al numero iniziale di elettroni secondari ed al guadagno, e può essere usata per misurare l'energia del fotone incidente. A causa però della possibile fuga della radiazione di fluorescenza può esserci una diminuzione della carica.

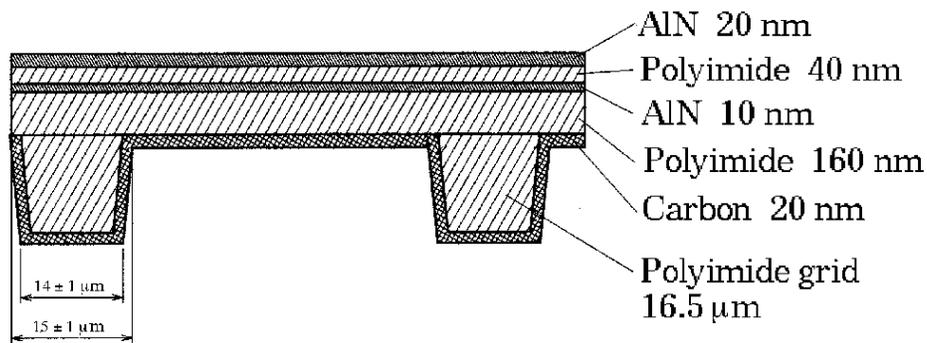


Figura 10.5: Sezione della finestra di ingresso del rivelatore LECS a bordo del satellite BeppoSAX.

10.2.2 Contatori proporzionali a scintillazione

In questo tipo di rivelatori la rivelazione avviene misurando la radiazione ultravioletta prodotta dalla nube di elettroni nel suo spostamento verso l'anodo. In questo caso **non** viene utilizzato un quenching gas ma solamente un gas nobile. I fotoni UV vengono rivelati da fotomoltiplicatori. La quantità di luce non è solo proporzionale all'energia del fotone incidente, ma anche alla profondità che il fotone X è riuscito a raggiungere prima di essere foto-assorbito. Questo spessore viene determinato misurando la durata della luce di scintillazione e prende il nome di *burstlength*. I contatori proporzionali a bordo di BeppoSAX erano di questo tipo: tre avevano una finestra di Berillio dello spessore di $50\mu\text{m}$ (MECS) ed un intervallo operativo tra 2 e 10 keV. Il quarto rivelatore, LECS, aveva una finestra sottile la cui composizione è mostrata in Figura 10.5 e che permetteva l'allargamento dell'intervallo operativo a 0.1 keV. Tutti e quattro i rivelatori usavano lo Xenon come gas di rivelazione.

10.2.3 Tecniche di reiezione del fondo

Esiste un numero sostanziale di eventi di fondo non dovuti a raggi X che limitano la sensibilità delle osservazioni di sorgenti cosmiche. La maggior parte di questo fondo è dovuto a raggi cosmici che incidono la parte alta della nostra atmosfera ad un tasso di 0.2–0.5 particelle per cm^2 per secondo, a seconda della latitudine geomagnetica. Ogni raggio cosmico che penetra attraverso il contatore X può essere eliminato con una tecnica di anti-coincidenza. Purtroppo però questo non elimina il fondo dovuto a raggi γ prodotti dai raggi cosmici sia nell'atmosfera che nel veicolo che trasporta l'esperimento. L'efficienza di conversione di questi fotoni γ nel gas del contatore è molto piccola, dato che la loro energia è tale che lo scattering Compton è l'effetto dominante. Nel caso di un contatore riempito di Argon ($\sigma_C = 0.05 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ ad 1 MeV) e di spessore $t_g = 6 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-2}$ la probabilità di conversione è di solo $3 \cdot 10^{-4}$. Però verranno prodotti un gran numero di elettroni nelle pareti e nella struttura di supporto del contatore, e questi elettroni avranno una energia tale da essere rivelati.

Un'altra fonte importante di radiazione di fondo è la presenza di particelle di bassa energia, principalmente elettroni, che provengono dal vento solare e sono intrappolati nel campo magnetico terrestre (le cosiddette fasce di radiazione). Vi sono inoltre zone particolari in cui particelle vengono intrappolate: le zone aurorali ai poli magnetici e l'anomalia sud atlantica (SAA) al largo delle coste orientali del sudamerica.

Una tecnica, a parte l'uso di anti-coincidenze, che è molto efficiente nel reiettare eventi di fondo è la *discriminazione di forma*, il cui principio di funzionamento è il seguente: un fotone X convertito nel gas è essenzialmente un evento puntiforme; gli elettroni secondari prodotti in quel punto si muovono verso l'anodo senza una dispersione significativa e quindi il tempo di salita del segnale sarà molto breve, dell'ordine di 10–100 ns a seconda del gas utilizzato. Un elettrone che invece proviene da raggi cosmici o fotoni γ secondari lascerà nel contatore una traccia lunga. Gli elettroni secondari si muoveranno verso l'anodo da tutti i punti lungo la traccia così che il tempo di transito dalla traccia all'anodo non è unico ed il corrispondente tempo di salita del segnale sarà molto più lungo di quello di un evento X reale. Questa differenza in tempi di salita viene determinata dall'elettronica.

10.2.4 Rivelatori a scintillazione

Cristalli scintillatori sono dei sali alcalini che hanno la proprietà di emettere luce visibile quando sono colpiti da fotoni X. I processi di assorbimento fotoelettrico e scattering Compton convertono l'energia trasportata dal fotone X in energia cinetica di uno o più elettroni, come nel caso dei contatori proporzionali. Nel cristallo però ogni elettrone di alta energia eccita molti elettroni dalla banda di valenza alla banda di conduzione. Per fare in modo che la transizione avvenga nella banda della luce visibile si introducono delle impurità (dette anche attivatori) che catturano alcuni di questi elettroni.

Affinché un cristallo sia di qualche uso pratico è necessario che sia trasparente alla sua stessa radiazione. Il cristallo che ha avuta la massima applicazione in campo astronomico è lo Ioduro di Sodio in cui l'attivatore sono tracce di Tallio, NaI(Tl), in cui circa 8% della energia dell'elettrone originale è convertita in fotoni con lunghezze d'onda tra 4200 e 4350 Å.

Una faccia del cristallo deve essere accoppiata otticamente ad un tubo fotomoltiplicatore o direttamente, o attraverso una guida di luce. Il resto della superficie viene ricoperta con una vernice riflettente per ottimizzare la collezione di luce al fototubo. Il guadagno nella parte di moltiplicazione elettronica varia da 10^5 a 10^8 . L'importanza dei rivelatori a scintillazione è la loro maggiore efficienza rispetto a quella dei contatori proporzionali al di sopra di 10 keV. Ad esempio, 50 mm di NaI hanno una efficienza praticamente unitaria fino a 100 keV, mentre per avere la stessa efficienza in un contatore proporzionale sarebbero necessari 4 m di Xenon o 200 m di Argon (ad 1 atm). Questo è dovuto alla maggiore numero e densità del cristallo rispetto al gas.

Dato che l'efficienza di conversione dell'energia cinetica in luce, ~ 1 fotone per 400–500 eV, è molto minore dei ~ 30 eV per ione dei contatori proporzionali, la risoluzione energetica (definita come $R(E) = \Delta E/E$, dove ΔE è la Full Width at Half Maximum (FWHM) di una riga rivelata all'energia E) degli scintillatori è minore di quella dei proporzionali: per il PDS, lo strumento di alta energia (15–100 keV) a bordo del satellite BeppoSAX, essa è $R(E) = 0.15 \sqrt{60/E}$ dove E è espressa in keV.

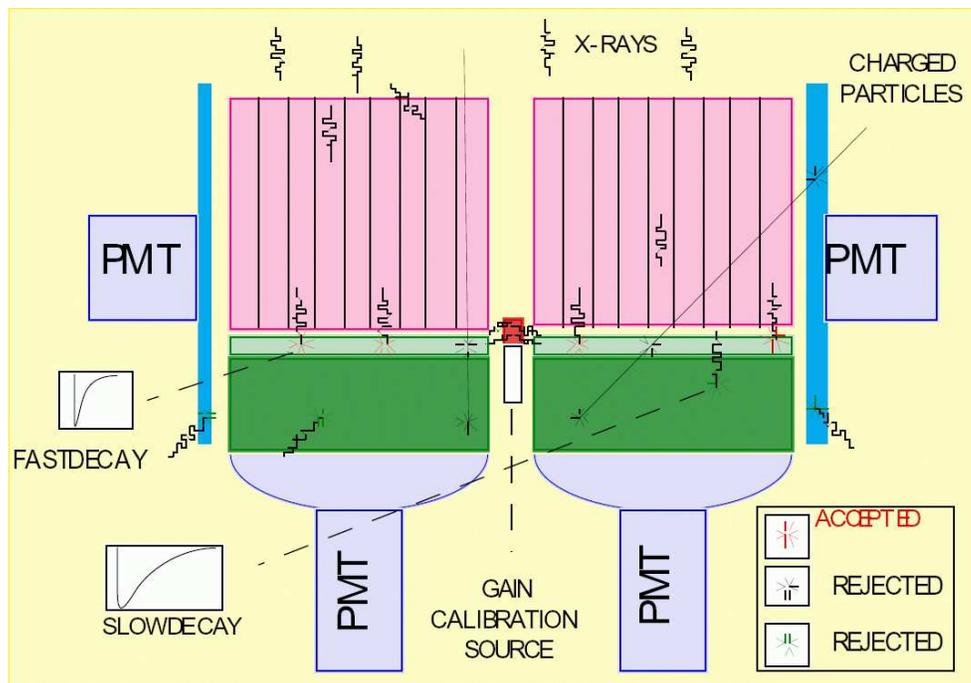


Figura 10.6: Funzionamento dell'anticoincidenza del rivelatore PDS a bordo di BeppoSAX. Il rivelatore è formato da un phoswich di due cristalli: 3 mm di NaI(Tl) che funge da rivelatore vero e proprio, e 50 mm di CsI(Na) che funge da schermo attivo.

Il limite pratico di utilizzo per ogni rivelatore è definito dall'energia a cui la sezione d'urto per effetto fotoelettrico diventa minore di quello per scattering Compton (a causa della complessità dello studio delle perdite di energia parziali). Nel caso dei cristalli di NaI e CsI questo limite è ~ 300 keV (Si veda Tabella 11.1). Il limite di utilizzo a bassa energia è invece determinato dal rumore nel fotomoltiplicatore, che diventa importante nell'intervallo 5–10 keV.

La più importante sorgente di fondo per gli scintillatori proviene dai raggi γ prodotti localmente o dall'atmosfera. Circondare il rivelatore con uno schermo **passivo** di materiale pesante, come ad esempio Piombo, ha il risultato opposto di **aumentare** il fondo, a causa dell'interazione dei raggi γ con lo schermo. La soluzione è quella di circondare il rivelatore con schermi **attivi**. A questo scopo viene utilizzato CsI che è più denso del NaI e può essere lavorato più facilmente.

Infine, una sorgente di fondo sono i protoni che si trovano nella SAA. L'interazione di questi protoni con il materiale del rivelatore provoca l'espulsione di neutroni di energia \sim MeV, che vengono catturati dai cristalli producendo nuclei radioattivi, quali I^{128} e Cs^{134} , i cui elettroni di decadimento vengono interpretati come prodotti da assorbimento fotoelettrico.

In Figura 10.6 viene mostrato la geometria di una delle quattro unità PHOSWICH (acronimo di PHOSphor sandWICH) dell'esperimento di alta energia PDS a bordo di BeppoSAX. Gli eventi rivelati in ogni phoswich possono essere suddivisi in tre classi: (i) eventi che depositano energia solamente nel cristallo NaI (eventi "buoni"); (ii) eventi che depositano energia solamente nel cristallo CsI; (iii) eventi che depositano energia sia in NaI che in CsI. Gli eventi nella prima

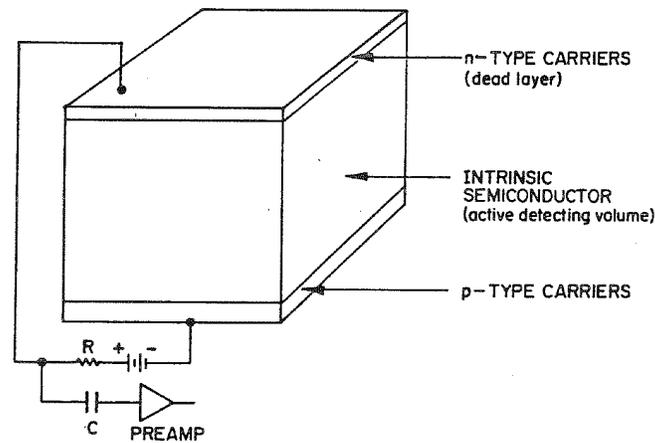


Figura 10.7: Diagramma di funzionamento di un rivelatore a semiconduttore.

classe vengono accettati, mentre quelli delle altre due sono rigettati. La reiezione viene compiuta usando i diversi tempi di decadimento delle scintillazioni prodotte nei due materiali ($0.25 \mu\text{s}$ in NaI e $0.6 \mu\text{s}$ in CsI).

10.2.5 Rivelatori a semiconduttore

Rivelatori a stato solido di Silicio o Germanio possono dare risoluzione energetiche molto migliori di quelle di contatori proporzionali o a scintillazione. Il loro principio di funzionamento è il seguente (vedi Figura 10.7): il cristallo viene drogato per controllare la densità dei portatori di carica. I contatti vengono effettuati con due strati sottili di portatori di carica negativa (tipo- n) e di buche (tipo- p). La regione possiede densità di carica positiva e negativa uguale e quindi riesce a sostenere il campo elettrico attraverso di essa. Interazioni nel cristallo, dovute al fotone X incidente, producono elettroni che possono essere raccolti come impulsi di carica che, a differenza dei contatori proporzionali o dei fototubi, **non sono amplificati**.

La risoluzione energetica di questo tipo di rivelatore è la migliore attualmente possibile (2.3 keV a 1.3 MeV per lo strumento SPI a bordo del satellite INTEGRAL). Lo svantaggio da un punto di vista sperimentale è che questo tipo di rivelatore deve essere raffreddato per evitare l'eccitazione termica degli elettroni nella banda di conduzione.

10.2.6 Microcalorimetri

In un microcalorimetro, la determinazione dell'energia del fotone X incidente avviene misurando la variazione di temperatura associata al suo assorbimento.

Schematicamente il suo funzionamento è illustrato nella Figura 10.8: esso consiste in un assorbitore (HgTe o Si), di capacità termica C che viene collegato ad una temperatura di riferimento (*heat sink*), dell'ordine di qualche centesimo di grado K, attraverso un collegamento termico di

conduttanza G . L'assorbimento di un fotone di energia E nell'assorbitore crea una variazione di temperatura ΔT data da

$$\Delta T = \frac{E}{C} \quad (10.4)$$

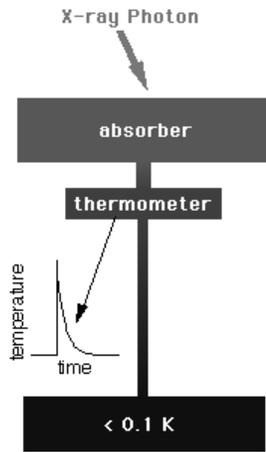


Figura 10.8: Principio operativo di un microcalorimetro.

misurata con un termistore² impiantato nell'assorbitore.

L'assorbitore ritornerà alla temperatura di riferimento del *heat sink* con un decadimento esponenziale con costante di tempo data da

$$\tau = \frac{C}{G} \quad (10.5)$$

Il limite sulla risoluzione energetica del rivelatore è determinato dal trasporto caotico di fononi tra il rivelatore ed il bagno termico nella giunzione. Si può fare vedere che il ΔE limite che si può ottenere con un microcalorimetro è

$$\Delta E = 2.35 \eta \sqrt{C k T^2} \quad (10.6)$$

e la variabile η dipende dal termometro utilizzato. Nel caso del rivelatore XRS che volerà a bordo del satellite giapponese ASTRO-E2 si ha $\eta = 2$.

10.3 Collimatori meccanici

La funzione di un collimatore in astronomia X è quella di limitare l'angolo solido di cielo visto dal rivelatore. Il più semplice tipo di collimatore consiste semplicemente da una scatola o un tubo aperto da entrambe le parti e posizionato sopra il rivelatore (si veda Figura 10.9). L'angolo solido di cielo che sarà osservabile sarà circa $a \times b/h^2$; fotoni che provengono da regioni al di fuori del campo di vista colpiranno le pareti del collimatore e verranno assorbiti. Il collimatore è caratterizzato da un asse centrale e, nel caso mostrato in Figura 10.9 la radiazione verrà trasmessa all'interno degli angoli $\pm a/h$ e $\pm b/h$ attorno all'asse centrale. La funzione di trasmissione $f(\theta - \theta_0)$ (e equivalentemente la $f(\phi - \phi_0)$) del collimatore avrà una forma triangolare

$$f(\theta - \theta_0) = \begin{cases} 1 - \frac{|\theta - \theta_0|}{\theta_{1/2}} & \text{per } |\theta - \theta_0| < \theta_{1/2} \\ 0 & \text{per } |\theta - \theta_0| > \theta_{1/2} \end{cases} \quad (10.7)$$

²Un termistore è un dispositivo che cambia significativamente la sua resistenza con piccole variazioni di temperatura.

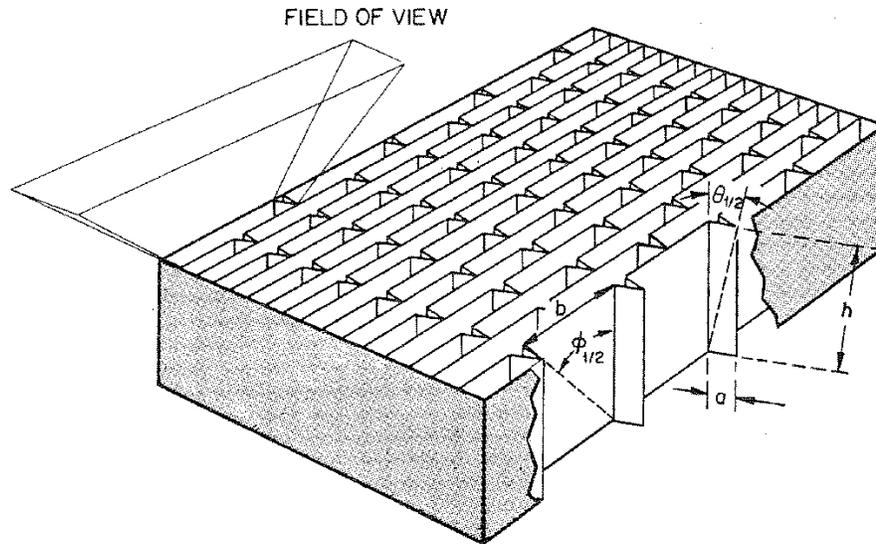


Figura 10.9: Un semplice collimatore formato da tubi rettangolari di altezza h e sezione $a \times b$. I raggi X che colpiscono le pareti dei tubi non possono raggiungere il rivelatore. La risposta all'interno il campo di vista avrà una forma triangolare in ognuna delle due direzioni ortogonali. Gli angoli per cui si ha solamente metà intensità trasmessa sono determinati dalla geometria: $\tan \theta_{1/2} = a/h$ e $\tan \phi_{1/2} = b/h$.

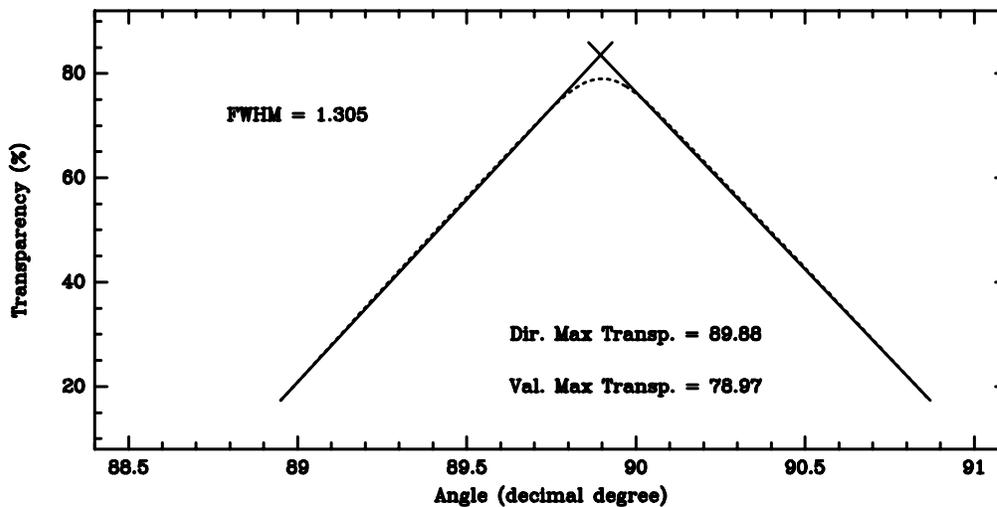


Figura 10.10: Funzione di trasmissione dei collimatori dell'esperimento di alta energia (15–200 keV) PDS a bordo del satellite BeppoSAX. Questi collimatori definiscono un campo di vista esagonale di 1.3° (FWHM).

dove $\theta_{1/2}$ (e $\phi_{1/2}$) rappresenta l'angolo per cui la risposta del collimatore diminuisce del 50%. Nel nostro caso saranno a/h e b/h nelle due direzioni. In Figura 10.10 mostriamo la funzione di trasmissione dei collimatori dell'esperimento PDS a bordo di BeppoSAX.

I collimatori meccanici sono stati costruiti con varie tecniche, ma i requisiti importanti che devono essere soddisfatti sono (i) minimo spessore possibile delle pareti in modo da ottenere la massima apertura possibile; (ii) adeguato spessore delle pareti in modo da poter fermare fotoni X della massima energia possibile. Dato che questi due requisiti sono in contraddizione tra loro è necessario trovare il giusto compromesso.

Non entreremo nei dettagli costruttivi (si veda Appendice D), ma vogliamo evidenziare come la scelta del materiale che costituisce un collimatore è importante. Infatti bisogna evitare che i fotoni X interagiscano con questo materiale e si venga a produrre radiazione che può essere rivelata dallo strumento. Nel caso dei collimatori dell'esperimento PDS (si veda Figura 10.11) essi erano costituiti da tubi in Tantalio, a sezione esagonale, della lunghezza di 20 cm e dello spessore di $50 \mu\text{m}$. La parte interna dei tubi, nei primi 4 cm a partire dalla base, era ricoperta da un bi-strato di Stagno ($100 \mu\text{m}$) e Rame ($50 \mu\text{m}$). Lo strato di Stagno aveva lo scopo di attenuare l'emissione di fluorescenza dalla shell K del Tantalio ($K_\alpha = 57.07 \text{ keV}$; $K_\beta = 65.56 \text{ keV}$), mentre lo strato di Rame doveva attenuare l'emissione di fluorescenza dallo Stagno ($K_\alpha = 25.1 \text{ keV}$; $K_\beta = 28.5 \text{ keV}$). Questa configurazione viene detta *schermatura graduale* (*grading shielding*), ed ha permesso la perdita di solo il 20% dell'area efficace del rivelatore.

10.4 Tecniche di focalizzazione di raggi X e γ

Introdurremo ora due tecniche di focalizzazione di raggi X: specchi ad incidenza radente e diffrazione cristallina (Bragg e Laue). L'interazione dei raggi X con la materia avviene essenzialmente attraverso processi incoerenti, con conseguente perdita di informazione sulla radiazione incidente. Quindi la strumentazione utilizzata in astronomia X/ γ ha utilizzato processi di interazioni inelastici attraverso maschere codificate o telescopi Compton. Il problema con questi rivelatori risiede nell'elevato flusso del fondo, dato che l'area in cui la radiazione viene raccolta è della stessa dimensione dell'area del rivelatore. Dato che la sensibilità di uno strumento è direttamente proporzionale all'area di raccolta della radiazione, fare strumenti di elevata sensibilità diventa subito impraticabile, visti i problemi di dimensione e, quindi, di massa. E' tuttavia possibile utilizzare l'informazione sulla fase della radiazione incidente se questi subiscono diffrazione di Bragg o di Laue su materiali cristallini di alto Z. In questo caso si avrà una piccola area di raccolta della radiazione, con una significativa diminuzione del fondo.

10.4.1 Ottiche di focalizzazione di raggi X

L'uso di specchi per raggi X che focalizzano un fascio incidente offre due vantaggi significativi rispetto all'uso di collimatori meccanici:

- ① Gli specchi permettono la costruzione di strumenti con risoluzione angolare dell'ordine del second d'arco, con conseguente localizzazione di sorgenti puntiformi con precisione paragonabile;

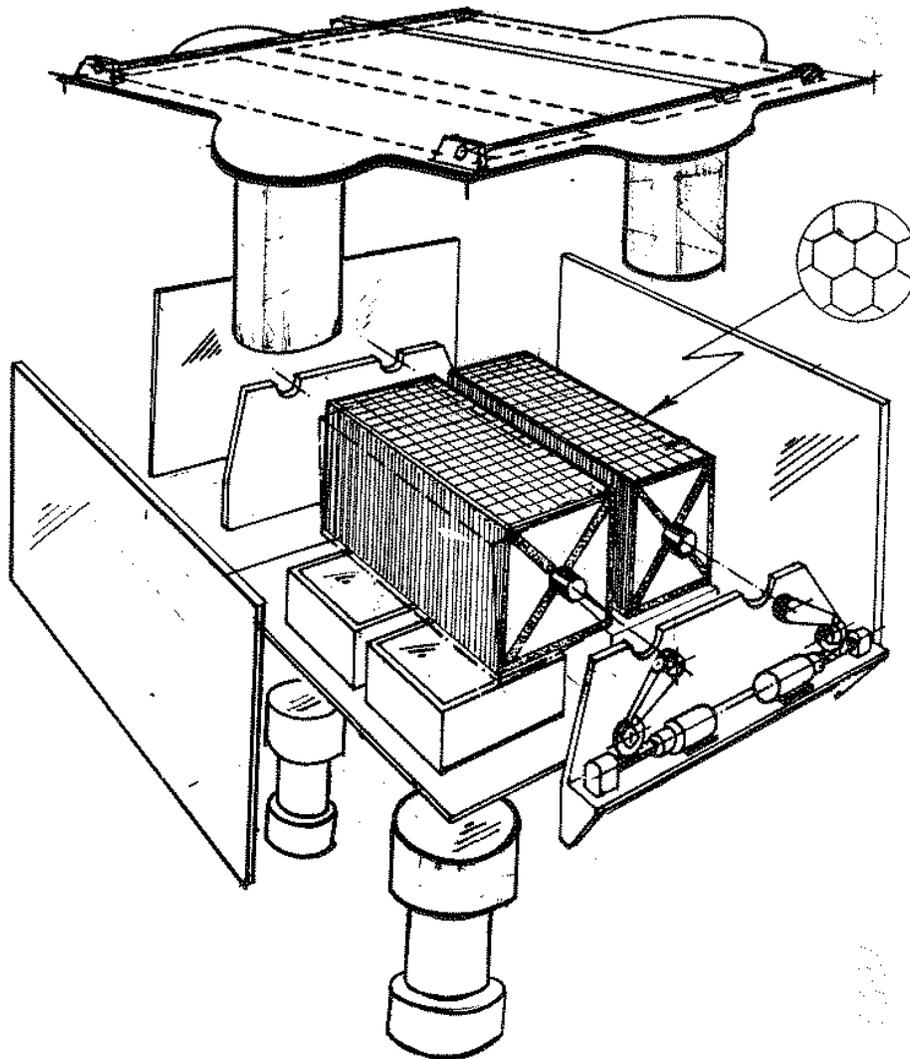


Figura 10.11: Visione esplosa dell'esperimento di alta (15–200 keV) energia PDS a bordo di BeppoSAX. Lo schermo frontale è formato da materiale scintillatore organico (BC-434) dello spessore di 1 mm ed ha lo scopo di intercettare particelle cariche. I fotoni sono rivelati da due fotomoltiplicatori indipendenti. Gli schermi laterali, quattro lastre di CsI(Na) delle dimensioni di 275×402 mm e dello spessore di 1 cm, sono viste ognuna da quattro fotomoltiplicatori (nel loro insieme formano il Gamma Ray Burst Monitor GRBM). I due banchi di collimatori meccanici basculanti limitano il campo di vista di quattro unità phoswich. Sono formati da tubi di forma esagonale (per ottimizzare la tassellatura del piano) di Tantalio la cui base è stata ricoperta di un bi-strato di $100 \mu\text{m}$ di Stagno e $50 \mu\text{m}$ di Rame per assorbire fotoni di fluorescenza generati dall'interazione con i fotoni X incidenti.

- ② Dato che l'area di rivelazione è una piccola frazione dell'area di raccolta, il rapporto segnale/rumore è significativamente migliore di quello di uno strumento a collimazione meccanica, in cui il rivelatore è più grande dell'area di raccolta.

Questi vantaggi permettono un sensibile miglioramento della risoluzione e della sensibilità dello strumento.

Vediamo ora di ricavarci le condizioni affinché un fotone X venga riflesso. Innanzi tutto i fotoni X vengono riflessi da delle superfici per lo stesso motivo per cui la luce visibile viene riflessa.

Nel passaggio attraverso la materia, che possiamo rappresentare come un gran numero di punti, lo scattering dei fotoni X da parte di questi punti si somma in maniera coerente lungo direzioni specifiche. Dato che i fotoni X hanno energie molto maggiori dell'energia di legame degli elettroni atomici, l'indice di rifrazione è leggermente minore dell'unità (a parte vicino alle edge di assorbimento). Allora, applicando la legge di Snell, si ha riflessione solamente fino ad un certo angolo critico di incidenza θ_c dato da

$$\cos \theta_c = n \quad (10.8)$$

dove θ_c è definito come il complemento dell'angolo fatto con la normale. Se definiamo δ tale per cui $n = 1 - \delta$, allora

$$\theta_c \simeq \sqrt{2\delta} \quad (10.9)$$

Per energie diverse da quelle degli edge di assorbimento abbiamo che

$$\delta = 2\pi r_0 \lambda^2 N_e \quad (10.10)$$

dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione incidente, $r_0 = e^2/mc^2$ è il raggio classico dell'elettrone e N_e è la densità elettronica nel materiale. Dalle (10.9) e (10.10) vediamo che l'angolo critico è direttamente proporzionale alla lunghezza d'onda della radiazione incidente, o inversamente proporzionale alla sua energia. Quindi per riflettere fotoni di alta energia servono angoli di incidenza radente sempre più piccoli. Inoltre, l'angolo critico dipende dalla densità elettronica, che è approssimativamente il numero atomico del materiale che compone la superficie: quindi per avere migliore riflessione saranno preferibili materiali ad alto Z.

In Figura 10.12 mostriamo le curve (teoriche) di riflessione in funzione dell'energia del fotone incidente per vari materiali. Gli specchi reali sono meno efficienti a causa del livello di politura delle superfici. Come si vede, le curve presentano delle discontinuità vicino alle energie degli edge di assorbimento. Inoltre possiamo vedere come la transizione all'angolo critico non sia netta. Ricapitolando abbiamo che

- ❑ La riflettività è molto alta fino all'angolo critico θ_c ;
- ❑ L'angolo critico θ_c diminuisce all'aumentare dell'energia;
- ❑ E' preferibile usare materiali ad alto Z per le superfici;

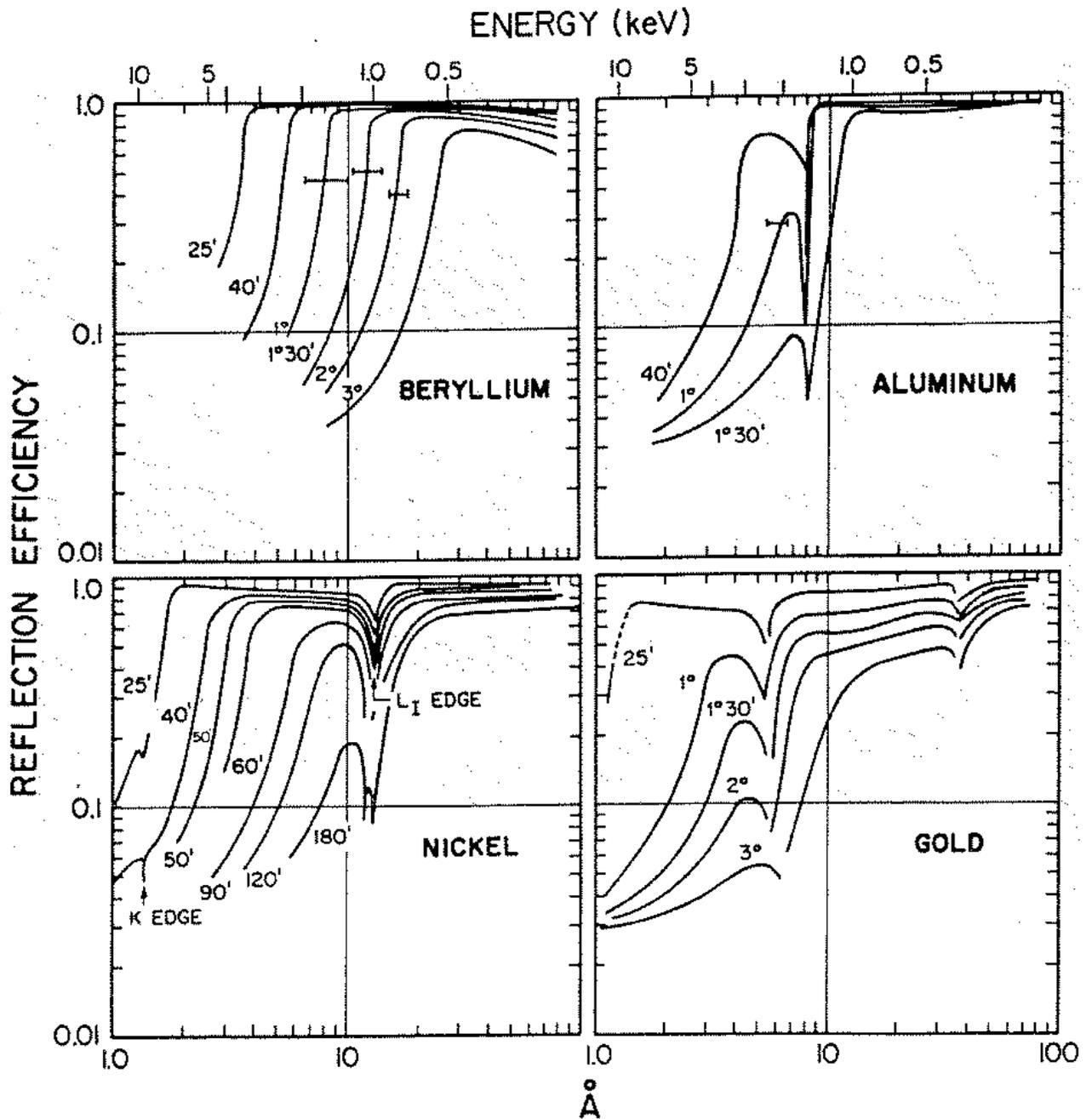


Figura 10.12: Efficienze di riflessione teoriche superficiali in funzione dell'energia (scala superiore) o della lunghezza d'onda (scala inferiore) per diversi angoli di incidenza radente e per diversi materiali: Be ($Z = 4$), Al ($Z = 13$), Ni ($Z = 28$) e Au ($Z = 79$). L'angolo critico per ogni energia può essere definito come quell'angolo a cui la riflettività diminuisce di un certo valore, per esempio 10%. La complessità delle curve è dovuta ad effetti negli edge di assorbimento.

- A causa della presenza di edge di assorbimento, la riflettività è una funzione complessa dell'energia del fotone incidente.

I primi tre punti hanno importanti conseguenze nella costruzione di specchi per raggi X, mentre l'ultimo punto è importante per l'interpretazione di dati spettrali ottenuti dagli strumenti sul piano focale degli specchi.

Per quello che riguarda la forma degli specchi, l'elemento base per focalizzare radiazione parallela è una parabola, come mostrato in Figura 10.13.

Se indichiamo con α l'angolo medio tra la sezione della parabola e la direzione del fascio incidente, e se questo angolo varia poco lungo la sezione, allora α definisce l'energia massima che può essere riflessa. La lunghezza focale è data da $F = R/2\alpha$, dove R è la distanza dello specchio dall'asse centrale della parabola. Nel caso di doppia riflessione, ottenuta con due superfici, una parabolica e l'altra iperbolica, la lunghezza focale sarà $F = R/4\alpha$.

Per quello che riguarda la risoluzione angolare σ per questo tipo di specchi, da studi effettuati si ha che

$$\sigma = \frac{(\zeta + 1)}{10} \frac{\tan^2 \theta}{\tan \alpha} \left(\frac{L}{F} \right) + 4 \tan \theta \tan^2 \alpha \quad \text{radianti} \quad (10.11)$$

dove ζ è il rapporto tra gli angoli di incidenza nel paraboloide e nell'iperboloide, L è la lunghezza dello specchio e θ è l'angolo di incidenza rispetto all'asse ottico. In un caso tipico σ aumenta monotonicamente da 0 a $10''$ per θ che varia da 0 a $30''$.

In Figura 10.14 viene mostrato il principio costruttivo degli specchi per raggi X (si ringrazia il Prof. Citterio, INAF-Osservatorio Astronomico di Brera), mentre in Figura 10.15 sono mostrati gli specchi utilizzati nel satellite per astronomia X XMM-Newton.

10.4.2 Diffrazione di Bragg e Laue

Come abbiamo detto, esiste la possibilità di utilizzare l'informazione sulla fase dei fotoni incidenti su cristalli ad alto Z se questi subiscono diffrazione di Bragg o di Laue. La differenza che esiste tra i due tipi di diffrazione è che nel caso di diffrazione di Bragg i fotoni diffratti lasciano il cristallo attraverso la stessa superficie da cui erano entrati (vengono cioè "riflessi"), mentre nel caso di diffrazione di Laue i fotoni diffratti vengono trasmessi attraverso il cristallo, ed escono da una superficie diversa da quella da cui erano entrati.

Nella Figura 10.16 viene mostrato il principio della diffrazione di Bragg: affinché due fotoni incidenti su due piani cristallini successivi escano in fase è necessario che la differenza di cammino sia tale da contenere un numero intero di lunghezze d'onda, cioè

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (10.12)$$

dove d è la distanza tra due piani cristallini successivi, θ è l'angolo di riflessione (noto anche come angolo di Bragg), n è un numero intero e λ la lunghezza d'onda della radiazione incidente. Eq. 10.12 è nota come legge di Bragg e si noti come questa dipenda da λ (e quindi dall'energia dei fotoni incidenti) e dalla distanza tra i piani cristallini (e quindi dal materiale).

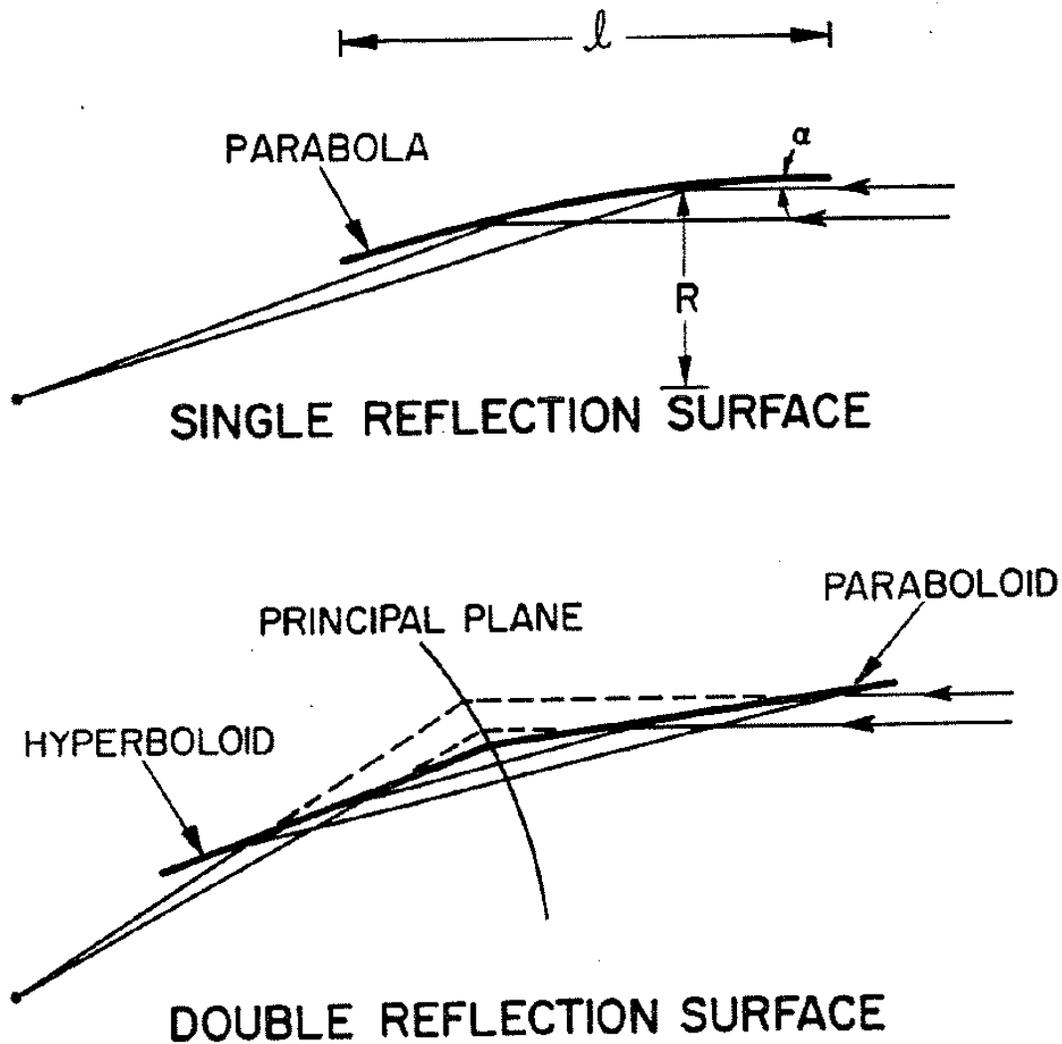


Figura 10.13: Sezioni di superfici riflettenti per specchi di raggi X. Nel caso di sezione parabolica il fotone viene riflesso una sola volta prima di essere focalizzato, mentre nella figura inferiore viene mostrato un profilo formato da un segmento di parabola ed uno di iperbole. In questo caso avvengono due riflessioni.

PROCESSO DI ELETTROFORMATURA

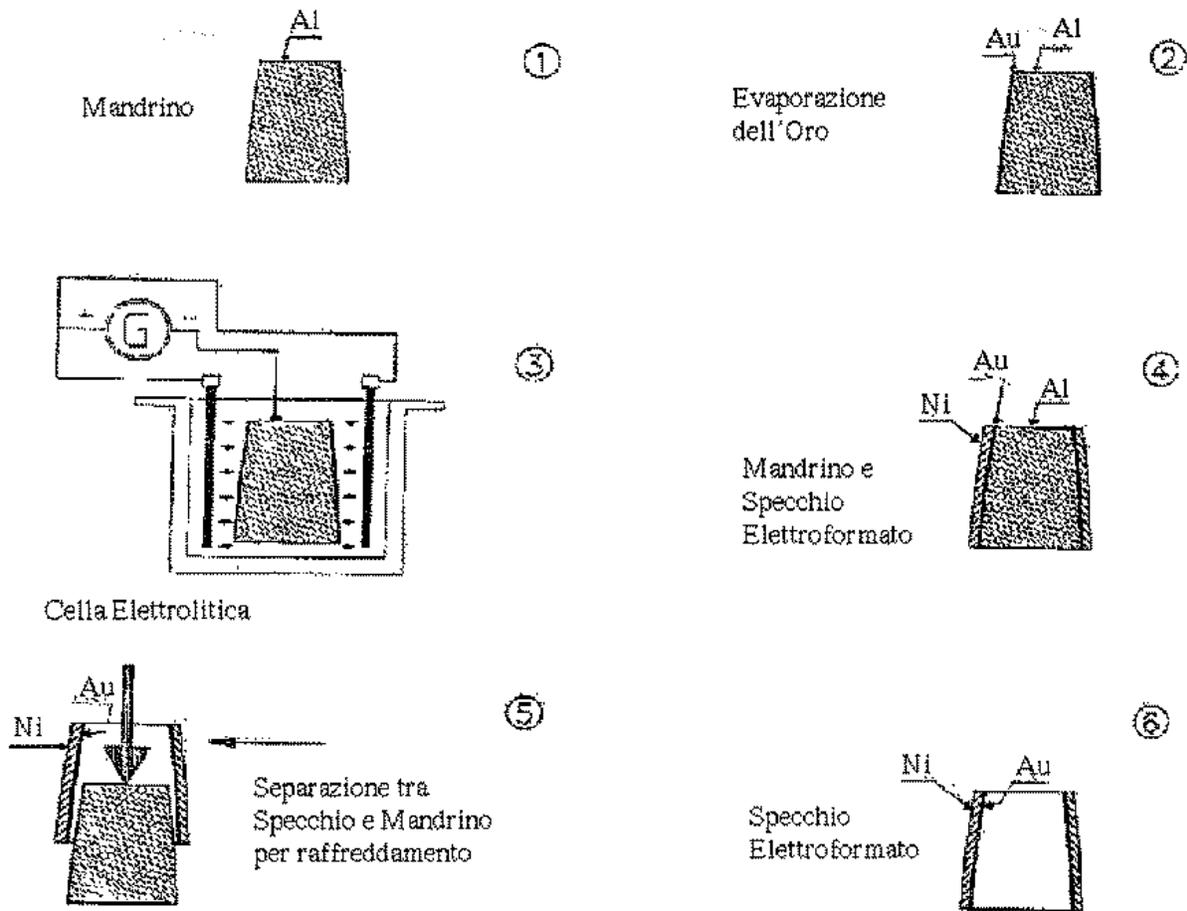


Figura 10.14: Processo costruttivo di uno specchio per raggi X per elettroformatura. ① Un mandrino di Alluminio rivestito di uno strato di Nichel viene sagomato con il profilo parabolico-iperbolico e sottoposto a politura per raggiungere una microrugosità minore di $0.05 \mu\text{m}$. ② Il mandrino viene posto in un crogiolo con dell'Oro. Per bombardamento elettronico l'Oro viene fatto evaporare. L'Oro si deposita sul mandrino formando uno strato di circa $0.1 \mu\text{m}$. ③ Lo strato di Oro viene rivestito di un ulteriore strato di Nichel ($0.1-1.0 \text{ mm}$) per bagno elettrolitico. ④ La superficie riflettente dello specchio è formata dallo strato di Oro, mentre lo strato di Nichel funge da supporto meccanico. ⑤ La separazione tra lo specchio ed il mandrino avviene per raffreddamento: il coefficiente di espansione termica del Nichel è circa la metà di quello dell'Alluminio. Inoltre l'adesione tra l'Oro e l'Alluminio è molto piccola, facilitando la separazione. ⑥ Diversi specchi vengono innestati tra loro in modo da aumentare l'area di raccolta.

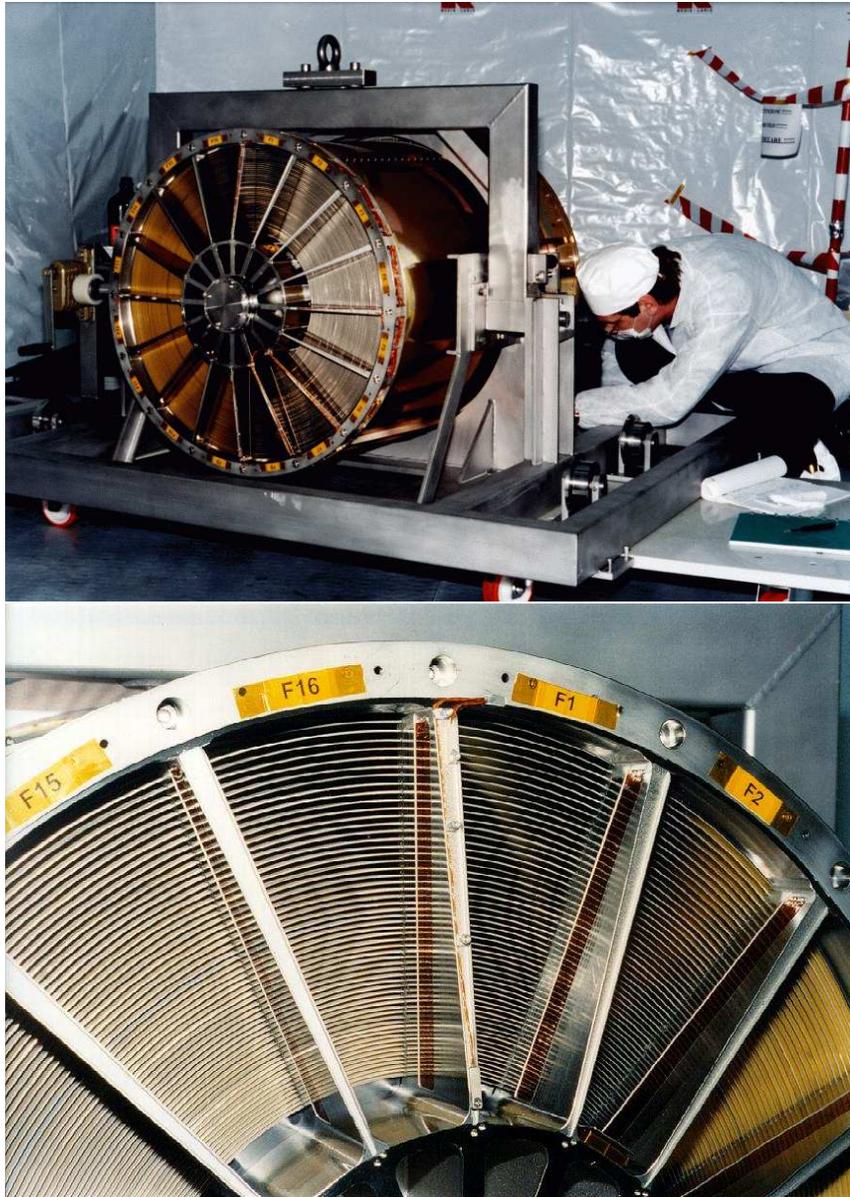


Figura 10.15: Immagini di uno dei tre specchi per raggi X a bordo di XMM-Newton. Ognuno è formato da 58 specchi ad incidenza radente di forma Wolter I, innestati in una configurazione coassiale e cofocale. La geometria delle ottiche deriva dalla necessità di ottenere la maggiore area effettiva possibile sul più ampio intervallo di energia, con particolare enfasi alla regione attorno a 7 keV. A causa di ciò, gli specchi utilizzano un angolo di incidenza molto piccolo, $30'$, per avere una riflettività sufficiente ad alta energia. La lunghezza focale dei telescopi è di 7.5 metri, ed il diametro dello specchio più esterno è di 70 cm, in modo da poter essere alloggiato nel vano di carico del lanciatore.

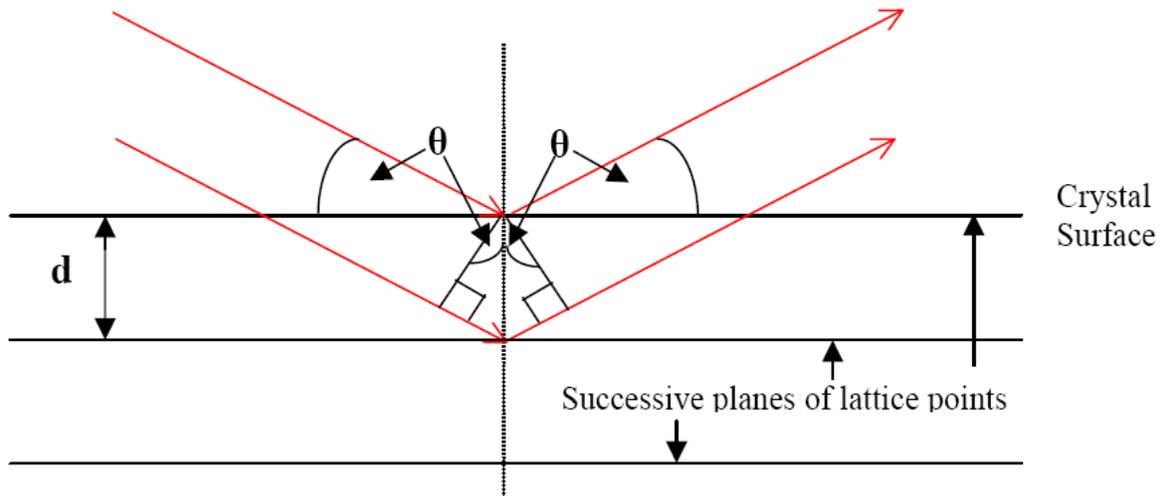


Figura 10.16: Geometria della diffrazione di Bragg: due raggi di alta energia vengono diffratti da due piani cristallini adiacenti alla superficie di un cristallo.

Nel caso in cui il fotone incidente attraversi il cristallo si parla, come abbiamo detto, di diffrazione di Laue. In questo caso il percorso effettuato da un fotone sarà come quello mostrato in Figura 10.17, in cui l'angolo θ soddisfa la legge di Bragg (Eq. 10.12). Il fatto che un raggio possa emergere dal cristallo dipenderà dalla geometria del cristallo stesso, cioè dall'orientamento dei piani cristallini rispetto alla direzione del fotone incidente.

Utilizzando la legge di Bragg e gli indici di Miller h, k, l per descrivere l'orientamento dei piani cristallini, abbiamo che

$$\frac{2a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \sin \theta = n\lambda \quad (10.13)$$

dove a è la costante reticolare del cristallo (si veda Figura 10.18).

Dall'Eq. 10.13 è possibile ricavare la direzione del fotone diffratto se è nota l'energia del fotone incidente e la natura del cristallo.

Un'altra importante proprietà è il rendimento (*throughput*) del processo di diffrazione di Laue, definito come il rapporto tra l'intensità del fotone diffratto $P(\tau)$ che attraversa un cristallo di spessore τ e l'intensità del fotone incidente $P(0)$. E' possibile dimostrare che

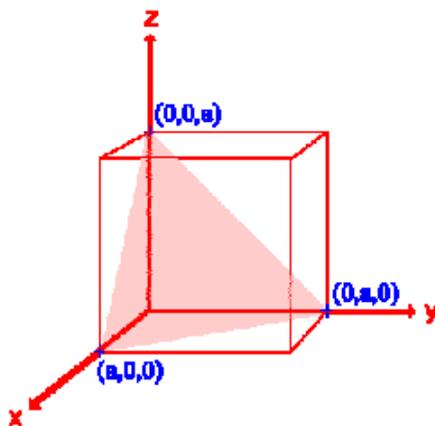


Figura 10.18: Definizione degli indici di Miller per l'orientamento dei piani reticolari di un cristallo. In figura è mostrato il piano (111).

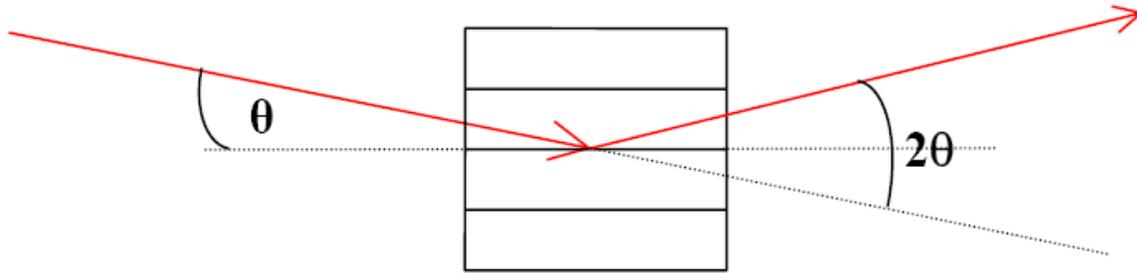


Figura 10.17: Geometria della diffrazione di Laue: un raggio di alta energia attraversa un cristallo e subisce diffrazione di Bragg sui piani cristallini, emergendo con un angolo pari a θ .

$$\frac{P(\tau)}{P(0)} \equiv \varepsilon = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sigma\tau})e^{-\mu\tau} \quad (10.14)$$

dove ε è definita l'efficienza del cristallo, σ è il coefficiente di diffrazione, μ in coefficiente di attenuazione dovuto ad uno spessore τ . Utilizzando questa relazione è possibile ottimizzare lo spessore dei cristalli per avere la massima efficienza. In Figura 10.19 vengono mostrate delle curve di ottimizzazione relative al piano cristallino (440) del Germanio.

Si noti che quando si parla di efficienza del cristallo è necessario distinguere tra efficienza di picco (*peak efficiency*), espresso normalmente come una percentuale, e la riflettività integrata (*integrated reflectivity*), espressa in fotoni/secondo. La riflettività integrata non è altro che il flusso totale diffratto, e misura il flusso di fotoni diffratti dall'intero cristallo in un dato intervallo di tempo. Ad esempio, misure effettuate su cristalli di Germanio e Rame danno efficienze di $\sim 30\%$ e $\sim 20\%$ per fotoni nella banda 300–900 keV.

Vediamo ora di introdurre il concetto di *mosaicità*. Un cristallo perfetto è quello in cui gli atomi si trovano al centro di un reticolo cristallino regolare. In questo caso, raggi X verrebbero diffratti come mostrato in Figura 10.20: fino ad un certo angolo θ' , alcuni arcosecondi dall'angolo di Bragg θ , l'intensità della radiazione diffratta è zero. Tra θ' e θ l'intensità aumenta rapidamente ad efficienza 100%, vi rimane per un certo intervallo angolare $\Delta\theta_0$, e poi diminuisce rapidamente ad intensità zero. Questo però accade per cristalli perfetti, mentre in natura il reticolo cristallino presenta delle imperfezioni (dette *dislocazioni*) che fanno sì che il valore di $\Delta\theta_0$ sia molto maggiore di quello previsto nel caso di cristalli perfetti.

Questo ha portato allo sviluppo di un modello noto come *Cristallo Idealmente Imperfetto* (*Ideally Imperfect Crystal*): questo cristallo viene costruito a partire da un elevato numero di minuscoli frammenti di cristallo posizionati in una configurazione con i loro piani reticolari quasi paralleli. Questa configurazione prende il nome di *cristallo a mosaico*. La distribuzione statistica degli angoli è considerata Gaussiana, e la *mosaicità* $\Delta\theta_B$ viene definita come la Ampiezza a Mezzo Massimo (Full Width at Half Maximum, FWHM) della distribuzione (vedi Figura 10.21).

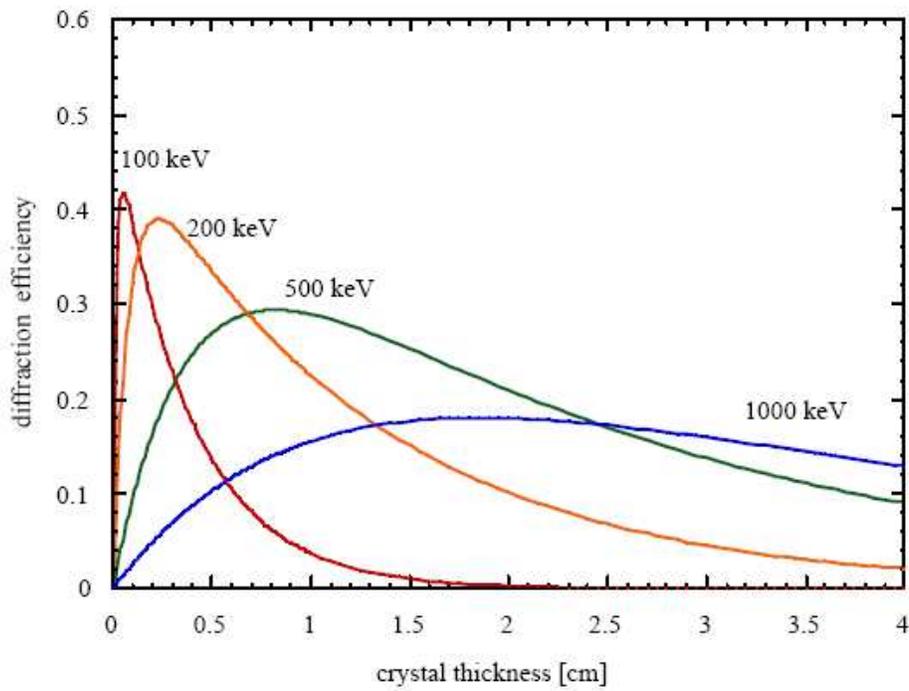


Figura 10.19: Curve teoriche di ottimizzazione dello spessore di cristalli di Germanio per diffrazione di Laue sul piano cristallino (440).

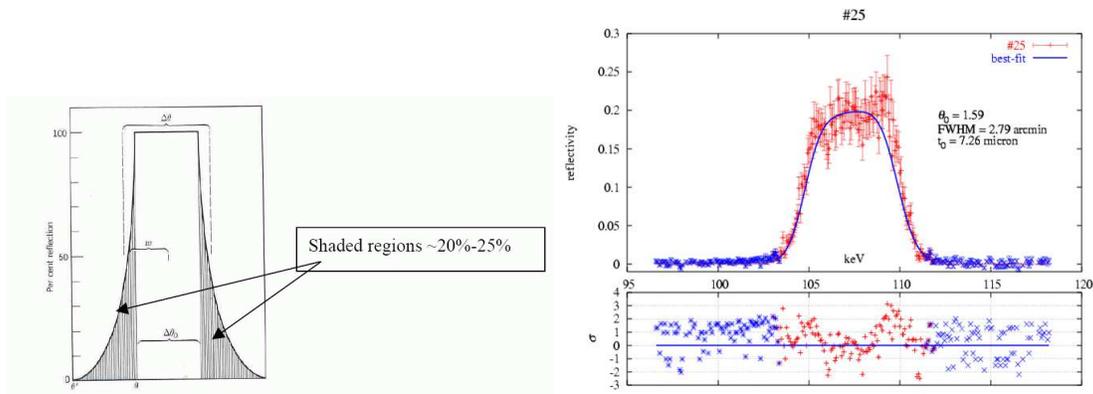


Figura 10.20: Confronto tra la diffrazione di Bragg da un cristallo perfetto (a sinistra) ed un cristallo di Rame (111) (a destra).

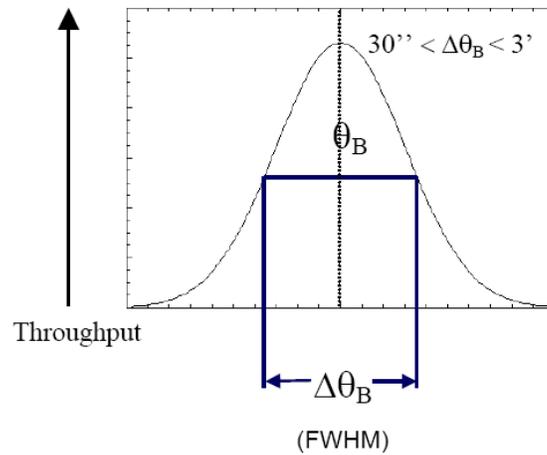


Figura 10.21: Definizione della mosaicit  $\Delta\theta_B$ di un cristallo.

La mosaicit  non   quindi altro che una misura delle imperfezioni di un cristallo. Ovviamente all'aumentare della mosaicit  corrisponde una diminuzione dell'efficienza di picco, mentre l'efficienza integrata rimane pressoch  costante. Altri parametri che sono influenzati dalla mosaicit  sono il campo di vista, la risoluzione angolare e l'intervallo operativo in energia. In prima approssimazione abbiamo che la mosaicit    circa 1.5 volte il campo di vista.

Misurata la mosaicit  di un cristallo   possibile ricavarci l'intervallo operativo in energia utilizzando la legge di Bragg (Eq. 10.12) e la definizione di mosaicit :

$$2d\theta_B = \frac{hc}{E} \tag{10.15a}$$

$$\frac{\Delta\theta_B}{\theta_B} = \frac{\Delta E}{E} \tag{10.15b}$$

dove h   la costante di Planck e c la velocit  della luce (abbiamo assunto $n = 1$ e θ piccolo nella legge di Bragg). Otteniamo quindi che l'intervallo operativo in energia di un cristallo di mosaicit  $\Delta\theta_B$  

$$\Delta E = \frac{2dE^2}{hc} \Delta\theta_B \tag{10.16}$$

10.4.2.1 Le lenti di Laue

Le lenti di Laue si basano sull'utilizzo di pi  di un cristallo per focalizzare fotoni di alta energia, ed il principio di funzionamento   schematizzato in Figura 10.22, dove viene mostrata la configurazione di cristalli orientati tutti nella stessa direzione θ e posizionati su di un anello di raggio R . I raggi incidenti di una certa energia verranno focalizzati ad una certa distanza focale F data da

$$F = \frac{R}{\tan 2\theta} \tag{10.17}$$

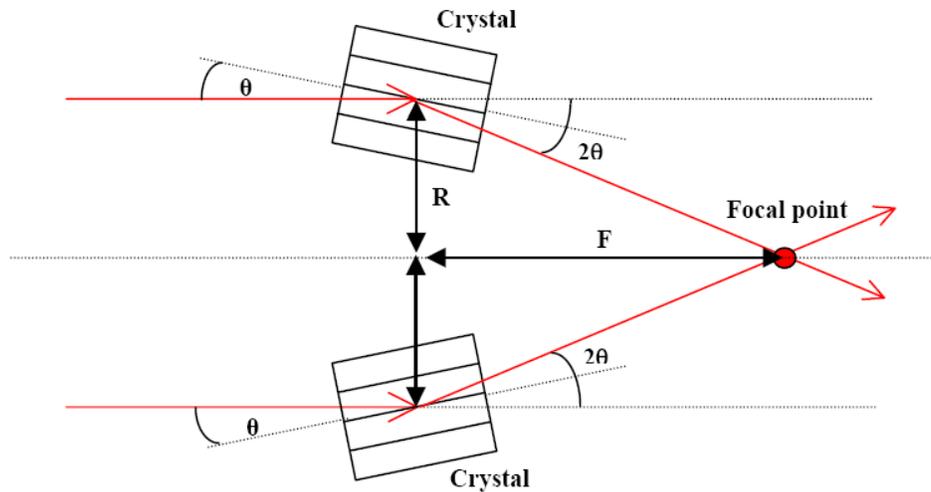


Figura 10.22: Principio di funzionamento di una lente di Laue: i cristalli sono posizionati su di un anello di raggio R , hanno tutti lo stesso orientamento θ e focalizzano fotoni di una certa energia ad una distanza focale F .

Combinando Eqs. 10.15a e 10.17 abbiamo che l'energia E del fotone focalizzato alla distanza focale F è data da

$$E = \frac{hc}{dR} F \quad (10.18)$$

cioè cristalli posizionati a raggi R diversi focalizzeranno fotoni di energia diversa. Questo permette di aumentare l'intervallo operativo in energia se innestiamo in anelli concentrici più cristalli, come mostrato in Figura 10.23.

Dall'Eq. 10.13 vediamo come sia possibile variare l'angolo di Bragg, e quindi la focalizzazione della Lente, agendo sulla costante reticolare a (cioè variando d in Eq. 10.18). Quindi cambiando il tipo di cristallo si varia la distanza focale della lente. Ad esempio, per una data energia, il Rame riflette con un angolo di Bragg maggiore di quello prodotto dal Germanio.

10.5 Rivelazione di raggi X da sorgenti cosmiche: Considerazioni statistiche

Un rivelatore collimato registrerà (conterà) eventi che provengono da un piccolo angolo solido del cielo. A questi si aggiungeranno eventi di fondo. Possiamo quindi considerare tre differenti tipi di conteggi:

- ① il flusso di fotoni j_s , proveniente dalla sorgente all'interno del campo di vista;

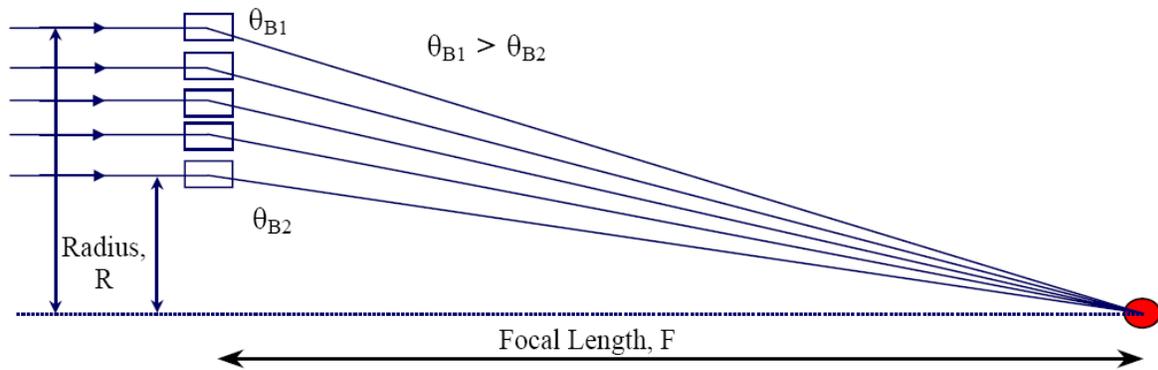


Figura 10.23: Lente di Laue con cristalli innestati in anelli concentrici.



Figura 10.24: Foto di una lente di Laue realizzata per l'esperimento CLAIRE, consistente in 556 cristalli di Germanio Ge(111) montati su 8 anelli concentrici (si ringrazia Peter von Balmoos).

- ② il flusso di fotoni $dj_d/d\Omega$, proveniente dal fondo diffuso che cade all'interno dell'angolo solido del collimatore;
- ③ il flusso j_b di fondo non dovuto all'emissione diffusa, assunto omnidirezionale e non collimato (cioè è di energia così elevata che penetra il rivelatore indipendentemente dalla direzione).

Quindi il tasso di conteggi *netto* osservato ad un certo istante sarà

$$R = \left[j_s f(\theta - \theta_0) + \frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b \right] \varepsilon A \quad \text{cts sec}^{-1} \quad (10.19)$$

dove $f(\theta - \theta_0)$ è la funzione di trasmissione del collimatore, $\theta - \theta_0$ è la distanza angolare tra l'asse centrale del collimatore e la direzione della sorgente, $\delta\Omega$ è l'angolo solido del collimatore, ε è l'efficienza del rivelatore, e A è la sua area.

Nel caso di collimatori meccanici, $f(\theta - \theta_0)$ ha la forma triangolare già descritta (Eq. 10.7)

$$f(\theta - \theta_0) = \begin{cases} 1 - \frac{|\theta - \theta_0|}{\theta_{1/2}} & \text{per } |\theta - \theta_0| < \theta_{1/2} \\ 0 & \text{per } |\theta - \theta_0| > \theta_{1/2} \end{cases}$$

dove $\theta_{1/2}$ è una caratteristica del collimatore.

Per le sorgenti più intense j_s è dell'ordine di 100 fotoni $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$, mentre per le sorgenti più deboli arriva a $\sim 10^{-4}$ fotoni $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$. Il flusso al di sopra di 1 keV dovuto ad emissione diffusa è circa 10 fotoni $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$, mentre quello non diffuso, εj_b , è dell'ordine di 0.01 cts sec^{-1} in 1–10 keV, ma dipende in modo significativo dalle tecniche di discriminazione usate per eliminarlo (che discuteremo dopo).

Vediamo ora di studiare l'accumulo di dati: nel caso più semplice una sorgente sarà visibile nel campo di vista del collimatore per un certo tempo t_1 , dando luogo ad un conteggio netto di $N_1 = R_1 t_1$ conteggi. Il fondo verrà quindi accumulato durante un periodo t_2 , producendo un conteggio $N_2 = R_2 t_2$. Il tasso di conteggio netto dalla sorgente sarà quindi

$$R_1 - R_2 = j_s f(\theta - \theta_0) \varepsilon A = N_1/t_1 - N_2/t_2 \quad (10.20)$$

L'errore statistico associato a j_s è semplicemente

$$\frac{\delta j_s}{j_s} = \frac{\sqrt{N_1 t_2^2 + N_2 t_1^2}}{N_1 t_2 - N_2 t_1} \quad (10.21)$$

dato che N_1 e N_2 hanno distribuzioni normali con deviazione standard $\sqrt{N_1}$ e $\sqrt{N_2}$. Se il numero di conteggi è minore di circa 10 è necessario utilizzare la statistica di Poisson per ottenere la deviazione più probabile.

Nel caso di osservazione *scanning*, quella in cui l'asse dello strumento è ruotato sopra la sorgente di un angolo maggiore del campo di vista, il conteggio netto accumulato sarà

$$N_s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} j_s \varepsilon A \frac{f(\theta - \theta_0)}{\omega} d\omega \quad (10.22)$$

dove ω è la velocità di rotazione. Utilizzando la forma triangolare (10.7) per $f(\theta - \theta_0)$ l'integrazione della (10.22) fornisce

$$N_s = j_s \varepsilon A \frac{\theta_{1/2}}{\omega} \quad \text{cts} \quad (10.23)$$

La quantità $\theta_{1/2}/\omega$ non è altro che il tempo di transito della sorgente nel campo di vista del collimatore.

Vediamo ora di determinare l'errore associato alla misura del conteggio da una sorgente, in modo di estrarre il rapporto segnale rumore. Trattiamo due casi limite: j_s maggiore del fondo e j_s minore del fondo. Nel primo caso avremo che

$$\delta N_s = \sqrt{N_s} = \sqrt{j_s \varepsilon A \frac{\theta_{1/2}}{\omega}} \quad (10.24)$$

mentre nel secondo

$$\delta N_s = \sqrt{N_B} = \sqrt{\left(\frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b \right) \varepsilon A t} \quad (10.25)$$

dove t è il tempo durante cui è stata osservata la sorgente. Per osservazioni *scanning* $t = 2\theta_{1/2}/\omega$. Il rapporto segnale/rumore è allora dato da

$$S/N = \frac{N_s}{\delta N_s} = \frac{N_s}{\sqrt{N_B}} = j_s \sqrt{\frac{\varepsilon A t}{\left(\frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b \right)}} \quad (10.26)$$

La quantità S/N è formalmente il numero di deviazioni standard (σ) per cui i conteggi dalla sorgente sono maggiori del fondo. Le due espressioni (10.24) e (10.26) determinano il modo in cui i parametri dell'esperimento influenzano i risultati delle osservazioni, come la sensibilità e gli errori.

Data la dipendenza dalla radice quadrata, per raddoppiare la sensibilità sarà necessario quadruplicare il tempo di osservazione o l'area dello strumento.

Si definisce sensibilità di uno strumento il flusso più debole (il più piccolo j_s) che produce un certo numero di deviazioni standard al di sopra del fondo. Tradizionalmente questo numero è tre, quindi

$$j_{\min} = 3 \sqrt{\frac{\left(\frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b \right)}{\varepsilon A t}} \quad (10.27)$$

10.6 Il rocking come tecnica per la determinazione del fondo

Come abbiamo visto (si veda Eq. 10.7) il segnale netto da una sorgente è dato dalla differenza tra uno spettro accumulato puntando sulla sorgente ed uno spettro di fondo. Una possibilità è quella di accumulare lo spettro di fondo prima e/o dopo l'osservazione sulla sorgente in regioni "vicine", ma questa tecnica ha lo svantaggio che se il fondo mostra variabilità (ad esempio a causa di flussi variabili di particelle dovuti alla SAA o a cicli solari) allora non siamo sicuri che il fondo accumulato ad istanti diversi sia lo stesso di quello accumulato durante l'osservazione puntata. Ovviamente questo vale per sorgenti il cui conteggio sia dominato dal fondo.

Per ovviare a questo problema, e per essere sicuri di avere un monitoraggio del fondo contemporaneo alla osservazione puntata è stata messa a punto una tecnica, detta di *rocking*, che permette di misurare contemporaneamente i conteggi dalla sorgente ed i conteggi da una regione vicina a quella del puntamento spostando il collimatore sopra il rivelatore (come nel caso del PDS a bordo di BeppoSAX, o l'intero blocco collimatore+rivelatore, come nel caso dell'esperimento HEXTE a bordo di RXTE) alternativamente da una parte all'altra della direzione di puntamento. I collimatori a bordo del PDS avevano la possibilità di basculare su cinque posizioni simmetriche rispetto alla posizione neutra di puntamento, a $\pm 30'$, $\pm 60'$, $\pm 90'$, $\pm 150'$ e $\pm 210'$. In Figura 10.25 viene mostrato il tasso di conteggio accumulato dai rivelatori sotto i due diversi blocchi di collimatori (si veda Figura 10.11), e come questi vengano poi fusi insieme per ottenere il tasso di conteggio della sorgente+fondo e del fondo.

In Figura 10.26 viene mostrata la tecnica del *rocking* applicata alla determinazione dello spettro netto dell'ammasso di galassie nella costellazione di Coma (*Coma Cluster*). Lo spettro misurato nella posizione neutra (ON-source) misura lo spettro di sorgente e quello del fondo sottostante. Lo spettro misurato nelle posizioni laterali (prive di sorgenti) misura lo spettro del fondo (OFF-source). La loro differenza permette di estrarre il fondo netto dalla sorgente. Dato che lo spettro è ottenuto per differenza, si possono rilevare segnali che sono qualche per cento del segnale di fondo. A causa della particolare orbita di BeppoSAX (a bassa inclinazione rispetto all'equatore, in modo da evitare i passaggi attraverso la SAA) il fondo è molto stabile e non mostra alcuna modulazione.

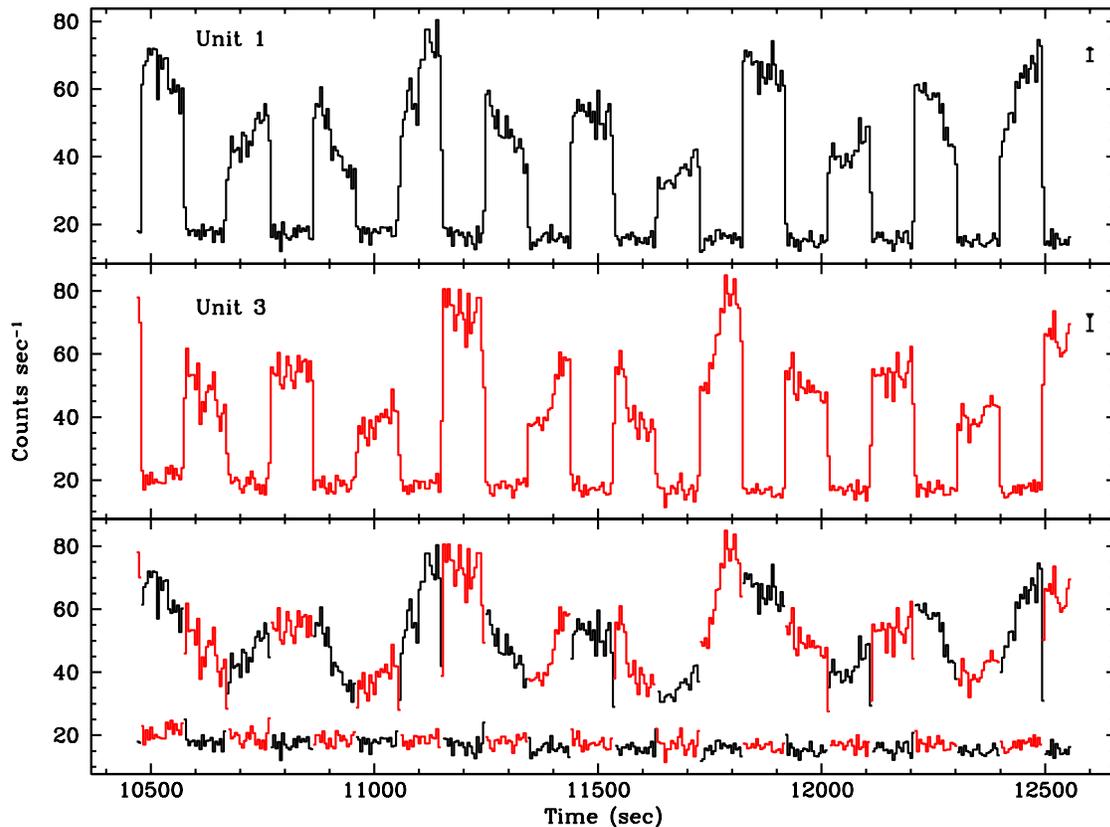


Figura 10.25: Serie temporale della pulsar X GX301-2 (periodo di pulsazione di ~ 700 sec) accumulata dallo strumento PDS. La sorgente viene puntata per 96 sec, poi per altri 96 sec il collimatore si sposta di 3.5° da una parte, poi ritorna sulla sorgente ed ancora 3.5° dalla parte opposta, per poi ricominciare il ciclo. Nei primi due pannelli sono mostrate le serie temporali relative a rivelatori sottostanti collimatori diversi. Nel momento che le due serie temporali vengono “fuse” (terzo pannello) si ottengono due serie temporali complete: una con il flusso di sorgente e l'altra con il flusso del fondo.

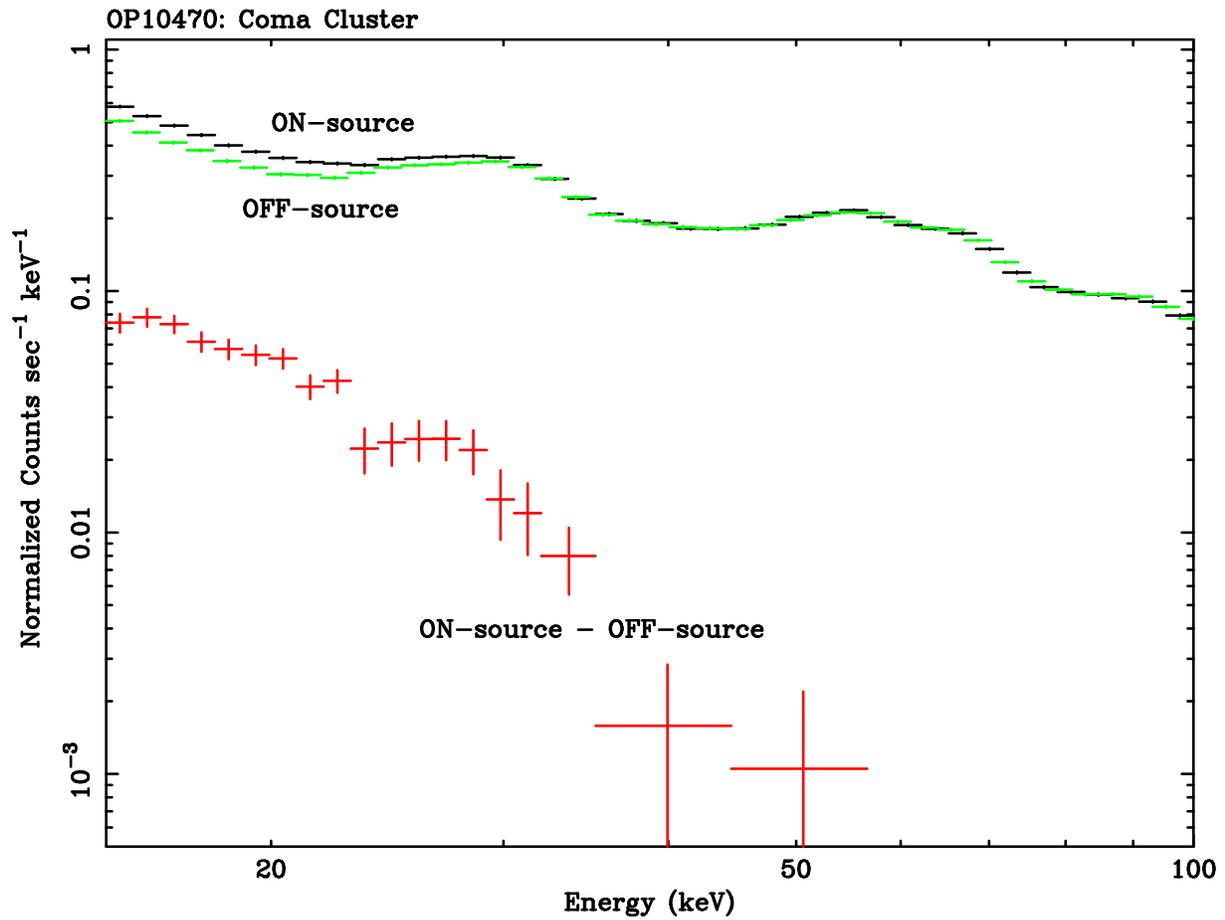


Figura 10.26: Esempificazione dell'utilizzo della tecnica di rocking per l'estrazione dello spettro netto di una sorgente. In questo caso lo spettro dell'ammasso di galassie in Coma. ON-source indica lo spettro di sorgente + fondo; OFF-source lo spettro del fondo; la loro differenza è lo spettro netto della sorgente.

Capitolo 11

Fit Spettrale e XSPEC

11.1 Introduzione

Ci occuperemo ora di tecniche che permettono il confronto tra i modelli teorici che abbiamo incontrato nella prima parte del corso (e che ci forniscono i conteggi aspettati se l'emissione fosse dovuta al processo di cui stiamo valutando l'emissione) con le misure sperimentali (cioè i conteggi misurati) ottenibili con le classi di strumenti che abbiamo brevemente descritto nel Capitolo precedente. Purtroppo, come vedremo in dettaglio, non è possibile ricavarci in maniera univoca la forma dello spettro dai conteggi osservati, quindi è necessaria una tecnica statistica che mi permetta di decidere, tra tutti i possibili modelli, quale sia quello che meglio descrive le osservazioni.

11.2 Fondamenti di fitting spettrale

La procedura standard per l'analisi di dati spettrali è quella di assumere una certa forma dello spettro avente un certo numero di parametri liberi, calcolare la risposta del rivelatore per valori prestabiliti dei parametri, e testare la bontà con dei test di verosimiglianza, il più usato dei quali è quello del χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(N_i - C_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (11.1)$$

dove C_i sono i conteggi previsti e N_i sono quelli misurati dalla sorgente in un insieme di M bin in energia indipendenti. Le varianze predette in ogni bin saranno $\sigma_i^2 = C_i$ se consideriamo solamente la statistica di conteggio dei fotoni. Se però il conteggio del fondo non è trascurabile allora i C_i devono essere interpretati come la differenza tra il vero conteggio totale T_i ed il vero conteggio dovuto al fondo B_i e quindi dovremo usare la stima $\sigma_i^2 = T_i + B_i$. Inoltre bisognerà aggiungere a σ_i ogni errore sistematico, quali ad esempio le incertezze nella misura dell'area del rivelatore ed incertezze nella determinazione dell'efficienza (si ricordino le (10.24) e (10.25)). La probabilità di ottenere un valore del χ^2 maggiore o uguale a quello osservato è dato da

$$P(> \chi^2) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_{\chi^2}^{\infty} e^{-\mu/2} \mu^{(n/2-1)} d\mu \quad (11.2)$$

dove la quantità n è il *numero dei gradi di libertà*, uguale a M meno il numero dei parametri utilizzati nel modello spettrale. Se P è sufficientemente piccolo, diciamo dell'ordine del 5%, l'ipotesi usata per calcolare i C_i può essere scartata. Generalmente i parametri che danno la probabilità più grande vengono indicati come la rappresentazione spettrale migliore (*best fit*). Se vogliamo, questo è l'equivalente di un fit ai minimi quadrati.

E' però necessario a questo punto una chiarificazione importante. Il test del χ^2 ci dice che alcuni modelli **non possono** rappresentare correttamente i nostri dati e che invece altri modelli **potrebbero** rappresentarli correttamente; quello che però il test del χ^2 **non può** dirci è quale, tra tutti i modelli (diversi) che sono permessi per il test, sia quello "migliore tra i migliori". Ad esempio, la sotto-stima delle varianze σ_i (ottenuta trascurando gli errori sistematici) condurrà ad un alto valore del χ^2 e quindi alla possibile reiezione, sbagliata, di certi modelli.

Per cercare di dare una risposta a questo problema si utilizza un altro test, il cosiddetto F-test, il quale misura se le varianze ottenute da due collezioni di dati (nel nostro caso due modelli) sono statisticamente differenti. Se lo sono, allora non potremmo dire nulla su quale delle due sia "migliore" rispetto all'altra, ma se le loro varianze sono statisticamente uguali, allora potremmo dire che i due modelli sono equivalenti. In altre parole, andremo a calcolare quale è la probabilità che la differenza dei χ^2 misurati con modelli **differenti** sia casuale. Da un punto di vista computazionale, l'F-test testa l'ipotesi che due campioni abbiano varianza differente cercando di rigettare l'ipotesi che le loro varianze siano consistenti, ed utilizza come variabile il rapporto dei χ^2 normalizzati (cioè il χ^2 diviso per il numero di gradi di libertà).

I conteggi previsti C_i vengono calcolati secondo la

$$C_i = \int_0^{\infty} \frac{dN}{dE_0} P_i(E_0) dE_0 \quad (11.3)$$

dove dN/dE_0 è lo spettro incidente che viene assunto, e $P_i(E_0)$ è la probabilità che un fotone incidente di energia E_0 risulti in un conteggio in un canale del rivelatore i che è tarato in una banda di energia nominale tra $E_i|_{\min}$ e $E_i|_{\max}$, cioè

$$P_i(E_0) = \int_{E_i|_{\min}}^{E_i|_{\max}} P(E, E_0) dE \quad (11.4)$$

Veniamo quindi ridotti al problema di determinare la funzione densità di probabilità che un fotone incidente di energia E_0 risulti in un segnale (impulso) corrispondente ad un'energia tra E e $E + dE$. Separiamo questa densità di probabilità in due parti: la prima, $P_L(E', E_0)$, che un fotone incidente di energia E_0 depositi un'energia compresa tra E' e $E' + dE'$ nel rivelatore (con $E' \leq E_0$) e la seconda, $P_R(E, E')$, densità di probabilità di risoluzione, che una perdita di energia E' risulti in un impulso equivalente nell'intervallo tra E e $E + dE$. Allora avremo che

$$P(E, E_0) = \int_0^{E_0} P_R(E, E') P_L(E', E_0) dE' \quad (11.5)$$

In generale, la risoluzione può essere considerata una funzione Gaussiana

$$P_R(E, E') = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(E')} \exp \left[-\frac{(E - E')^2}{2\sigma^2(E')} \right] \quad (11.6)$$

dove la varianza $\sigma(E')$ è legata alla FWHM dalla relazione $\sigma = 0.42$ (FWHM).

Descriviamo ora brevemente i vari contributi alla funzione P_L , che sono (i) la probabilità che un fotone riesca a penetrare nel volume del rivelatore, (ii) la probabilità che avvenga un certo tipo di interazione tra il fotone ed il rivelatore e (iii) la distribuzione di perdita di energia per quel particolare processo. Vediamo quindi che P_L può essere determinato da una combinazione di calcoli analitici, simulazione Monte Carlo e misure sperimentali. Nel caso di un contatore a scintillazione (ma il principio si può estendere anche ad apparecchi a gas e a semiconduttore) possiamo scrivere

$$P_L(E', E_0) = \exp[-\mu_w(E_0) t_w] \times \left\{ \frac{\mu_p(E_0)}{\mu(E_0)} P_L(E', E_0)|_{\text{photo}} + \frac{\mu_c(E_0)}{\mu(E_0)} P_L(E', E_0)|_{\text{Comp}} \right\} \quad (11.7)$$

La frazione μ_p/μ corrisponderà ad interazioni via effetto fotoelettrico, la frazione μ_c/μ ad interazioni via effetto Compton, dove μ_p è il coefficiente di assorbimento dovuto ad assorbimento via fotoelettrico e μ_c quello dovuto ad assorbimento via effetto Compton. μ_w e t_w sono il coefficiente di assorbimento e lo spessore della finestra.

Una interazione via effetto fotoelettrico può depositare nel rivelatore tutta la sua energia, od una parte di essa corrispondente alla fuga dal rivelatore dei raggi X della shell K o L che risultano dalla diseccitazione dell'atomo originale che aveva assorbito il fotone. Diventa allora importante determinare il numero relativo di raggi X che vengono assorbiti via effetto fotoelettrico nel rivelatore. Per semplicità assumeremo che il fascio incida perpendicolarmente il rivelatore e che questi sia di grandi dimensioni.

Di queste interazioni una certa frazione δ_k avverrà nella shell K , e di questa frazione il guadagno di fluorescenza ω_k è la probabilità che l'atomo si disecciti emettendo un raggio X dalla shell K (si vedano i valori di ω_k per alcuni materiali usati in astronomia X in Tabella 11.1). Assumendo emissione isotropa, si può integrare la probabilità di penetrazione di un raggio X proveniente dalla shell K sul percorso di fuga dal rivelatore in funzione dell'angolo solido. La frazione di tutte le interazioni che hanno come risultato la fuga dalla finestra frontale e quella posteriore del rivelatore sono

$$f_1(E_0) = \frac{1}{2} \frac{\omega_k \delta_k}{P_I} \left\{ 1 - \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_0)} \ln \left(1 + \frac{\mu(E_0)}{\mu(E_k)} \right) \right\} \quad (11.8a)$$

$$f_2(E_0) = \frac{1}{2} \frac{\omega_k \delta_k}{P_I} \exp[-\mu(E_0) t] \left\{ \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_0)} \ln \left(\frac{\mu(E_k)}{\mu(E_k) - \mu(E_0)} \right) - 1 \right\} \quad (11.8b)$$

Il contributo a P_L diventa quindi

Tabella 11.1: Proprietà di materiali utilizzati in sistemi di rivelazione per astronomia X

	Numero Atomico Z	Densità ρ (g cm ⁻³)	Energia Shell E_s (keV)	Energia Riga X (keV)	Guadagno Fluoresc. ω_s	Frazione Interaz. δ_s	Energia ($\mu_c = \mu_p$) (keV)
<i>Gas Contatori Proporzionali</i>							
Metano	6	$0.713 \cdot 10^{-3}$	0.284	0.277		0.96	20
Ne	10	$0.901 \cdot 10^{-3}$	0.867	0.849, 0.858	0.01	0.94	38
Ar	18	$1.780 \cdot 10^{-3}$	3.203	2.96	0.105	0.90	72
			0.285, 0.246, 0.244				
Kr	36	$3.740 \cdot 10^{-3}$	14.32	12.64, 14.12	0.625	0.88	170
			1.92, 1.73, 1.67		0.04		
Xe	54	$5.850 \cdot 10^{-3}$	34.56	29.67, 33.78	0.875	0.86	300
			5.45, 5.10, 4.78	4.10, 4.49, 5.30	0.14		
<i>Cristalli Scintillatori</i>							
NaI	53	3.61	33.16	28.47, 32.30	0.865	0.84	260
			5.19, 4.86, 4.56	3.93, 4.22, 4.80	0.13		
CsI	55	4.54	35.97	30.81, 34.99	0.885	0.68	300
				4.28, 4.62, 5.28	0.15		
Si	14	2.33	1.84	1.74, 1.83	0.04	0.92	53
Ge	32	5.36	11.10	9.88, 10.98	0.49	0.91	145
			1.42, 1.41, 1.21	1.19, 1.22	0.01		
<i>Finestre</i>							
Be	4	1.82	0.111	0.109		0.97	14
Mylar	8	1.4	0.532	0.525		0.65	
Formvar	8	1.2	0.532	0.525		0.65	
Poliprop.	6	0.95	0.284	0.277		0.92	
Aria ^a	18	$1.29 \cdot 10^{-3}$	3.20	2.96	0.105	0.54	27
Aria ^b	8		0.532	0.525			
Aria ^c	7		0.400	0.392			
<i>Collimatori</i>							
Mg	12	1.74	1.30	1.25, 1.30	0.02	0.93	46
Al	13	2.7	1.56	1.49, 1.55	0.03	0.93	50
Fe	26	7.87	7.11	6.40, 7.06	0.31	0.90	135
			0.849, 0.722, 0.709				
Ni	28	8.9	8.33	7.47, 8.27	0.38	0.89	140
			1.01, 0.877, 0.858				
Cu	29	8.96	8.99	8.04, 8.91	0.40	0.89	145
			1.10, 0.954, 0.935				

^a 1.3% Ar; ^b 23.2% O; ^c 75.5% N

$$P_L(E', E_0)|_{\text{photo}} = \left\{ [1 - f(E_0)] \delta(E' - E_0) + \sum_k f_k(E_0) \delta(E' - (E_0 - E_k)) \right\} \quad (11.9)$$

dove abbiamo definito $f = \sum_k f_k = \sum_k (f_1 + f_2)_k$ e la somma su k considera tutti i raggi X che devono essere considerati individualmente.

Per calcolare la perdita di energia per scattering Compton bisogna “seguire” il fotone scatterato per vedere se esso subisce ulteriori interazione nel rivelatore.

In un trattamento rigoroso si dovrebbero seguire (attraverso un Monte Carlo) tutti i fotoni ed elettroni secondari prodotti da ogni processo iniziale per determinare la perdita totale di energia. Nel regime di interesse per l’astronomia X, per contatori a gas l’energia di utilizzo è tale per cui il termine μ_c/μ è trascurabile, mentre per i cristalli scintillatori possiamo usare l’approssimazione

$$P_L(E', E_0)|_{\text{Comp}} = a_1(E_0) \delta(E' - E_0) + a_2(E_0) \delta(E' - (E_0 - E_k)) + \frac{a_3(E_0)}{E_C} H(E_C - E') \quad (11.10)$$

dove $H(x)$ è la funzione scalino definita come

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

I coefficienti $a_1(E_0)$ rappresentano la frazione di fotoni Compton che alla fine depositeranno tutta la loro energia; i coefficienti $a_2(E_0)$ la frazione di fotoni Compton che terminano con un assorbimento fotoelettrico che porterà ad una fuga di un fotone X dalla shell K . Ciò che rimane, cioè

$$a_3(E_0) = 1 - a_1(E_0) - a_2(E_0) \quad (11.11)$$

viene approssimato con un deposito di energia a spettro costante da zero fino ad una energia massima E_C che può essere perduta in uno scattering singolo.

E’ bene mettere in evidenza che finora abbiamo sempre considerato fotoni che incidono sulla finestra del rivelatore. Vi sono altri affetti di cui bisogna tenere conto, quali fotoni che vengono scatterati via Compton dal collimatore, e fotoni che penetrano il rivelatore senza subire interazioni e sono poi scatterati indietro. Per sorgenti puntiformi si tiene conto di questi effetti nella determinazione del fondo, ma possono diventare importanti nello studio del fondo cosmico diffuso.

11.3 Fitting spettrale e XSPEC

XSPEC è il programma che viene utilizzato dalla maggior parte degli studiosi che si occupano di studi spettrali nella banda X. E’ stato sviluppato al Goddard Space Flight Center della NASA da Keith Arnaud, ed ora il suo sviluppo viene portato avanti da una squadra di programmatori

e/o astrofisici sia al Goddard che in altre parti del mondo. Per una trattazione particolareggiata rimandiamo al suo manuale, disponibile sia on-line che come aiuto a linea di comando. Quello che tratteremo qui sarà solamente la “filosofia” che sta alla base del programma e che, alla luce di quanto abbiamo detto nella sezione precedente, ci sarà del tutto naturale.

Da un punto di vista operativo, un qualsiasi spettrometro non ci fornisce lo spettro di una sorgente ma conteggi C per canale strumentale I . Questo spettro osservato è in relazione con lo spettro vero della sorgente $f(E)$ attraverso la relazione (vedi la (11.3))

$$C(I) = \int_0^{\infty} f(E) R(I, E) dE \quad (11.12)$$

La funzione $R(I, E)$ viene detta *risposta del rivelatore* e, come abbiamo visto, è proporzionale alla probabilità che un fotone incidente di energia E venga rivelato nel canale I .

Da un punto di vista teorico, si dovrebbe essere in grado di determinare lo spettro della sorgente $f(E)$ invertendo Eq. 11.12. Sfortunatamente questo non è in generale possibile perché queste inversioni non sono univoche e sono instabili a piccole variazioni in $C(I)$.

La maniera alternativa è quindi quella di scegliere un modello spettrale $f(E)$ che possa essere descritto da un (piccolo) numero di parametri e “concordarlo” (*fit*) ai dati (conteggi) ottenuti dallo spettrometro. Si calcola quindi una statistica di fit che ci permetta di giudicare se il modello “concorda” con i dati sperimentali.

I parametri del modello sono poi variati per trovare l’insieme dei parametri che fornisca la migliore statistica di fit. Questi valori diventeranno i *parametri del fit migliore* (*best fit parameters*) e lo spettro ottenuto con questi parametri verrà detto il *best fit model* $f_b(E)$.

Abbiamo già visto che la statistica di fit più comunemente utilizzata per determinare il *best fit* è quella del χ^2 , definita dall’Eq. 11.1. Una volta ottenuto un modello di *best fit* abbiamo visto che un test utile per determinare, tra tutti i possibili diversi modelli di *best fit* possibili quello “migliore” è attraverso il F-test.

Un altro importante argomento da considerare è la determinazione dell’intervallo di valori di un parametro di *best fit* all’interno del quale si possa essere confidenti che giaccia il vero valore del parametro. Questo intervallo viene detto *intervallo di confidenza* e viene calcolato variando il valore del parametro fino a quando il χ^2 aumenta di una certa quantità al di sopra del valore minimo o di *best fit*.

La quantità di cui il χ^2 viene aumentato (detto $\Delta\chi^2$ critico) dipende dal livello di confidenza che viene richiesto e dal numero di parametri su cui lo si vuole calcolare. Il $\Delta\chi^2$ critico per alcune situazioni standard è mostrato in Tabella 11.2

Riassumendo abbiamo che per effettuare un fit spettrale abbiamo bisogno di (i) uno spettro osservato $C(I)$; (ii) una risposta del rivelatore $R(I, E)$; (iii) un modello spettrale $f(E)$. Con queste tre componenti la procedura per ottenere il modello di *best fit* sarà:

- Si crea un modello spettrale parametrizzato che ci si aspetta rappresenti lo spettro vero della sorgente.
- Vengono dati dei valori iniziali ai parametri del modello.

Tabella 11.2: Intervalli di confidenza vs $\Delta\chi^2$

Intervallo Confidenza (%)	Nr Parametri		
	1	2	3
68	1.00	2.30	3.50
90	2.71	4.61	6.25
99	6.63	9.21	11.3

- ❑ In base ai valori dei parametri assegnati, si predice quale sia lo spettro in conteggi in ogni canale che sarebbe rilevato dal nostro spettrometro per il modello dato.
- ❑ Si confronta lo spettro predetto con quello osservato dallo strumento.
- ❑ I valori dei parametri del modello vengono variati fino a quando non si ottiene il *best fit* tra il modello teorico ed i dati osservati.
- ❑ Si calcola la bontà del fit per determinare come il nostro modello descrive bene i dati osservati, e si calcolano gli intervalli di confidenza per i parametri del modello.

Vediamo ora di dettagliare le tre componenti di cui sopra.

❑ **C(I): Lo spettro osservato**

Per ottenere lo spettro osservato $C(I)$ per una data osservazione XSPEC utilizza due files: un file di dati (*data file*) ed un file di fondo (*background file*). Entrambi i files sono scritti in un formato binario denominato FITS¹ (si veda Appendice E per la definizione del formato). Il file di dati contiene, tra le altre cose, la lista dei conteggi rivelati in ogni canale. XSPEC usa il file di fondo per determinare un tasso di conteggio (*count rate*) netto a fondo sottratto in unità di conteggi al secondo. Il fondo viene scalato ai dati per il rapporto delle keyword BACKSCAL contenute nei files dati e fondo. Inoltre il file di dati viene scalato per il tempo di esposizione (keyword EXPOSURE). Quindi il tasso di conteggio netto a fondo sottratto è dato da

$$C(I) = \frac{D(I)}{t_D} - \frac{b_D}{b_B} \frac{B(I)}{t_B} \quad (11.13)$$

dove $D(I)$ e $B(I)$ sono i conteggi nei due files di dati e fondo, e t_D e t_B sono i tempi di esposizione nei due files di dati e fondo. b_D e b_B sono i valori di BACKSCAL nei due files.

¹La loro manipolazione può essere effettuata con i programmi contenuti nel pacchetto FTOOLS.

□ **R(I, E): La risposta dello strumento**

Prima che XSPEC possa prendere un insieme di valori dei parametri e predire lo spettro che sarebbe rivelato dallo strumento, è necessario che il programma conosca le caratteristiche specifiche dello strumento. Questa informazione è nota come *risposta del rivelatore*. Come abbiamo già visto, $R(I, E)$ è proporzionale alla probabilità che un fotone incidente di energia E venga rivelato nel canale I del rivelatore. Con questa definizione $R(I, E)$ è una funzione continua di E . Questa funzione continua viene convertita in una funzione a valori discreti dal programma che genera la cosiddetta **matrice di risposta**, che definisce gli intervalli di energia E_J tali che

$$R_D(I, J) = \int_{E_{J-1}}^{E_J} R(I, E) dE \quad (11.14)$$

XSPEC quindi legge gli intervalli di energia E_J e la matrice di risposta $R_D(I, J)$ da un file di risposta (*response file*) che è scritto in un formato compresso che contiene solamente gli elementi non nulli della matrice. Con XSPEC è inoltre possibile utilizzare un file di risposta ausiliario (*auxiliary response file*) che contiene un vettore $A_D(J)$ che XSPEC moltiplica con $R_D(I, J)$ nel seguente modo

$$R_D(I, J) \rightarrow R_D(I, J) * A_D(J) \quad (11.15)$$

Per convenzione, la matrice di risposta è in unità di cm^2 .

□ **f(E): Il modello di spettro**

Il modello di spettro $f(E)$ viene calcolato all'interno di XSPEC utilizzando gli intervalli di energia definiti nella matrice di risposta

$$f_D(J) = \int_{E_{J-1}}^{E_J} f(E) dE \quad (11.16)$$

ed è in unità di fotoni $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$. XSPEC permette la costruzione di modelli composti composti di componenti additive (ad esempio leggi di potenza, corpi neri, ecc) e componenti moltiplicative che modificano le componenti additive moltiplicandole per un fattore dipendente dall'energia (ad esempio assorbimento fotoelettrico, edges, ecc). I modelli possono essere definiti con una notazione algebrica. Ad esempio, la seguente espressione

$$\text{phabs(power + phabs(bbody))}$$

definisce un corpo nero assorbito (phabs(bbody)) aggiunto ad una legge di potenza. Il risultato è poi modificato da un'altra componente di assorbimento.

□ Fit e intervalli di confidenza

Una volta che i dati sono stati letti ed il modello è stato definito, XSPEC usa un algoritmo di Levenberg-Marquard modificato (basato sulla routine CURFIT di Bevington) per trovare i valori di *best fit* dei parametri del modello. L'algoritmo usato, lavorando su di un intervallo ristretto nello spazio dei parametri, potrebbe ancorarsi in un minimo locale e non trovare il *best fit* globale. Ovviamente il processo di convergenza è molto più veloce se vengono dati dei valori iniziali ai parametri vicini ai valori attesi.

Alla fine del processo XSPEC mostrerà i valori dei parametri di *best fit*, insieme con gli intervalli di confidenza al 68% stimati dalle derivate rispetto ai parametri del modello. Questi intervalli di confidenza sono dati a puro titolo indicativo. Per calcolare gli intervalli di confidenza per un parametro di interesse XSPEC ha il comando `error` che fissa il parametro di interesse ad un particolare valore e fa un fit su tutti gli altri parametri. Vengono presi nuovi valori del parametro di interesse fino a quando non si è ottenuto il $\Delta\chi^2$ richiesto. Per calcolare i nuovi valori del parametro di interesse a partire dal valore dato XSPEC usa un algoritmo di interpolazione cubica iterativa. Per calcolare intervalli di confidenza per diversi parametri contemporaneamente XSPEC può lavorare su di una "griglia" di valori dei parametri.

Vogliamo concludere questa breve introduzione all'analisi spettrale con XSPEC discutendo il caso in cui il nostro spettro sia stato accumulato da una sorgente molto debole e quindi il numero di conteggi in ogni (qualche) canale sia molto piccolo. In questo caso non è possibile utilizzare la statistica del χ^2 perché questa assume che i conteggi nei singoli canali seguano una distribuzione Gaussiana (in altre parole si assume che $\sigma^2(I) = C(I)$). Una statistica alternativa, detta statistica C (dal nome dell'autore Cash), utilizza una funzione di verosimiglianza diversa dalla (11.1)

$$C = 2 \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i \ln y(x_i) + \ln y_i!) \quad (11.17)$$

dove y_i sono i dati osservati e $y(x_i)$ i valori della funzione. I parametri di *best fit* si ottengono minimizzando C per qualche funzione modello y . E' importante sottolineare che nel caso pratico di dati spettrali, a questi **non deve essere stato sottratto il fondo**. Un approccio alternativo è quello di continuare ad usare la statistica di χ^2 ma di cambiare il peso dei singoli dati (utilizzando i comandi `weight gehrels` oppure `weight Churazov`).

Appendice A

Storia della scoperta delle leggi di Keplero

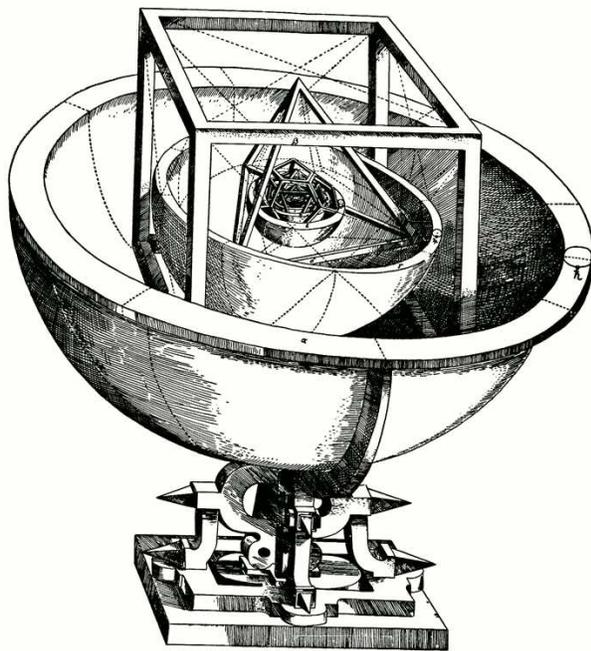


Figura A.1: La concezione del mondo secondo Keplero pubblicata nel *Mysterium Cosmographicum*.

punto di ottenere una situazione di questo tipo (si veda Figura A.1): una prima sfera; un cubo; una seconda sfera; un cubo; una terza sfera; un tetraedro; una quarta sfera; un icosaedro; una quinta sfera; un ottaedro; un cerchio (e non una sfera) inscritto nell'ottaedro. Poi sostituì due sfere per ogni singola sfera, cioè prese due sfere per ogni pianeta, che rappresentavano il valore massimo e il valore minimo della distanza del pianeta dal centro.

Il risultato più importante di quest'opera fu quello di aver riconosciuto che la proporzionalità tra

Le prime due leggi apparvero nell'opera *Astronomia Nova* del 1609 mentre la terza nell'opera *Harmonice Mundi* del 1619. In realtà la ricerca della relazione tra il raggio delle orbite dei pianeti con il loro periodo orbitale parte da molto prima: nel 1596 Keplero aveva pubblicato il *Mysterium Cosmographicum* in cui cercava di dare una spiegazione del *perché* i raggi e le eccentricità delle orbite dei pianeti abbiano quei particolari valori.

Keplero immaginò dapprima una serie di sfere e di cubi alternativamente inscritti uno nell'altro e suppose una proporzionalità tra i raggi delle sfere e i raggi delle orbite planetarie. In questo modo egli cercava una spiegazione basata su di una concezione di una natura strutturata geometricamente da Dio. Da questo presupposto Keplero crede di poter arrivare a descrivere l'ordine celeste attraverso la matematica. La sequenza di sfere e cubi non soddisfaceva però pienamente la sua ipotesi e, guidato come sempre dall'idea che la teoria deve accordarsi con l'osservazione proseguì complicando tale struttura geometrica al

periodo orbitale e distanza di un pianeta *non* è lineare e nemmeno quadratica, ma qualche cosa nel mezzo.

Nel *Harmonice Mundi*, come dice il titolo, Keplero ritorna alla teoria pitagorica dell'armonia del mondo, esposta da Platone (i pitagorici avevano trovato che l'ottava ha origine nel rapporto 1:2 tra la lunghezza di due corde vibranti, la quinta (corrispondente all'intervallo *do-sol*) nel rapporto 2:3, la quarta (corrispondente all'intervallo *do-fa*) nel rapporto 4:3, e così via) con una innovazione fondamentale: mentre per i greci la musica delle sfere era monofonica, e consisteva di scale alle quali ciascun pianeta contribuiva con una nota, per Keplero essa diventa polifonica, e consiste di accordi che risultano dalle scale suonate simultaneamente dai vari pianeti. Studiando i rapporti fra le lunghezze di archi di orbita percorsi da un pianeta in un giorno all'afelio ed al perielio Keplero "*scopre*" una perfetta corrispondenza con gli intervalli musicali: Mercurio canta da soprano, Marte da tenore, Saturno e Giove di da basso, e la Terra e Venere da contralto. Naturalmente, se nel mondo "*tutto è musica*", lo sarà anche il rapporto tra i tempi di rivoluzione ed i raggi medi delle orbite dei pianeti. E poichè esso sta matematicamente tra il lineare ed il quadratico, e musicalmente tra l'unisono e l'ottava, dovrà essere qualcosa di naturale tra di essi: dunque un rapporto di quinta, ovvero un esponente di tre mezzi. Il che significa che *i quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono direttamente proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite*. Keplero scopre così la terza delle sue leggi, miracolosamente corretta nonostante la derivazione platealmente insensata.

Le leggi di Keplero verranno utilizzate da Newton nel 1687 per *dimostrare* la legge di gravitazione universale.

Brani tratti, in parte, da Il Matematico Impertinente, di Piergiorgio Odifreddi (Tea, 2005)

Appendice B

Spettri X di Sorgenti Celesti

In questa appendice vengono mostrati gli spettri di alcune sorgenti celesti di raggi X, la cui analisi ed interpretazione è il fine ultimo di questo corso. Per ogni sorgente viene presentata una breve descrizione dei modelli utilizzati per concordare lo spettro.

I dati provengono dai cosiddetti strumenti a campo stretto (*Narrow Field Instruments*) a bordo del satellite BeppoSAX.

B.1 CI Cam

Il giorno 1 Aprile 1998 una sorgente celeste fino ad allora al di sotto del limite di sensibilità degli strumenti a bordo dei satelliti per astronomia X allora in orbita, la stella simbiotica CI Cam, è improvvisamente diventata la sorgente più luminosa del cielo X. Sono stati immediatamente allertati tutti i telescopi a Terra, per tenere sotto osservazione la sorgente sia nella banda ottica che in quella radio. Dopo pochi giorni la sorgente è ritornata al suo stato originario. La curva di luce (cioè la variazione della luminosità in funzione del tempo) nelle varie bande (X, ottica, radio) è mostrata in Figura B.1, con marcate le due osservazioni BeppoSAX (TOO1 e TOO2) di cui mostriamo gli spettri in Figura B.2 e B.3. Si noti come in pochi giorni lo spettro sia cambiato notevolmente (vedi Figura B.4 per il confronto): nella seconda osservazione è stata osservata la comparsa di una forte componente di bassa energia. Lo spettro è stato modellato con un processo di bremsstrahlung a due temperature ($T_1 = 1.3$ keV, $T_2 = 6.8$ keV per la prima osservazione e $T_1 = 0.2$ keV, $T_2 = 2.8$ keV per la seconda), con una serie di linee di emissione di fluorescenza relative agli elementi O, Ne/Fe-L, Si, S, Ca, Fe-K.

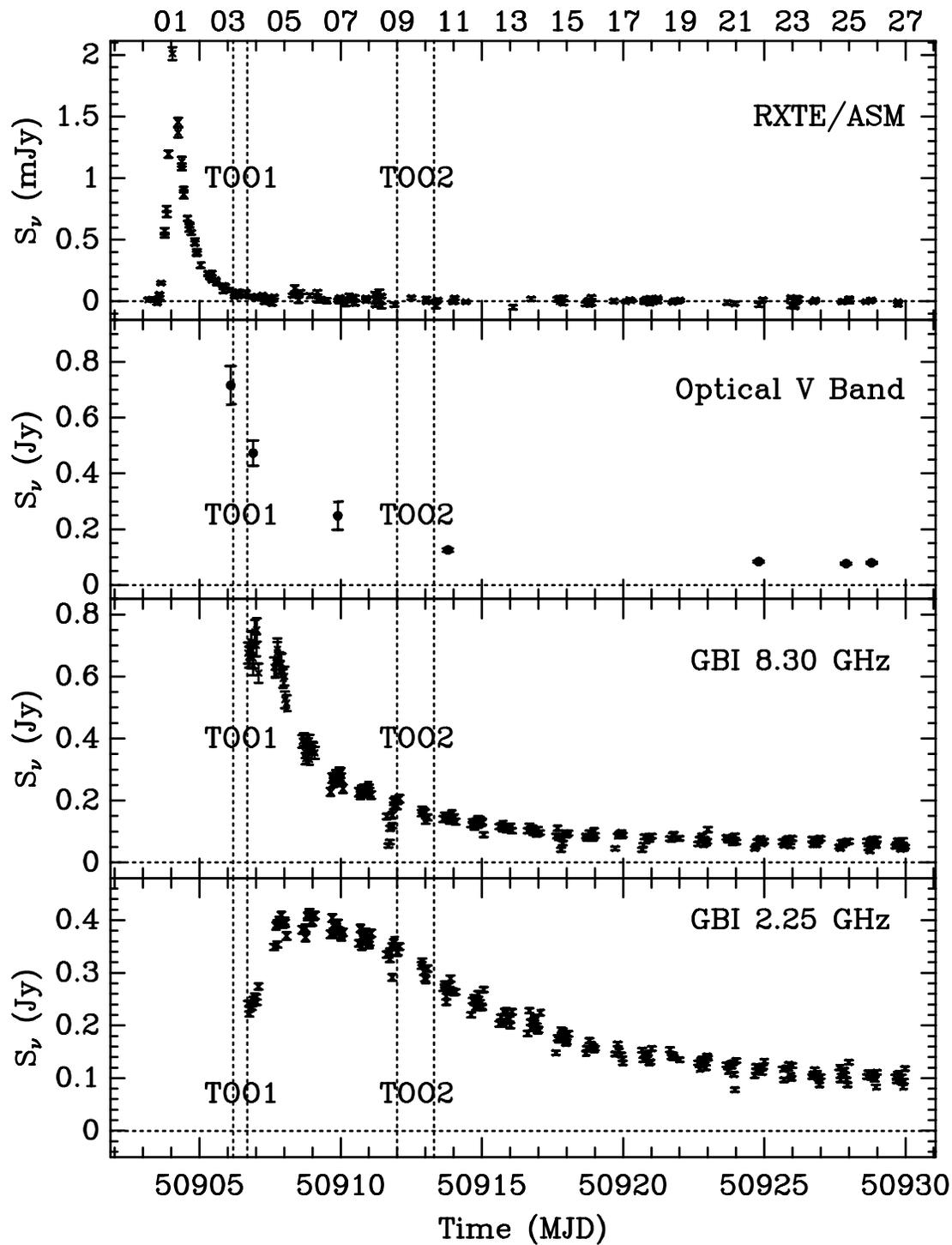


Figura B.1: Curve di luce di CI Cam in varie bande: raggi X (2–12 keV; RXTE/ASM), ottica V (Osservatorio di Loiano), e radio (8.3 GHz and 2.25 GHz, GBI). Le osservazioni BeppoSAX sono marcate con linee verticali. La scala in alto si riferisce ai giorni dell'Aprile 1998.

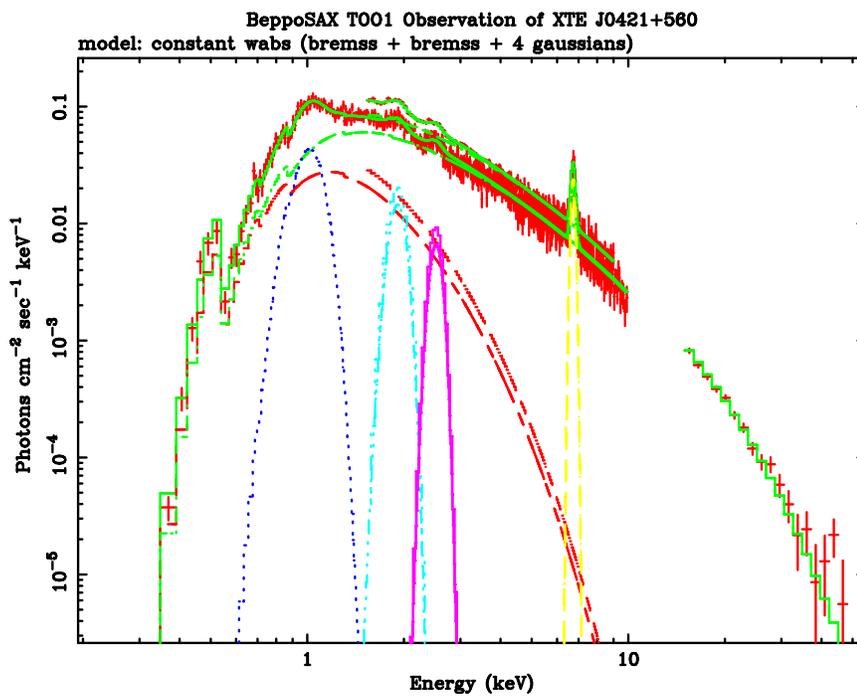
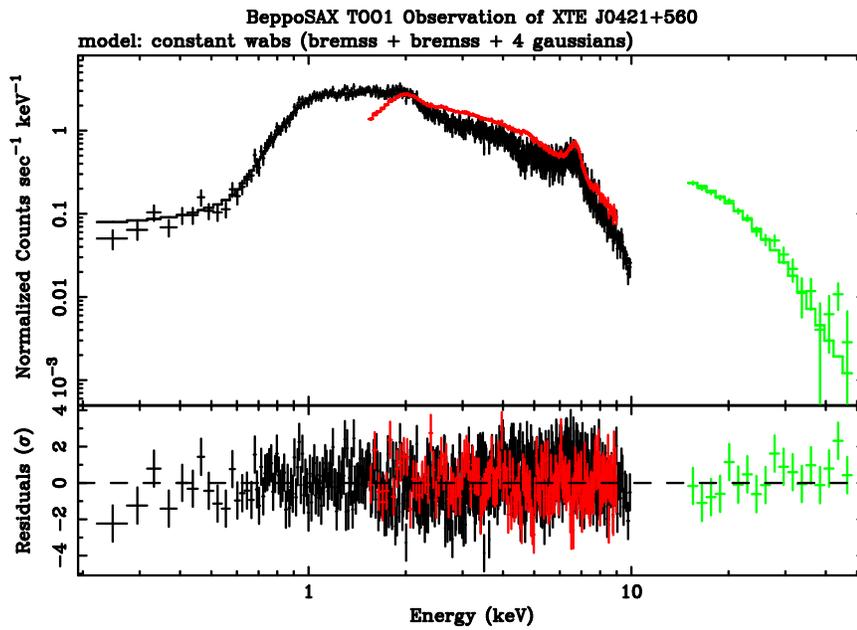


Figura B.2: Spettro di CI Cam osservato da BeppoSAX nella prima osservazione: in alto lo spettro in conteggi, in basso i modelli utilizzati per modellare lo spettro.

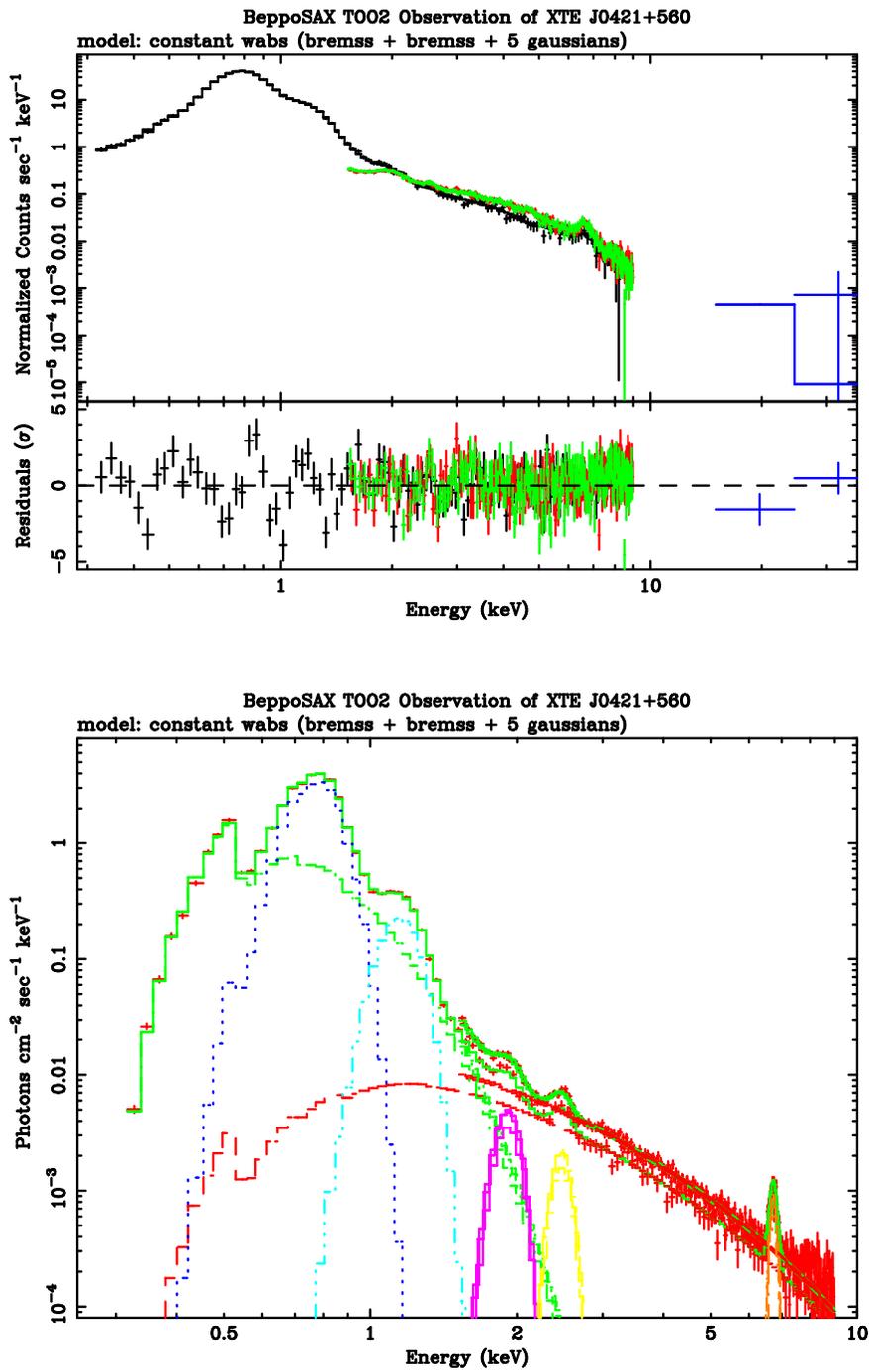


Figura B.3: Spettro di CI Cam osservato da BeppoSAX nella seconda osservazione: in alto lo spettro in conteggi, in basso i modelli utilizzati per modellare lo spettro.

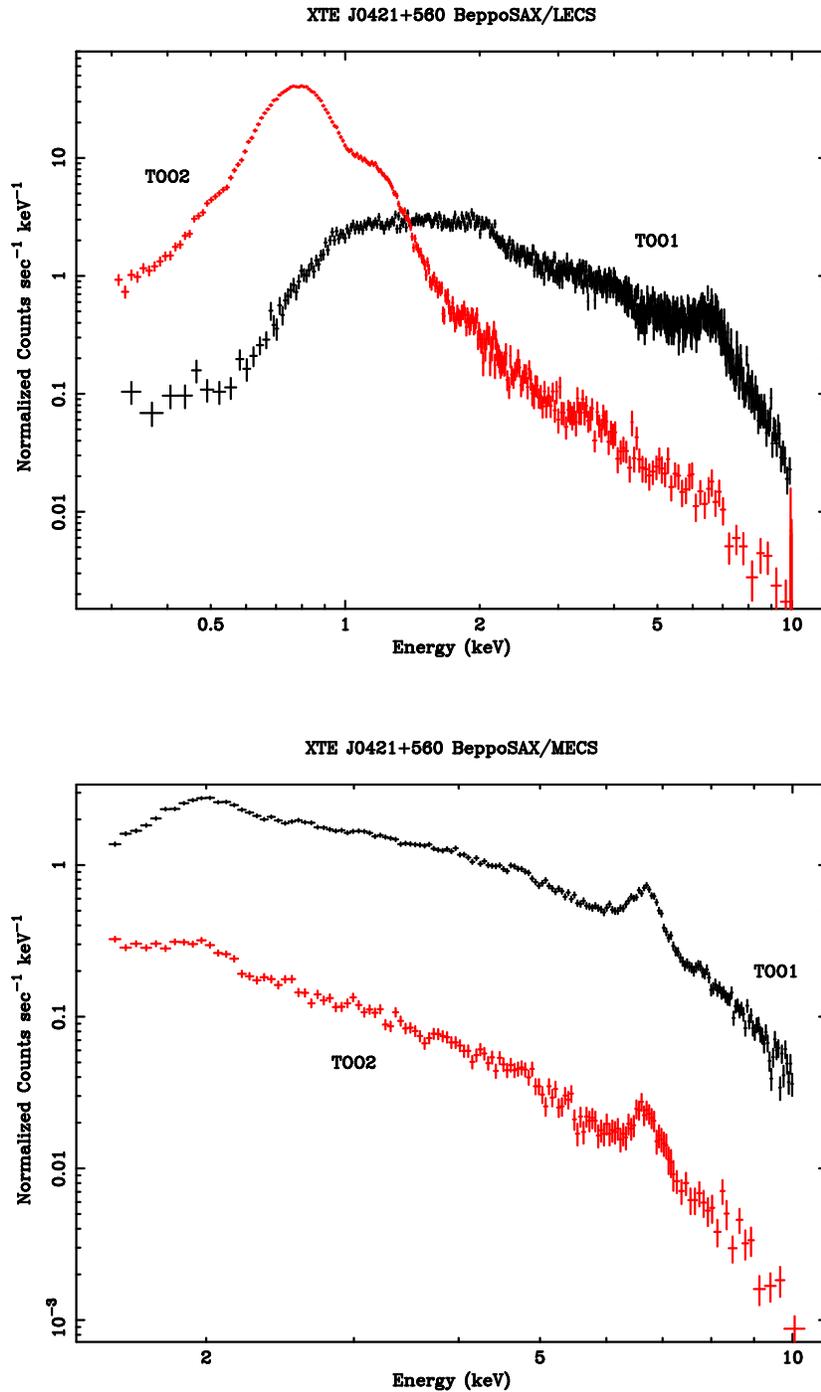


Figura B.4: Confronto tra gli spettri di CI Cam osservati nelle due osservazioni BeppoSAX: in alto gli spettri dello strumento LECS, sensibile nella banda 0.1–10 keV, in basso gli spettri misurati con lo strumento MECS, sensibile nella banda 1.8–10 keV. Si noti lo sviluppo di una componente di bassa energia (*soft component*) nella seconda osservazione (TO02).

B.2 Vela X-1

Vela X-1 è una pulsar X binaria, di periodo di pulsazione di 282 secondi, che accresce materia direttamente dal vento stellare proveniente dalla stella HD77581, di classe spettrale B0 Ib. Durante la sua orbita attorno al compagno (periodo orbitale di 8.96 giorni) l'emissione dalla pulsar mostra un elevato assorbimento fotoelettrico che aumenta fino a quando la sorgente viene eclissata per circa 1.7 giorni. Dallo studio della dipendenza orbitale dell'assorbimento fotoelettrico è stato rilevata la presenza di flussi di accrescimento. Lo spettro, tipico delle pulsar X, è mostrato in Figura B.5 e consiste in una legge di potenza modificata ad alta energia da un cutoff (che da un punto di vista fisico viene interpretato in termini di uno scattering Compton (vedi Sezione 9.5.5)). E' inoltre presente una intensa linea di fluorescenza dovuta al Ferro ed una riga di ciclotrone a ~ 57 keV. Quest'ultima corrisponde ad una intensità del campo magnetico alla superficie della stella di neutroni di 4.9×10^{12} Gauss. In Figura B.6 si vede come la forma e l'energia della riga di ciclotrone siano fortemente dipendenti dal tipo di modello utilizzato per l'emissione continua.

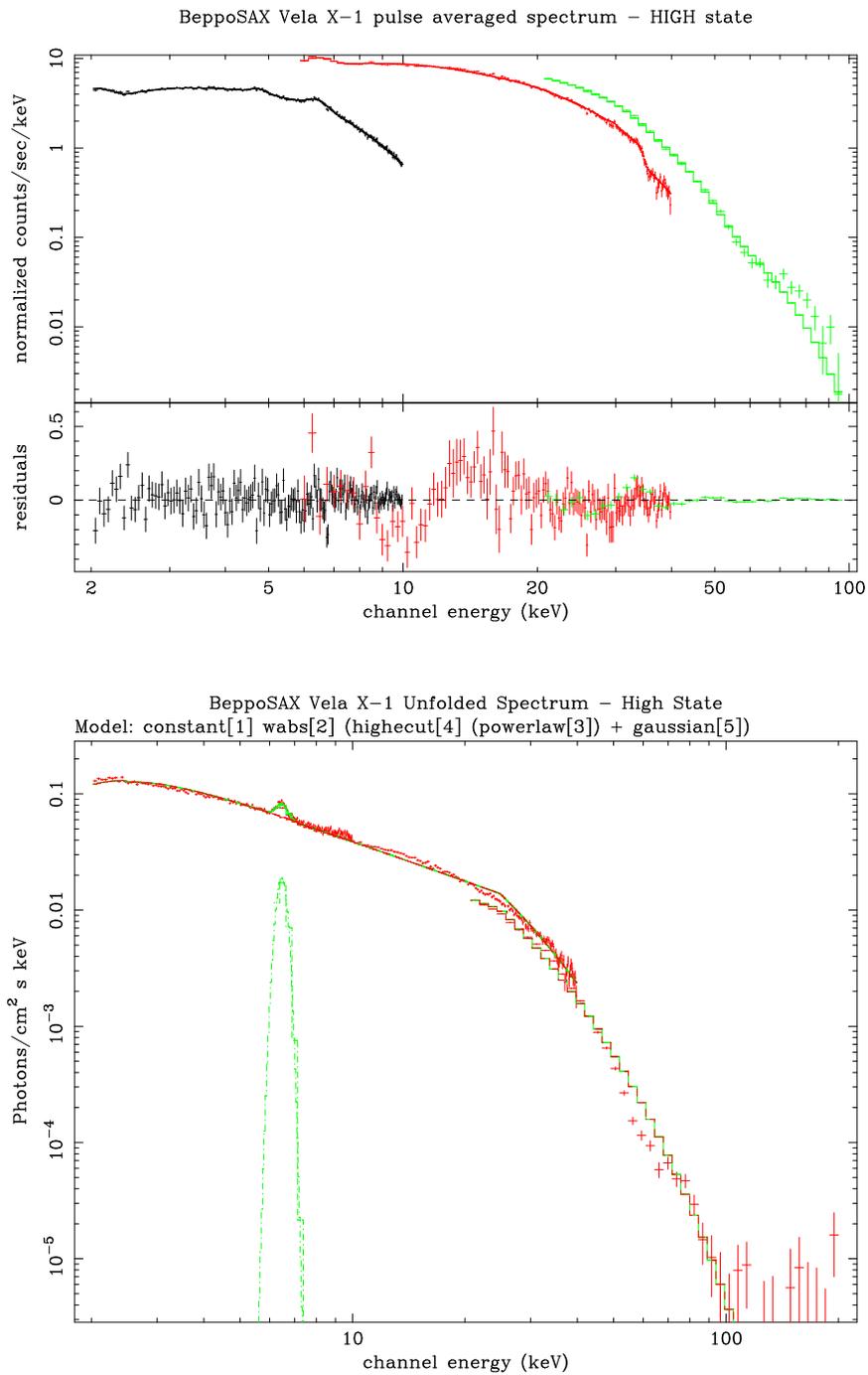


Figura B.5: Spettro della pulsar X binaria Vela X-1, con evidenziate nel pannello in basso le tipiche componenti.

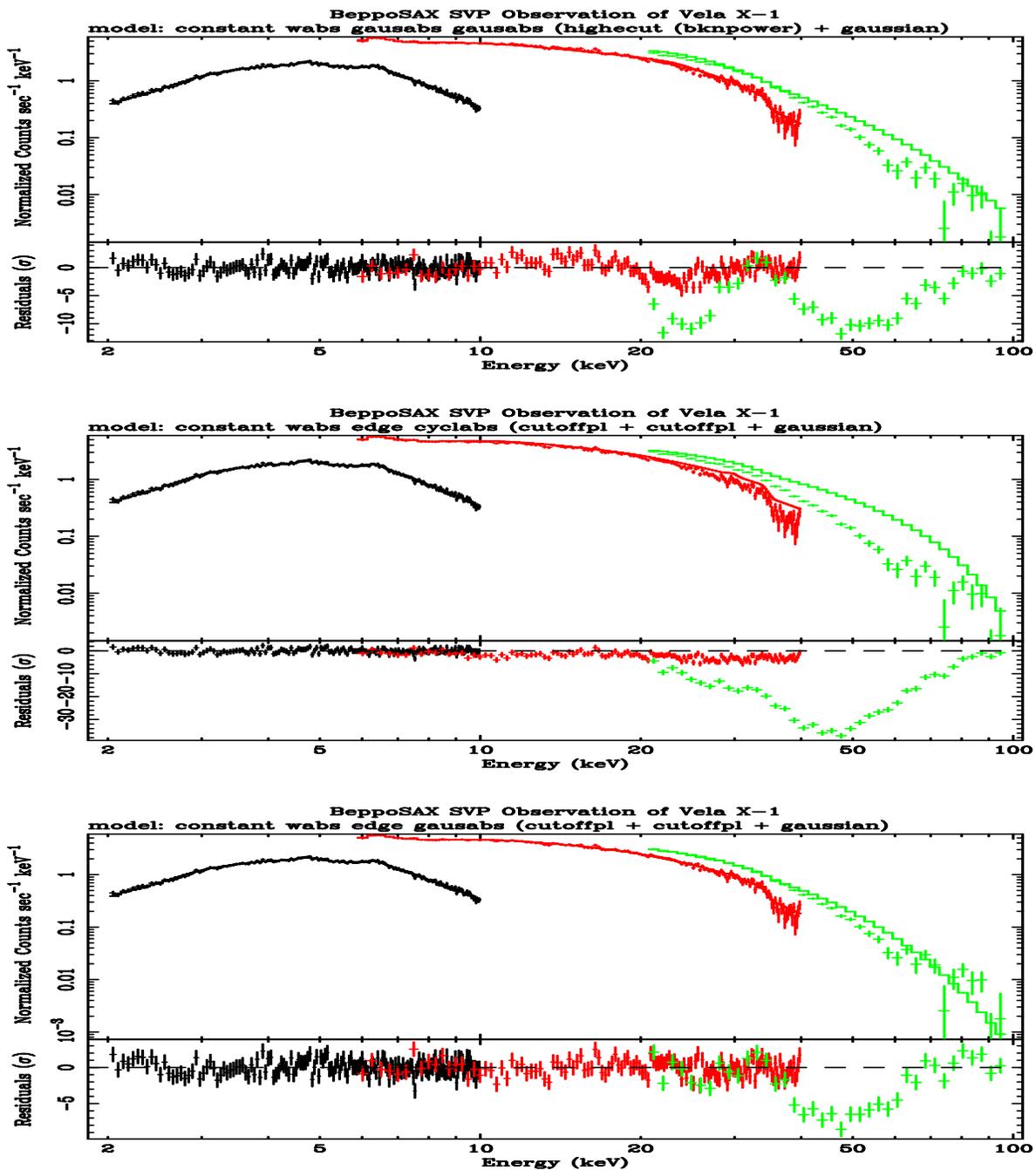


Figura B.6: Dipendenza della riga di ciclotrone nello spettro di Vela X-1 al variare del modello. Nel primo pannello l'emissione continua è stata modellata con una doppia legge di potenza con cutoff esponenziale; nel pannello centrale con due leggi di potenza con cutoff esponenziale e la risonanza di ciclotrone con un profilo Lorentziano; nel terzo pannello si è utilizzato lo stesso modello per l'emissione continua, ma si è modellata la risonanza con un profilo Gaussiano.

B.3 4U1626–67

La pulsar X binaria 4U1626–67 (periodo di pulsazione 7.7 secondi) è uno dei pochi pulsatori X appartenente al gruppo delle *Low Mass X-ray Binaries* (LMXRBs), cioè sistemi in cui il compagno dell'oggetto compatto è una stella di piccola massa. Infatti, il sistema è composto da una stella di massa $0.02\text{--}0.08 M_{\odot}$ e periodo orbitale di 42 minuti. In Figura B.7 vengono mostrate le componenti dello spettro misurato dagli strumenti a bordo di BeppoSAX. La componente di bassa energia, modellata come emissione di corpo nero di temperatura di ~ 300 eV, viene interpretata come dovuta all'emissione termica dalla superficie della stella di neutroni. La riga di ciclotrone a 38 keV corrisponde ad un campo magnetico alla superficie della stella di neutroni di 3.2×10^{12} Gauss.

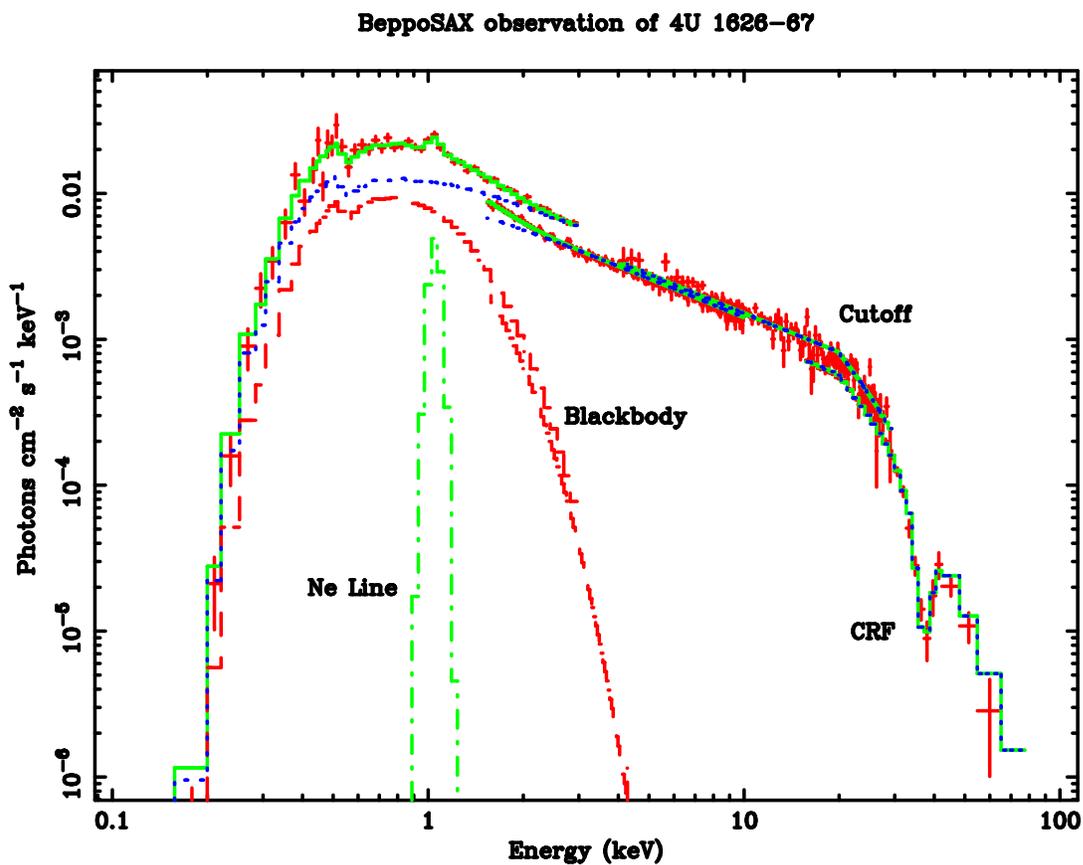


Figura B.7: Componenti dello spettro della pulsar X binari 4U1626–67 osservato dagli strumenti a bordo di BeppoSAX.

Appendice C

Derivazione di Eq. 9.29

In questa appendice deriveremo nel dettaglio la variazione della velocità subita da una particella (elettrone), di carica $-e$, che si muove nel campo di uno ione di carica Ze (si veda la discussione riguardante il processo di bremsstrahlung, Sezione 9.4). Vogliamo cioè dimostrare Eq. 9.29 di pagina 115. Dato che la traiettoria è quasi rettilinea (abbiamo supposto piccole deflessioni) il cambio di velocità avverrà essenzialmente in direzione perpendicolare al moto della particella. Pertanto avremo che durante la collisione

$$m \Delta v = Ze^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \theta}{r^2} dt \quad (\text{C.1})$$

dove abbiamo utilizzato la legge di Coulomb e considerato soltanto la componente perpendicolare della velocità (da cui il termine $\cos \theta$). Dalla Figura C.1 possiamo vedere come

$$r = \sqrt{b^2 + v^2 t^2} \quad (\text{C.2a})$$

$$\cos \theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + v^2 t^2}} \quad (\text{C.2b})$$

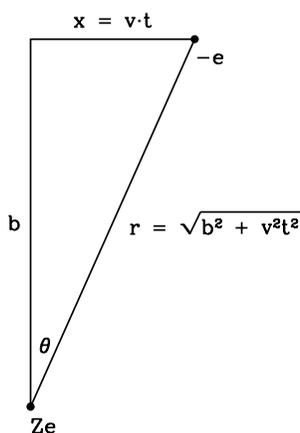


Figura C.1: Collisione di un elettrone con uno ione ed emissione di bremsstrahlung.

quindi, sostituendo queste relazioni in Eq. C.1, otteniamo

$$\Delta v = \frac{Ze^2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \quad (\text{C.3})$$

Se operiamo il cambio di variabile $x = v \cdot t$, allora l'integrale diventa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{b}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{b}{v} \left[\frac{x}{b^2 \sqrt{b^2 + x^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{b}{v} \frac{2}{b^2} = \frac{2}{vb}$$

Eq. C.3 diventa quindi

$$\Delta v = \frac{2Ze^2}{mvb}$$

Appendice D

Risposta angolare di un collimatore meccanico

Nella descrizione della risposta angolare triangolare di un collimatore meccanico (Eq. 10.7) abbiamo supposto che le pareti si comportassero come assorbitori perfetti. Ovviamente nella realtà questo non avviene, dato che solamente parte della radiazione incidente verrà assorbita dalle pareti.

Il numero di pareti che un fotone X attraverserà sarà funzione delle dimensioni delle celle del collimatore e dell'angolo di incidenza del fotone. In Figura D.1 definiamo la geometria del nostro collimatore, formato da celle adiacenti, tutte di larghezza a , altezza H e spessore T . Indichiamo con θ l'angolo di incidenza di un fotone rispetto ad una parete e con θ_n gli angoli caratteristici che definiscono il numero di celle che un fotone X attraversa prima di essere rivelato. Da Figura D.1 abbiamo che

$$\tan \theta_n = \frac{na + (n - 1)T}{H} \quad (\text{D.1})$$

Ogni volta che un fotone attraversa una parete la sua intensità verrà ridotta, a causa dell'assorbimento, di un fattore

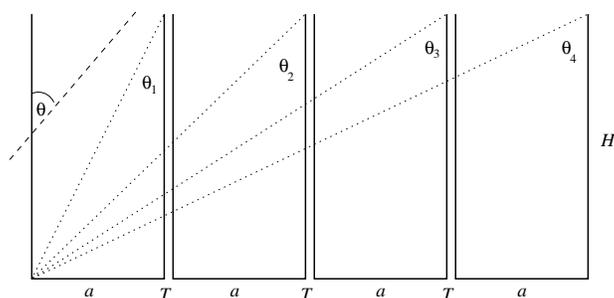


Figura D.1: Geometria delle celle di un collimatore meccanico e definizione degli angoli caratteristici θ_n .

$$f \equiv \exp\left(-\frac{\mu\rho T}{\sin\theta}\right) \quad (\text{D.2})$$

dove $\mu = \mu(E)$ è il coefficiente di assorbimento (in unità di cm^2/g) dei raggi X nel materiale che compone la cella e ρ è la densità del materiale assorbente.

In funzione dell'angolo di incidenza θ del fotone, abbiamo i seguenti casi:

□ Caso $0 < \theta < \theta_1$

In questo caso abbiamo che la superficie del rivelatore viene illuminata direttamente dai fotoni X (cioè non abbiamo assorbimento da parte delle pareti) su di una area rettangolare

$$(a - H \tan \theta) \times b$$

dove b è l'altra dimensione del collimatore. D'altra parte, abbiamo che l'area

$$H \tan \theta \times b$$

sarà illuminata da raggi X che sono passati attraverso la parete del collimatore. Quindi il flusso totale normalizzato (cioè diviso per l'area totale $a \times b$) sarà

$$\mathcal{R}_0(0 < \theta < \theta_1) = 1 - \frac{H}{a} \tan \theta + f \frac{H}{a} \tan \theta = 1 + \Theta[f - 1] \quad (\text{D.3})$$

dove abbiamo definito

$$\Theta \equiv \frac{H}{a} \tan \theta \quad . \quad (\text{D.4})$$

Eq. D.3 è la risposta angolare del collimatore nella direzione a per angoli di incidenza $0 < \theta < \theta_1$.

□ Caso $\theta_1 < \theta < \theta_2$

In questo caso avremo a che fare con due situazioni distinte: nella prima i fotoni passeranno attraverso una sola parete del collimatore, mentre nel secondo caso i fotoni attraverseranno due pareti del collimatore. Procedendo come nel caso precedente, avremo che nella prima situazione (passaggio attraverso una parete) il flusso normalizzato sarà

$$f \frac{(2a + T) - H \tan \theta}{a} = f \left[\left(2 + \frac{T}{a} \right) - \Theta \right]$$

mentre nella seconda situazione (passaggio attraverso due pareti) avremo che il flusso normalizzato sarà

$$f \cdot f \frac{H \tan \theta - (a + T)}{a} = f \cdot f \left[\Theta - \left(1 + \frac{T}{a} \right) \right]$$

Quindi la risposta angolare del collimatore nella direzione a per $\theta_1 < \theta < \theta_2$ sarà

$$\mathcal{R}_1(\theta_1 < \theta < \theta_2) = f \left[\left(\Theta - \frac{T}{a} \right) (f - 1) + (2 - f) \right] \quad . \quad (\text{D.5})$$

□ Caso $\theta_2 < \theta < \theta_3$

In perfetta analogia con il caso precedente avremo che

$$\mathcal{R}_2(\theta_2 < \theta < \theta_3) = f \cdot f \left[\left(\Theta - 2 \frac{T}{a} \right) (f - 1) + (3 - 2f) \right] \quad . \quad (\text{D.6})$$

La risposta angolare nella direzione a di un collimatore per $\theta_n < \theta < \theta_{n+1}$ avrà quindi la forma

$$\mathcal{R}_n(\theta_n < \theta < \theta_{n+1}) = f^n \left\{ \left(\Theta - n \frac{T}{a} \right) (f - 1) + [(n + 1) - nf] \right\} \quad (\text{D.7})$$

e la risposta angolare *totale* per angoli compresi tra 0 e θ_{k+1} sarà data dalla somma delle risposte nei sotto-intervalli angolari

$$\mathcal{R}(0 < \theta < \theta_{k+1}) = \sum_{n=0}^k \mathcal{R}_n = \sum_{n=0}^k f^n \left\{ \left(\Theta - n \frac{T}{a} \right) (f - 1) + [(n + 1) - nf] \right\} \quad . \quad (\text{D.8})$$

Eq. D.8 deve poi essere moltiplicata per un fattore $\cos \theta$ dato che i raggi X illumineranno solamente la proiezione dell'era di rivelazione, quindi

$$\mathcal{R}_{\text{proj}}(0 < \theta < \theta_{k+1}) = \cos \theta \mathcal{R}(0 < \theta < \theta_{k+1}) \quad . \quad (\text{D.9})$$

In Figura D.2 mostriamo un esempio di risposta angolare per un collimatore meccanico rettangolare di dimensioni $a = 30.8$ mm, $H = 300$ mm e pareti formate da un supporto in Alluminio dello spessore di 1 mm ricoperto da uno strato di 0.15 mm di Tantalio. Nel pannello superiore si è tenuto conto soltanto di assorbimento fotoelettrico mentre in quello inferiore si è tenuto conto anche dello scattering Compton nel materiale.

Questo studio è stato effettuato per l'ottimizzazione dei collimatori a bordo della missione per astronomia X cinese HXMT (Hard X-ray Modulation Telescope), di cui è previsto il lancio nel 2011-2012.

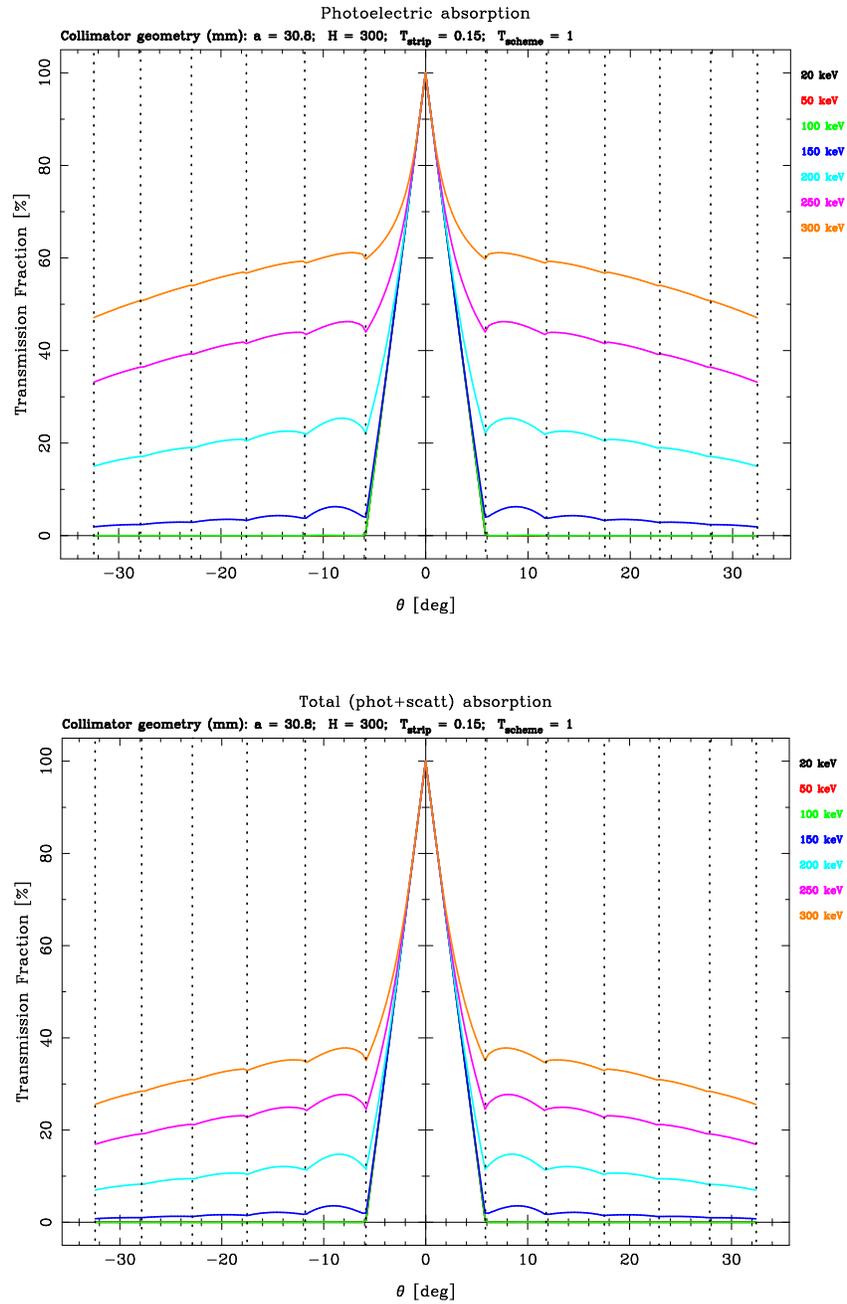


Figura D.2: Risposta angolare di un collimatore rettangolare di dimensioni $a = 30.8$ mm, $b = 6$ mm, $H = 300$ mm e pareti formate da un supporto in Alluminio dello spessore di 1 mm ricoperto da uno strato di 0.15 mm di Tantalio. *Pannello superiore*: si è utilizzato il coefficiente di assorbimento per solo effetto fotoelettrico. *Pannello inferiore*: si è utilizzato il coefficiente di assorbimento totale (fotoelettrico più scattering).

Appendice E

Definizione del formato FITS

All'inizio degli anni 80 la comunità astronomica internazionale realizzò che era necessario stabilire uno standard per il trasferimento di dati astronomici. Venne quindi definito il formato FITS (Flexible Image Transport System), che deve il suo nome al fatto che venne applicato al trasferimento di immagini astronomiche. Il formato consisteva in un vettore (normalmente multidimensionale) di dati in formato binario preceduto da una intestazione (*header*) in formato testo (ASCII) contenente informazioni sulla organizzazione e contenuto del vettore.

Successivamente il concetto di formato FITS venne ampliato per poter contenere formati di dati più complessi. In particolare venne introdotto il concetto di *random groups*, in cui i dati consistono in una serie di vettori ad ognuno dei quali è associato una serie di parametri. Queste strutture sono definite come *estensioni*, ognuna consistente in un *ASCII header* seguito da dati descritti nell'header stesso.

Le tre estensioni standard approvate dal FITS Working Group della IAU sono:

IMAGE Questa estensione permette la collezione di dati in un vettore multidimensionale.

TABLE I dati contenuti in questa estensione sono nel formato di una tabella ASCII.

BINTABLE Questa estensione è una generalizzazione dell'estensione TABLE, in quanto le righe possono contenere sia dati numerici che dati logici e a carattere. Inoltre ogni dato può essere a sua volta un vettore.

Un file FITS avrà la seguente struttura, in questo preciso ordine:

- Intestazione + dati primaria (*Primary HDU*)
- Estensioni approvate
- Altri records di tipo speciale (opzionale)

Ogni struttura FITS consisterà di un numero intero di record logici. La dimensione di un record logico FITS sarà di 23040 bits, corrispondenti a 2880 bytes. Qui sotto viene mostrato un dump ASCII di un tipico file FITS (spettro PDS della pulsar X 4U1626–67 mostrato in Fig. B.7).

```

SIMPLE = T / file does conform to FITS standard
BITPIX = 8 / number of bits per data pixel
NAXIS = 0 / number of data axes
EXTEND = T / FITS dataset may contain extensions
COMMENT FITS (Flexible Image Transport System) format defined in Astronomy and
COMMENT Astrophysics Supplement Series v44/p363, v44/p371, v73/p359, v73/p365.
COMMENT Contact the NASA Science Office of Standards and Technology for the
COMMENT FITS Definition document #100 and other FITS information.
CONTENT = 'SPECTRUM' /
END

```

```

XTENSION= 'BINTABLE' / binary table extension
BITPIX = 8 / 8-bit bytes
NAXIS = 2 / 2-dimensional binary table
NAXIS1 = 18 / width of table in bytes
NAXIS2 = 60 / number of rows in table
PCOUNT = 0 / size of special data area
GCOUNT = 1 / one data group (required keyword)
TFIELDS = 6 / number of fields in each row
TTYPER1 = 'CHANNEL ' / label for field 1
TFORM1 = 'I ' / data format of field: 2-byte INTEGER
TTYPER2 = 'RATE ' / label for field 2
TFORM2 = 'E ' / data format of field: 4-byte REAL
TUNIT2 = 'count/s ' / physical unit of field
TTYPER3 = 'STAT_ERR' / label for field 3
TFORM3 = 'E ' / data format of field: 4-byte REAL
TUNIT3 = 'count/s ' / physical unit of field
TTYPER4 = 'SYS_ERR ' / label for field 4
TFORM4 = 'E ' / data format of field: 4-byte REAL
TTYPER5 = 'QUALITY ' / label for field 5
TFORM5 = 'I ' / data format of field: 2-byte INTEGER
TTYPER6 = 'GROUPING' / label for field 6
TFORM6 = 'I ' / data format of field: 2-byte INTEGER
EXTNAME = 'SPECTRUM' / name of this binary table extension
HDUCLASS= 'OGIP ' / format conforms to OGIP standard
HDUCLAS1= 'SPECTRUM' / PHA dataset (OGIP memo OGIP-92-007)
HDUVERS1= '1.1.0 ' / Version of format (OGIP memo OGIP-92-007a)
HDUCLAS2= 'NET ' / Bkgd-subtracted PHA Spectrum
HDUCLAS3= 'RATE ' / PHA data stored in count/s
CHANTYPE= 'PHA ' / type of channel PHA/PI
TLMIN1 = 1 / Lowest legal channel number
TLMAX1 = 60 / Highest legal channel number
POISSERR= F / Poissonian errors not applicable

```

```

DETCANS=          60 / Total No. of Detector Channels available
PHAVERSN= '1992a  ' / defaulted for XAS
FILTER  = 'mesh + LEXAN' / Instrument filter in use
EXPOSURE= 0.5189900000000E+05 / Exposure time
EFFAREA =          1.0000E+00 / effective area factor
AREASCAL= 0.1000000000000E+01 / Area scaling factor
BACKSCAL= 0.1000000000000E+01 / Background scale factor
CORRSCAL= 0.0000000000000E+00 / Correlation scale factor
BACKFILE= 'none  ' / Background FITS file
CORRFILE= 'none  ' / Correlation FITS file
RESPFILE= '1626_total.spectrum.rmf' / redistribution matrix
ANCRFILE= 'NONE  ' / ancillary response
CREATOR  = 'fits_strectrum.f' / program which created the PHA dataset
TELESCOP= 'SAX   ' / Telescope (mission) name
INSTRUME= 'pds   ' / Instrument name
OBSERVER= 'SAX TEAM 4U 1626-67 (OP 741)' /
OBJECT   = '4U 1626-67' /
DATE     = '16/03/98' / FITS file creation date (dd/mm/yy)
DATE_OBS= 5.030168222222E+04 /
ORIGIN   = 'XAS   ' /
STORAGE  = 'BYROW ' /
DEADTIME= 'FIXED ' /
DTVALUE  =          .000000E+00 /
DTCORR   = 'NOT APPLIED' /
SCSTART  = 4.578000000000E+03 /
SCEND    = 1.010830000000E+05 /
EXPOSURE= 0.5189900000000E+05 / Exposure time
PARENTS  = '1 /saxpds1_data2/Pds_data/FOT/op_741/npd003.pddir001' /
PDSDATE  = 5.071654903935E+04 /
PDSDTOBS= 5.030168222222E+04 /
PDSUNITS= 'SUM ABCD' /
PDSSTYPE= 'PHA   ' /
PDSL0THR= ' This keyword is an array from PDSL01 to PDSL04' / Array follows
PDSL01   =          3 /
PDSUPTHR= ' This keyword is an array from PDSUP1 to PDSUP4' / Array follows
PDSUP1   =          150 /
PDSCOIN  = 'FFF   ' /
PSACORR  = 'FALSE ' /
FILENAME= '1626_total' /
PACKET   = 'pddir001' /
NPACKET  =          1469 /
TWINDOW  = 'colon ' /
HISTORY  = 'saxhaccum unit1S+B pddir001 PHA 0 1023 1 1996 8 6 16 22 24 1996 8 6'

```

```

HISTORY = '+ 21 50 2 3 150 3 3 0 0' /
PDSBGEXP= 6.461480651855E+03 /
BADDATA = .000000E+00 /
HISTORY = 'pdsoprpspe unit1S+B sub unit1B unit1S' /
CREATOR = 'PDSOPRSPE Revision: 1.17' /
PDSGRPED= 'TRUE' /
HISTORY = 'pdsgrppha unit1S LOG 60 15 200' /
PDSRTEXP= 1.000000000000E+00 /
HISTORY = 'pdsoprpspe unit1S_grp sum unit2S_grp unit1+2S_grp' /
HISTORY = 'pdsoprpspe unit1+2S_grp sum unit3+4S_grp totalS_grp' /
HISTORY = 'pdsoprpspe 1626_15_200_60 sum 1626_total_15_200_60 1626_total' /
CREATOR = 'grppha 2.6.0' / s/w task which wrote this dataset
HISTORY This extension has been written by WT_SPEC Ver 1.5.0
HISTORY The original fits file was 1626_total_spectrum.fits
END

```

CHANNEL	RATE	STAT_ERR	SYS_ERR	QUALITY	GROUPING
	count/s	count/s			
1 1	1.4287047E-01	3.9886590E-03	0.0000000E+00	0	1
2 2	1.5950228E-01	3.9867153E-03	0.0000000E+00	0	1
.....					
59 59	7.2025573E-03	5.2549643E-03	0.0000000E+00	0	-1
60 60	6.1054812E-03	5.3176279E-03	0.0000000E+00	0	-1

Vengono ora fornite alcune pagine (in inglese) prese dal sito ufficiale riguardante il formato FITS
<http://fits.gsfc.nasa.gov>

http://fits.gsfc.nasa.gov/fits_overview.html

[Home](#) [News](#) [Docs](#) [WCS](#) [Samples](#) [Libraries](#) [Viewers](#) [Utilities](#) [Keywords](#) [Conventions](#) [Resources](#)

A Brief Introduction to FITS

FITS is the standard computer data format widely used by astronomers to transport, analyze, and archive scientific data files.

History of FITS

The following paragraphs are reproduced from the 'Introduction' to the [FITS Standard document](#).

The Flexible Image Transport System (FITS) evolved out of the recognition that a standard format was needed for transferring astronomical data from one installation to another. The original form, or Basic FITS, was designed for the transfer of images and consisted of a binary array, usually multidimensional, preceded by an ASCII text header with information describing the organization and contents of the array. The FITS concept was later expanded to accommodate more complex data formats. A new format for image transfer, random groups, was defined in which the data would consist of a series of arrays, with each array accompanied by a set of associated parameters.

These formats were formally endorsed by the International Astronomical Union (IAU) in 1982. Provisions for data structures other than simple arrays or groups were made later. These structures appear in extensions, each consisting of an ASCII header followed by the data whose organization it describes. A set of general rules governing such extensions and a particular extension, ASCII table, were endorsed by the IAU General Assembly in 1988. At the same General Assembly, an [IAU FITS Working Group](#) (IAUFWG) was formed under IAU Commission 5 (Astronomical Data) with the mandate to maintain the existing FITS standards and to review, approve, and maintain future extensions to FITS, recommended practices for FITS, implementations, and the thesaurus of approved FITS keywords. In 1989, the IAUFWG approved a formal agreement for the representation of floating point numbers. In 1994, the IAUFWG endorsed two additional extensions, the image extension and the binary table extension.

FITS was originally designed and defined for 9-track half-inch magnetic tape. However, as improvements in technology have brought forward other data storage and data distribution media, it has generally been agreed that the FITS format is to be understood as a logical format and not defined in terms of the physical characteristics of any particular data storage medium. In 1994, the IAUFWG adopted a set of rules governing the relation between the FITS logical record size and the physical block size for sequential media and bitstream devices. The IAUFWG also approved in 1997 an agreement defining a new format for encoding the date and time in the DATE, DATE-OBS, and other related DATExxxx keywords to correct the ambiguity in the original DATE keyword format beginning in the year 2000.

In December 2002, after more than a decade of complex negotiations, the IAUFWG approved 2 papers that deal with the issue of representing World Coordinate Systems (WCS) in FITS. Two more papers in this WCS series are currently under development.

Brief highlights of the history of FITS:

- 1979: Initial use and interchange of FITS files
- 1980: Random groups convention developed
- 1981: Published original (single HDU) definition paper
- 1981: Published random groups definition paper
- 1982: FITS format is formally endorsed by the IAU
- 1988: Defined rules for multiple HDUs in a FITS file
- 1988: FITS Working Group established by IAU (IAUFWG)
- 1988: FITS definition extended to include ASCII TABLE extensions
- 1990: FITS definition extended to include IEEE floating-point data
- 1994: FITS definition extended to multiple image arrays in IMAGE extensions
- 1995: FITS definition extended to binary tables in BINTABLE extensions

http://fits.gsfc.nasa.gov/fits_overview.html

- 1997: Adopted a Y2K-compliant date format
- 2001: Reiterated existing standard in one paper (NOST document)
- 2002: Approved conventions for generalized world coordinates and celestial coordinates.

How FITS Evolves

The IAU-FWG was given authority over FITS matters by the 1988 IAU General Assembly. When the developer of a data set finds that it does not fit well into the primary HDU or a standard extension format, a new design may be developed. No change can be made that would cause existing FITS files to be out of conformance -- the "once FITS, always FITS" rule. Because software to read FITS files uses the type name of an extension to determine whether or not the software can read the extension, extension type names must be unique. The IAUFWG maintains a [list of extension type names that have been registered](#); the list is at the FITS Support Office. A unique name for any new extension type, even a developmental extension or one that will be used only locally, must be registered with the IAU-FWG. After astronomical community discussion, a formal proposal is distributed. This proposal is discussed by the community and may be further modified. Tests are run using the new format to confirm that it can be practically used for data transport. If the astronomical community reaches a consensus that the proposal should be adopted as standard FITS, and if successful data transfer using the proposed extension can be demonstrated, it is submitted for ratification to the regional committees -- the European FITS Committee, the Japanese FITS Committee, and the American Astronomical Society Working Group on Astronomical Software ([WGAS](#)) [FITS Committee](#). Following approval by the regional committees, it is submitted to the IAU-FWG Approval by the IAU-FWG establishes it as a standard extension.

In addition to the formal rules, a number of conventions are widely observed. Some conventions are used throughout the community others only within a particular discipline such as high energy astrophysics or single dish radio astronomy. Usually, the originator(s) of a convention will circulate an initial proposal for comments among a small group in the same discipline or installation. After this proposal has been refined based upon these comments, it is put out for public comment, usually by announcement to the sci.astro.fits newsgroup of a URL from which it can be retrieved. Comments at this time may lead to additional changes. If the affected community accepts the convention, installations will start using it in their FITS files. Since failure to use a convention is not a violation of the FITS rules, FITS readers unaware of it must not terminate with an error or give incorrect results when encountering it.

[Home](#) | [News](#) | [Docs](#) | [WCS](#) | [Samples](#) | [Libraries](#) | [Viewers](#) | [Utilities](#) | [Keywords](#) | [Conventions](#) | [Resources](#)

Last revised: Wednesday, 17-Mar-2004 16:44:24 EST

Contact us: fits@fits.gsfc.nasa.gov

Hosted by: The [HEASARC](#) (High Energy Astrophysics Science Archive Research Center)

Responsible NASA representative: Dr. William D. Pence

[Privacy, Security & Accessibility Statements](#).

<http://fits.gsfc.nasa.gov/xtension.html>

[Home](#) [News](#) [Docs](#) [WCS](#) [Samples](#) [Libraries](#) | [Viewers](#) [Utilities](#) [Keywords](#) [Conventions](#) [Resources](#)

FITS Extension Names

Registered with the IAU FITS Working Group

Extensions to the basic FITS format can be defined as specified in "[Generalized Extensions and Blocking Factors for FITS](#)", *A&AS*, 73, 359 (1988) and in Section 4.4 of the [FITS Standard](#) document. The following guidelines, as quoted from the first paper, should be considered before creating a new extension type:

The only restriction that will have to be placed on the freedom to create new extensions is that there should be only one approved extension format for each type of data organization. New extension types have to be created whenever the organization of the information is such that it cannot be handled by one of the existing extension types. It will be the function of each user who creates a new extension type to check with the standards committee to see if an extension already exists for that type of data organization and to propose one if it is really a new extension type. The contents of an extension and the optional keywords used, etc. will depend on the particular application. Thus one can use a standard table extension for all type of tabular information, without having to define a new extension type. With this restriction in mind, users should feel free to create new extension types when the need arises, but should always be aware that the use of non-standard extensions will inhibit the interchange of astronomical data.

Each extension type has a unique name given by the value of the mandatory XTENSION header keyword. The [IAU FITS Working Group](#) maintains this list of registered extension names. Anyone who wants to register a FITS extension name should contact the [chairman](#) of the IAU FITS Working Group.

Standard Extensions - These 3 extension types have been approved by the [IAU FITS Working Group](#) and are defined in Section 8 of the [FITS Standard](#) document as well as in the indicated *Astronomy and Astrophysics* journal articles.

- **IMAGE** - This extension type provides a means of storing a multidimensional array similar to that of the FITS primary header and data unit. Approved as a standard extension in 1994. The format of **IMAGE** extensions is defined in the [A&AS, 105, 53 \(1994\)](#) journal article.
- **TABLE** - This ASCII table extension type contains rows and columns of data entries expressed as ASCII characters. Approved as a standard extension in 1988. The format of **TABLE** extensions is defined in the [A&AS, 73, 365 \(1988\)](#) journal article.
- **BINTABLE** - This binary table extension type provides a more flexible and efficient means of storing data structures than is provided by the **TABLE** extension type. The table rows may contain a mixture of numerical, logical and character data entries. In addition, each entry is allowed to be a single dimensioned array. Numeric data are kept in binary formats. Approved as a standard extension in 1994. The format of **BINTABLE** extensions is defined in the [A&AS, 113, 159 \(1995\)](#) journal article.

Conforming Extensions - These conventions meet the requirements for a conforming extension as defined in [A&AS, 73, p359-364, 1988](#) and in Section 4.4 of the [FITS Standard](#) document, however they have not been formally approved or endorsed by the [IAU FITS Working Group](#).

- **IUEIMAGE** - This name was given to the prototype of the **IMAGE** extension type and was primarily used in the IUE project data archive from approximately 1992 to 1994. Except for the name, the format is identical to the **IMAGE** extension.
- **A3DTABLE** - This name was given to the prototype of the **BINTABLE** extension type and was primarily used in the AIPS data processing system developed at NRAO from about 1987 until it was replaced by **BINTABLE** in the early 1990s. The format is defined in the 'Going AIPS' manual, Chapter 14. It is very similar to the **BINTABLE** type except that it does not support the variable-length array convention.
- **FOREIGN** - This extension type is used to put a FITS wrapper about an arbitrary file, allowing a file or tree of files to be wrapped up in FITS and later restored to disk. A full description of this extension type is given in the [FITS Registry](#) of conventions.

<http://fits.gsfc.nasa.gov/xtension.html>

- **COMPRESS** - Proposed in 1991 in a [draft paper](#) by Archibald Warnock, Robert Hill, Barbara Pfarr (all at GSFC), and D. Wells (NRAO) as a way of storing compressed images in FITS format. See the FITSBITS email list archive of postings for [September](#) and [October](#) 1991 for a discussion of image compression in general and this proposal in particular. This compression proposal was never implemented, but some of the same ideas were used in the tiled image compression convention that is described in the [FITS Registry](#) of conventions.
- **FITS** - Suggested by Perry Greenfield (STScI) in April 2002 as a way to hierarchically embed entire FITS files within other FITS files. See the discussion on the **fitsbits** email list in the [April 2002 thread](#).

Other Registered Extensions - These extension names have been suggested, but the proposals have not been fully developed or implemented.

- **DUMP** - Suggested extension name for storing a stream of binary data (such as a telemetry stream) in a FITS file. This extension type was never implemented, but the **FOREIGN** extension type serves a similar purpose.
- **FILEMARK** - Suggested by Don Wells (NRAO) to represent the equivalent of an end-of-file mark on magnetic tapes. When the FITS format was designed in the late 1970s, FITS files were mainly written on half-inch magnetic tape where the end of a file could easily be identified by a tape end-of-file mark. Not all other media in use at that time supported such a clear hardware file delimiter, so the FILEMARK extension was proposed as a way of explicitly representing the end of the FITS file.
- **VGROUP** - This extension type was suggested by Don Jennings (GSFC) for possible use in supporting the analog of HDF (Hierarchical Data Format) group structures under FITS. This suggestion was later withdrawn, and the standard **BINTABLE** extension, in conjunction with the `EXTNAME = 'GROUPING'` keyword, was used for this purpose instead. See the description of the [Hierarchical Grouping](#) convention for more details.

[Home](#) [News](#) [Docs](#) [WCS](#) [Samples](#) [Libraries](#) [Viewers](#) [Utilities](#) [Keywords](#) [Conventions](#) [Resources](#)

Last revised: Tuesday, 13-Mar-2007 13:40:30 EDT

Contact us: [fits @ fits.gsfc.nasa.gov](mailto:fits@fits.gsfc.nasa.gov)

Hosted by: The [HEASARC](#) (High Energy Astrophysics Science Archive Research Center)

Responsible NASA representative: Dr. William D. Pence

[Privacy, Security & Accessibility Statements](#).