

# **Dispense per il Corso**

## **Misure Astrofisiche Parte II**

Mauro Orlandini

Anno Accademico 2003/2004

*Versione aggiornata al 25 Giugno 2004 16:53*



# Indice

<b>1</b>	<b>Accrescimento come Sorgente di Energia</b>	<b>1</b>
1.1	Fonti di energia per sorgenti cosmiche di raggi X . . . . .	1
1.2	Il limite di Eddington . . . . .	2
1.3	Lo spettro di emissione . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Elementi di Dinamica dei Gas</b>	<b>5</b>
2.1	Dinamica dei gas . . . . .	5
2.2	Le equazioni della dinamica dei gas . . . . .	5
2.3	Trasporto radiativo: Introduzione . . . . .	7
2.4	Flussi stazionari adiabatici ed isotermici . . . . .	10
2.5	Onde sonore . . . . .	12
2.6	Accrescimento stazionario a simmetria sferica . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Teoria Cinetica del Plasma</b>	<b>23</b>
3.1	Definizione di plasma . . . . .	23
3.2	Neutralità di carica, oscillazioni di plasma e lunghezza di Debye . . . . .	23
3.3	Collisioni Coulombiane . . . . .	26
3.4	Plasmi termici: tempo di rilassamento e libero cammino medio . . . . .	31
3.5	Il potere di frenamento di particelle veloci da parte del plasma . . . . .	33
3.5.1	Esempio: calcolo potere frenante di un plasma su un flusso in accrescimento . . . . .	35
3.6	Fenomeni di trasporto: viscosità . . . . .	36
3.7	Effetti dovuti a campi magnetici . . . . .	39
3.8	Onde d'urto nei plasmi . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Processi Radiativi</b>	<b>51</b>
4.1	Introduzione . . . . .	51
4.2	I coefficienti di Einstein . . . . .	52
4.2.1	Emissione termica (LTE) . . . . .	55
4.2.2	Emissione non termica . . . . .	56
4.2.3	Popolazioni invertite: maser e laser . . . . .	56
4.3	Processo di scattering . . . . .	57
4.4	Random walk . . . . .	58

4.5	Bremsstrahlung . . . . .	60
4.5.1	Bremsstrahlung termico . . . . .	63
4.5.2	Assorbimento per bremsstrahlung termico . . . . .	65
4.6	Radiazione di sincrotrone . . . . .	65
4.6.1	Sincrotrone auto-assorbito . . . . .	71
4.7	Scattering Compton . . . . .	73
4.7.1	Scattering da elettroni a riposo . . . . .	73
4.7.2	Scattering da elettroni in movimento . . . . .	74
4.7.3	Potenza emessa per Compton inverso per scattering singolo . . . . .	76
4.7.4	Spettro emesso per Compton inverso per scattering singolo . . . . .	77
4.7.5	Il parametro di Comptonizzazione $y$ . . . . .	82
4.7.6	Significato fisico del parametro di Comptonizzazione $y$ . . . . .	84
4.7.7	Spettro emesso per Compton inverso per scattering multipli . . . . .	85
4.7.8	Regimi spettrali per scattering multipli . . . . .	86
4.8	Spettro di ricombinazione ed emissione di righe . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Tecniche di Osservazione</b>	<b>97</b>
5.1	Introduzione . . . . .	97
5.2	Rivelatori per astronomia X . . . . .	97
5.2.1	Contatori proporzionali . . . . .	100
5.2.2	Contatori proporzionali a scintillazione . . . . .	102
5.2.3	Tecniche di reiezione del fondo . . . . .	102
5.2.4	Rivelatori a scintillazione . . . . .	103
5.2.5	Rivelatori a semiconduttore . . . . .	106
5.2.6	Microcalorimetri . . . . .	106
5.3	Collimatori meccanici . . . . .	107
5.4	Ottiche di focalizzazione di raggi X . . . . .	111
5.5	Rivelazione di raggi X da sorgenti cosmiche: Considerazioni statistiche . . . . .	113
5.6	Il rocking come tecnica per la determinazione del fondo . . . . .	117
<b>6</b>	<b>Fit Spettrale e XSPEC</b>	<b>121</b>
6.1	Introduzione . . . . .	121
6.2	Fondamenti di fitting spettrale . . . . .	121
6.3	Fitting spettrale e XSPEC . . . . .	125

# Prefazione

Quando mi è stato chiesto di tenere un corso di Astrofisica presso il Dipartimento di Fisica, ed in particolare un corso che si occupasse di “misure astrofisiche” ho cercato di immaginare gli argomenti che potessero essere di maggior interesse per gli studenti e che, al tempo stesso, potessero servire sia da base che da stimolo per un approfondimento da effettuarsi nella laurea specialistica.

Nell’ambito del gruppo di Astrofisica presso questo Dipartimento, l’astrofisica delle cosiddette “alte energie” ha svolto e svolge tuttora un ruolo importante sia per quello che riguarda lo sviluppo tecnologico di nuovi rivelatori e sistemi di focalizzazione, sia per quello che riguarda il livello più propriamente teorico-interpretativo.

Con il termine “Astrofisica delle Alte Energie” si intende quella parte dell’astrofisica che studia i processi fisici che avvengono in sorgenti celesti che hanno il loro picco di emissione nella banda dei raggi X/γ. I processi maggiormente coinvolti saranno quindi scattering Compton e bremsstrahlung e nella maggior parte dei casi interesseranno oggetti compatti, oggetti cioè il cui parametro di compattezza, definito come il rapporto tra la loro massa ed il loro raggio, è molto grande.

La prima evidenza osservativa che in sorgenti che emettono raggi X sono presenti oggetti “compatti” nel senso proprio del termine — cioè oggetti di piccole dimensioni e di enormi densità — è avvenuta nel 1971 con la scoperta di emissione pulsata a 4.8 sec da parte della sorgente X-3 nella costellazione del Centauro. Assumendo che la pulsazione osservata fosse dovuta al moto di rotazione della stella su se stessa (ipotesi poi rivelatasi corretta), affinché la superficie della stella non venga distrutta dalla forza centrifuga è necessario che

$$\frac{GM}{R^2} \gtrsim \Omega^2 R$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale,  $\Omega$  la velocità angolare e  $M$  e  $R$  sono la massa ed il raggio dell’oggetto. Da questa espressione segue che  $G \langle \rho \rangle \gtrsim \Omega^2$ , dove  $\langle \rho \rangle$  è la densità media dell’oggetto. Un periodo di rotazione di 4.8 sec implica che  $\langle \rho \rangle \gtrsim 10^7 \text{ g cm}^{-3}$ , da cui la natura compatta dell’oggetto.

Questa scoperta ha aperto un nuovo orizzonte di ricerca perché, per la prima volta, si potevano studiare contemporaneamente gli effetti sulla materia dovuti sia a forti campi gravitazionali<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Il rapporto tra la forza di gravità su di una stella di neutroni ( $M \sim M_\odot$  e  $R_{\text{ns}} \sim 10 \text{ Km}$ ) e quella sulla superficie della Terra è  $(M_\odot/M_\oplus)(R_\oplus/R_{\text{ns}})^2 \sim 10^{10}$ .

che ad enormi campi magnetici<sup>2</sup>. Le due discipline che li studiano, la teoria della relatività (sia generale che ristretta) e la magnetoidrodinamica (quantistica), trovavano quindi il loro laboratorio ideale nelle cosiddette pulsar X. Proprio per questo, un termine più appropriato per questa branca della fisica dovrebbe essere *Astrofisica Relativistica*, ma la dizione “Astrofisica delle Alte Energie” viene ancora mantenuta per ragioni storiche.

Il fatto che questi oggetti producano la maggior parte della loro energia nella banda dei raggi X implica che il loro “motore” non sia la conversione dell’energia gravitazionale in energia termica (attraverso le reazioni nucleari la cui emissione viene termalizzata dall’atmosfera stellare, come nel nostro Sole) dato che gli spettri osservati non sono termici. Subito dopo la loro scoperta ci si è reso conto che il loro “motore” è la conversione in energia elettromagnetica dell’energia cinetica della materia che viene catturata dal campo gravitazionale dell’oggetto compatto: il cosiddetto *accrescimento di materia*. Infatti l’evidenza di moto orbitale dell’oggetto compatto di Cen X–3 è stata la prima prova osservativa che questo tipo di sorgenti sono sistemi binari contenenti un oggetto compatto (nana bianca, stella di neutroni o buco nero) ed una stella “normale” a cui strappano materia; a questi sistemi è stato dato il nome di binarie X.

Trovato l’ambito disciplinare, bisognava trovare un argomento abbastanza generale che desse agli studenti le conoscenze di base sia teoriche che osservative dell’astrofisica delle alte energie. Tra le tante “Misure Astrofisiche” che possono essere effettuate ho scelto **la misura di uno spettro X emesso da un oggetto compatto**. Alla luce di quanto detto sopra, il corso si occuperà quindi dello studio dell’emissione da parte di oggetti compatti, della determinazione dei processi che hanno dato origine all’emissione osservata, e la determinazione delle proprietà fisiche della materia in questi sistemi.

Dopo l’introduzione del concetto di accrescimento nel primo capitolo, nel secondo e nel terzo vengono dati i fondamenti di dinamica dei gas e dei plasmi che servono a descrivere le condizioni del flusso di materia che viene catturato ed accresciuto. Nel successivo capitolo vengono descritti i processi radiativi che sono alla base dell’emissione osservata in questi sistemi.

Dopo l’introduzione “teorica” dei processi fisici, viene data una panoramica sui sistemi di rilevazione dei raggi X di natura cosmica, per poter comprendere quali sono le problematiche sperimentali e capire la maniera in cui gli spettri vengono prodotti. Particolare rilievo è stato dato alla descrizione dei rivelatori a bordo del satellite per Astronomia X BeppoSAX, ideato e costruito dagli Istituti di Astrofisica del CNR (ora confluiti nell’INAF) in collaborazione con un Istituto del CNR Olandese e lo Science Department dell’Agenzia Spaziale Europea. Lo strumento di alta energia PDS era sotto la responsabilità del Professor Frontera ed è stato realizzato dal gruppo di Astronomia X dell’Istituto TeSRE (ora IASF) del CNR di Bologna, di cui faccio parte.

Lo strumento informatico di analisi spettrale in raggi X, il programma XSPEC, viene brevemente descritto nell’ultimo capitolo, in cui vengono dati i rudimenti dell’analisi spettrale ed una brevissima introduzione di statistica per comprendere come ottenere lo spettro che meglio si concorda con i dati, ed i parametri fisici ad esso associato.

---

<sup>2</sup>Per conservazione del flusso magnetico, una stella di neutroni che abbia avuto come progenitore una stella di tipo solare con campo magnetico  $\sim 100$  gauss, possederà un campo magnetico dell’ordine di  $100 \cdot (R_{\odot}/R_{ns})^2 \sim 10^{12}$  gauss.

Infine, copia di queste dispense è disponibile online al sito <http://www.bo.iasf.cnr.it/~mauro/corsoX>

## Bibliografia essenziale

- ❑ **Accretion Power in Astrophysics**, Frank J., King A., and Raine D., Cambridge University Press (2002)
- ❑ **Radiative Processes in Astrophysics**, Rybicki G.B. and Lightman A.P., Wiley Publication (1979)
- ❑ **X-ray Astronomy**, Giacconi R. and Gursky H. (eds), Reidel Publishing (1974)
- ❑ **Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing**, Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. and Vetterling W.T., Cambridge University Press (1992) disponibile anche online al sito <http://www.nr.com>
- ❑ **SAX Observers' Handbook**, disponibile online al sito <ftp://ftp.asdc.asi.it/pub/sax/doc/handbook>
- ❑ **XSPEC User Manual** disponibile online al sito <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/xanadu/xspec>





# Capitolo 1

## Accrescimento come Sorgente di Energia

### 1.1 Fonti di energia per sorgenti cosmiche di raggi X

Per i fisici del 19° secolo l'unica fonte di energia in grado di spiegare l'emissione da sorgenti cosmiche era la gravità. Fu lo stesso Lord Kelvin a ricavare un tempo scale di durata della vita del nostro Sole assumendo che la sua luminosità  $L_{\odot}$  venga prodotta da contrazione gravitazionale:  $\tau_{KH} = GM_{\odot}^2/R_{\odot}L_{\odot} \simeq 3 \cdot 10^7$  anni. Già allora questo valore era troppo piccolo rispetto all'età della stessa Terra. Nel 20° secolo, con la scoperta delle reazioni nucleari, la fonte di energia del nostro Sole è stata identificata con la reazione nucleare di fusione di quattro atomi di Idrogeno in un atomo di Elio ( $4H_1^1 \rightarrow He_2^4 + 2e^+ + 2\nu_e + n\gamma$ ). Questa reazione avviene inoltre al ritmo "giusto", producendo il giusto equilibrio tra forze di radiazione e forze gravitazionali. Con lo sviluppo di tecniche di rivelazione in altre bande dello spettro elettromagnetico, dal radio ai raggi X e  $\gamma$ , ci si è resi conto sia dell'esistenza di oggetti compatti (previsti teoricamente), sia che la gravità ricopre un ruolo fondamentale per la produzione di radiazione ad alta energia. In particolare, l'**accrescimento** di materia, cioè la conversione dell'energia cinetica della materia che viene accresciuta in radiazione elettromagnetica, è stato riconosciuto come il motore principale in grado di spiegare l'emissione per sistemi contenenti oggetti compatti. Possiamo dare una stima, per ordine di grandezza, dell'energia prodotta per unità di massa nel caso in cui la fonte sia energia gravitazionale

$$\frac{\Delta E_{acc}}{m} = G \left( \frac{M_*}{R_*} \right) \simeq \begin{cases} 10^{20} \text{ erg g}^{-1} & \text{SN} \\ 10^{17} \text{ erg g}^{-1} & \text{NB} \end{cases} \quad (1.1)$$

Se l'oggetto che accresce è una stella di neutroni (SN), allora  $M_* \sim 1M_{\odot}$  e  $R_* \sim 10 \text{ Km}$ ; per una nana bianca (NB) avremo invece  $M_* \sim 1M_{\odot}$  e  $R_* \sim 10^9 \text{ cm}$ .

Per confronto, l'energia prodotta per unità di massa per fusione nucleare ( $4H_1^1 \rightarrow He_2^4$ ) è:

$$\frac{\Delta E_{nuc}}{m} = 0.007 c^2 \simeq 6 \cdot 10^{18} \text{ erg g}^{-1} \quad (1.2)$$

Come vediamo, l'efficienza del processo di accrescimento è funzione del **parametro di compattezza**  $M/R$ .

## 1.2 Il limite di Eddington

Per un dato valore del parametro di compattezza, la luminosità di un sistema la cui fonte principale è l'accrescimento di massa dipenderà dal tasso di accrescimento  $\dot{M}$ . Per alte luminosità lo stesso tasso di accrescimento potrebbe essere controllato dal momento della quantità di moto (da ora in poi momento) trasferito dalla radiazione alla materia che accresce attraverso processi di scattering e assorbimento. Questo può dar luogo ad una luminosità limite.

Si consideri il caso di accrescimento **stazionario** ed a **simmetria sferica**. Assumiamo inoltre che la materia in accrescimento **sia composta principalmente da Idrogeno e sia completamente ionizzata**. Lo scattering Thomson dei fotoni<sup>1</sup> avverrà principalmente sugli elettroni, dato che

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \simeq 6.7 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

dove  $r_0 = e^2/mc^2 \sim 2.8 \cdot 10^{-13}$  cm per un elettrone, misura la "dimensione" di una carica puntiforme assumendo che tutta l'energia a riposo sia di origine elettromagnetica.

Se indichiamo con  $S$  il flusso di energia (in unità di  $\text{erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ ) allora la forza dovuta alla radiazione sarà data da

$$F_{\text{rad}} = \sigma_T \frac{S}{c}$$

La forza elettrostatica di Coulomb tra elettroni e protoni fa sì che mentre la radiazione spinge gli elettroni, questi ultimi si *trascinano* con loro anche i protoni. La forza di gravità agisce quindi sul sistema elettrone-protone con forza

$$F_{\text{grav}} = G \frac{M(m_p + m_e)}{r^2} \simeq G \frac{Mm_p}{r^2}$$

Se la luminosità (in unità di  $\text{erg sec}^{-1}$ ) è  $L$  allora il flusso di energia sarà  $S = L/4\pi r^2$ , avendo assunto simmetria sferica. Quindi una coppia elettrone-protone sarà soggetta alla forza

$$F_{\text{tot}} = F_{\text{grav}} - F_{\text{rad}} = \left( GMm_p - \frac{\sigma_T L}{4\pi c} \right) \frac{1}{r^2}$$

La luminosità limite, detta luminosità di Eddington, si ottiene quando

$$L_{\text{Edd}} = 4\pi c \frac{GMm_p}{\sigma_T} \simeq 1.3 \cdot 10^{38} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ erg sec}^{-1} \quad (1.3)$$

Per  $L \gg L_{\text{Edd}}$  la pressione di radiazione è maggiore della forza gravitazionale e quindi l'accrescimento viene interrotto.

Nel caso di accrescimento *non simmetrico*, se questo avviene su una frazione  $f$  della superficie della stella, allora il limite sarà  $fL_{\text{Edd}}$ .

<sup>1</sup>Quando radiazione investe una particella carica, questa verrà accelerata e quindi emetterà radiazione a sua volta, con la stessa frequenza della radiazione incidente nel caso non relativistico

Per processi *non stazionari* (vedi esplosioni di supernova)  $L_{\text{Edd}}$  può essere superata di molti ordini di grandezza.

Il limite di Eddington implica un limite sul tasso di accrescimento **stazionario**

$$L_{\text{acc}} = G \frac{M\dot{M}}{R_*} \simeq \begin{cases} 1.3 \cdot 10^{36} \dot{M}_{16}(M/M_{\odot})(10 \text{ Km}/R_*) & \text{erg sec}^{-1} \\ 1.3 \cdot 10^{33} \dot{M}_{16}(M/M_{\odot})(10^9 \text{ cm}/R_*) & \text{erg sec}^{-1} \end{cases} \quad (1.4)$$

quindi

$$\dot{M}_{16}|_{\text{sta}} \leq \begin{cases} 10^2 & \text{Stella Neutroni} \\ 10^5 & \text{Nana Bianca} \end{cases}$$

Nel caso di un buco nero si preferisce parametrizzare la luminosità di accrescimento in termini dell'efficienza  $\eta$  di conversione dell'energia a riposo per unità di massa in radiazione

$$\begin{aligned} L_{\text{acc}} &= \eta \dot{M} c^2 \\ &= 2\eta G \frac{M\dot{M}}{R_*} \end{aligned} \quad (1.5)$$

dove abbiamo usato  $R_* = 2GM/c^2$  come “raggio” di un buco nero. Come abbiamo visto, per la reazione di fusione nucleare  $4\text{H}_1^1 \rightarrow \text{He}_2^4$  abbiamo  $\eta = 0.007$ . Da osservazioni di AGN si stima che per un buco nero  $\eta \simeq 0.1$ , dello stesso ordine di grandezza ( $\sim 0.15$ ) di quella stimata per una stella di neutroni, nonostante il parametro di compattezza sia alquanto diverso.

### 1.3 Lo spettro di emissione

Diamo ora alcune stime, per ordine di grandezza, dello spettro di emissione che ci aspettiamo da un oggetto compatto in accrescimento di massa e vediamo se è possibile ricavare informazioni sul tipo di oggetto compatto dalla rivelazione del suo spettro. Definiamo innanzi tutto tre temperature

$$T_{\text{rad}} = \frac{h\bar{\nu}}{k} \iff kT_{\text{rad}} = h\bar{\nu} \quad (1.6a)$$

$$T_{\text{b}} = \left( \frac{L_{\text{acc}}}{4\pi R_*^2 \sigma} \right)^{1/4} \iff \frac{L_{\text{acc}}}{4\pi R_*^2} = \sigma T_{\text{b}}^4 \quad (1.6b)$$

$$T_{\text{th}} = \frac{GMm_{\text{p}}}{3kR_*} \iff G \frac{M(m_{\text{e}} + m_{\text{p}})}{R_*} = 2 \times \frac{3}{2} kT_{\text{th}} \quad (1.6c)$$

Nel caso di un mezzo *otticamente spesso* la radiazione raggiunge l'equilibrio termico con la materia che accresce **prima** che questa raggiunga l'osservatore, e quindi  $T_{\text{rad}} \simeq T_{\text{b}}$ .

Nel caso di un mezzo *otticamente sottile* l'energia di accrescimento è convertita direttamente in energia elettromagnetica e raggiunge l'osservatore, quindi  $T_{\text{rad}} \simeq T_{\text{th}}$ .

Dato che un sistema non può irradiare ad una temperatura minore di  $T_b$ , avremo che

$$T_b \leq T_{\text{rad}} \leq T_{\text{th}}$$

valida se possiamo caratterizzare il sistema con una unica temperatura. Dalla definizione abbiamo che l'intervallo di emissione aspettato per una stella di neutroni ed una nana bianca è

$$\begin{array}{l} 1 \text{ keV} \leq h\bar{\nu} \leq 50 \text{ MeV} \quad \text{Stella Neutroni} \\ 6 \text{ eV} \leq h\bar{\nu} \leq 100 \text{ keV} \quad \text{Nana Bianca} \end{array}$$

# Capitolo 2

## Elementi di Dinamica dei Gas

### 2.1 Dinamica dei gas

Tutta la materia che viene accresciuta si trova nello stato di gas, cioè le sue particelle (elettroni liberi più varie specie di ioni) interagiscono direttamente **solamente per collisioni**, invece che attraverso forze a “corto raggio”.

Una particella percorrerà una certa distanza, detta *libero cammino medio*  $\lambda$ , prima di cambiare il suo stato a causa di una collisione con un'altra particella. Se il gas è sufficientemente uniforme su lunghezze-scala dell'ordine alcune volte il libero cammino medio, l'effetto delle collisioni sarà quello di rendere casuali (“randomizzare”) le velocità delle particelle attorno ad una velocità media, che chiameremo velocità del gas  $v$ .

Se ci poniamo nel sistema di riferimento che si muove a velocità  $v$ , le particelle avranno una distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann e possono essere descritte da una temperatura  $T$ . Se siamo interessati a lunghezze-scala  $l \gg \lambda$ , possiamo considerare il gas come un **fluido**, caratterizzato da una velocità  $v$ , temperatura  $T$  e densità  $\rho$  in ogni punto.

Possiamo quindi studiare il comportamento di queste variabili in funzione della posizione e del tempo imponendo le leggi di conservazione della massa, del momento e dell'energia. Questo è il dominio di studio della dinamica dei gas.

Se vogliamo tenere in conto le interazioni tra particelle, allora dobbiamo considerare la fisica dei plasmi (o meglio la teoria cinetica dei plasmi).

Se dalla risoluzione delle equazioni troviamo che si hanno grandi variazioni dei parametri su lunghezze scala comparabili con il libero cammino medio delle particelle, allora l'approssimazione a fluido non è più valida e dobbiamo utilizzare la teoria cinetica dei plasmi.

### 2.2 Le equazioni della dinamica dei gas

Ricaviamoci ora le equazioni che governano la dinamica di un gas partendo dalle tre leggi di conservazione. Avremo inoltre bisogno, per descrivere completamente il flusso del gas, di una equazione di stato e di una appropriata scelta delle condizioni al contorno.

### □ Conservazione della massa (equazione di continuità)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

### □ Equazione di stato

A causa del moto termico delle sue particelle, il gas è caratterizzato da una pressione  $P$  in ogni punto. L'equazione di stato mette in relazione questa pressione con la densità e la temperatura del gas. I gas "astrofisici" obbediscono alla legge dei gas perfetti

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \quad (2.2)$$

dove  $m_H \simeq m_p$  è la massa dell'atomo di Idrogeno e  $\mu$  è il peso molecolare medio, che è la massa media, per particella di gas, misurata in unità di  $m_H$ . Quindi  $\mu = 1$  per l'Idrogeno neutro,  $1/2$  per Idrogeno ionizzato, e qualcosa nel mezzo per una miscela di gas con abbondanze cosmiche, dipendente dal grado di ionizzazione.

### □ Conservazione del momento

Gradienti nella pressione del gas implicano forze, dato che del momento viene trasferito. Indichiamo con  $\mathbf{f}$  la densità (forza per unità di volume) di ogni altro tipo di forze agenti sul sistema e non dovute a gradienti di pressione. La conservazione del momento (detta anche **equazione di Eulero**) ha allora la forma

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f} \quad (2.3)$$

Il termine  $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  rappresenta la conservazione del momento attraverso il fluido a causa del gradiente di velocità. La presenza di questo termine significa che sono possibili moti stazionari anche nel caso in cui  $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$  ma  $\mathbf{v} \neq 0$ .

Un esempio di forza esterna è la gravità:  $\mathbf{f} = -\rho \mathbf{g}$ . Un altro esempio è la forza dovuta ad un campo magnetico esterno.

Un altro esempio importante di forza esterna è la viscosità, che è il trasferimento di momento lungo gradienti di velocità a causa di moti turbolenti o moti termici.

### □ Conservazione dell'energia

Un elemento di gas possiede due forme di energia: energia cinetica (per unità di volume)  $\frac{1}{2} \rho v^2$  ed energia interna (termica)  $\rho \epsilon$ , dove  $\epsilon$ , l'energia interna per unità di massa, dipende dalla temperatura del gas. Per il teorema di equipartizione dell'energia, ad ogni grado di libertà della particella del gas è assegnata una energia media  $\frac{1}{2} k T$ . Per un gas monoatomico, gli unici gradi di libertà sono i tre traslazionali, e quindi

$$\epsilon = \frac{3}{2} \frac{k T}{\mu m_H} \quad (2.4)$$

Se il gas è formato da molecole, vi saranno ulteriori gradi di libertà dovuti alla rotazione e vibrazione molecolari.

L'equazione di conservazione dell'energia ha dunque la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon + P \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.5)$$

Il membro a sinistra ci ricorda l'equazione di continuità, con  $(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon)$  la quantità conservata. Il termine contenente  $P$  rappresenta il lavoro dovuto alla pressione.

Nel membro di destra compaiono due nuove quantità: il vettore flusso radiativo  $\mathbf{F}_{\text{rad}}$  ed il vettore flusso di calore per conduzione  $\mathbf{q}$ .

Per definire queste quantità è necessario introdurre il concetto di trasporto radiativo e trovare le equazioni che lo governano.

## 2.3 Trasporto radiativo: Introduzione

Per definire il flusso radiativo introduciamo la grandezza fisica che ne è alla base, la *intensità specifica*  $I_\nu$ , la quale fornisce il flusso di energia  $dE$  per unità di tempo, per unità di area, per unità di angolo solido, per unità di frequenza in una direzione  $\mathbf{n}$  nel punto  $\mathbf{r}$  che attraversa l'unità di area perpendicolare a  $\mathbf{n}$  al tempo  $t$ . Quindi (si veda Figura 2.1)

$$dE = I_\nu dA \cos \theta d\nu d\Omega dt$$

Integrando sull'angolo solido si ottiene il flusso specifico  $F_\nu$ , cioè il tasso netto a cui l'energia attraversa l'unità di area indipendentemente dalla posizione

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\Omega$$

Si noti che se  $I_\nu$  è un campo di radiazione isotropo (cioè indipendente dall'angolo  $\theta$ ), allora il flusso specifico è zero, dato che  $\int \cos \theta d\Omega = 0$ . In altre parole, tanta energia attraverso l'unità di area  $dA$  nella direzione  $\mathbf{n}$  così come nella direzione  $-\mathbf{n}$ .

Il flusso specifico integrato su di una area che racchiude la sorgente ci fornisce la luminosità specifica

$$L_\nu = \int F_\nu dA$$

Integrando in frequenza si ottengono il flusso e la luminosità. Quindi, ritornando alla nostra equazione di conservazione dell'energia (2.5)

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \int d\nu \int d\Omega \mathbf{n} I_\nu(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \quad (2.6)$$

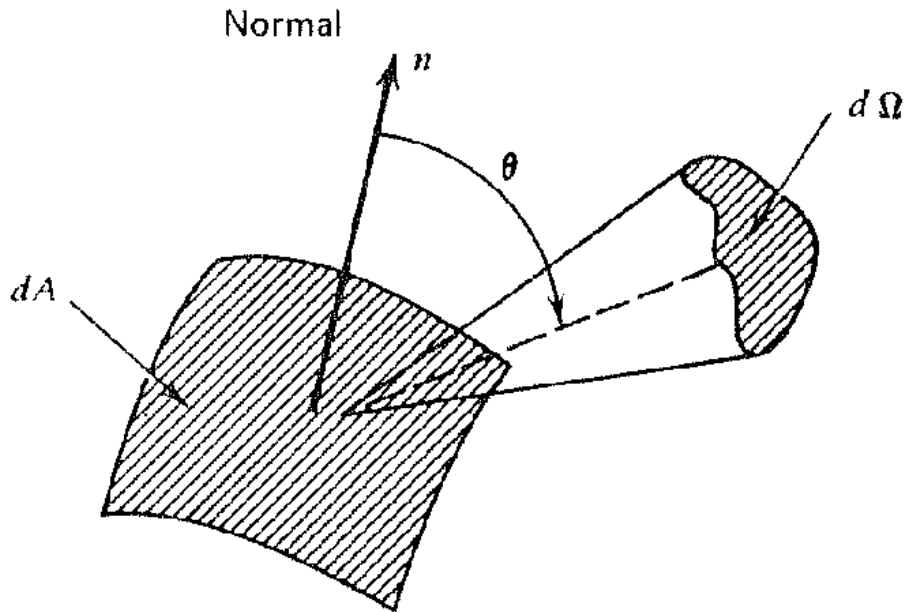


Figura 2.1: Geometria per raggi incidenti formanti un angolo  $\theta$  con la normale  $\mathbf{n}$  all'unità di area  $dA$ .

Il termine  $-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}}$  ci fornisce il tasso a cui l'energia viene emessa (energia negativa) o assorbita (energia positiva) per unità di volume del gas.

La intensità specifica  $I_\nu$  è governata da una ulteriore equazione, che altro non è che la conservazione dell'energia per il campo radiativo, e prende il nome di **equazione del trasporto radiativo**.

La equazione del trasporto radiativo, nel caso **indipendente** dal tempo, può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu &= -\mu_\nu I_\nu + j_\nu \\ &= -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove  $\mu_\nu$  è il coefficiente di assorbimento,  $j_\nu$  il coefficiente di emissione (energia emessa per unità di tempo, per unità di angolo solido, per unità di volume in direzione  $\mathbf{n}$ ), ed abbiamo introdotto la quantità  $\kappa_\nu$ , detta opacità specifica e definita come  $\mu_\nu = \kappa_\nu \rho$ . Questi coefficienti dipendono dal tipo di processi che avvengono nel mezzo, che a loro volta dipendono dal campo di radiazione.

Se introduciamo la funzione sorgente  $S_\nu \equiv j_\nu / \mu_\nu$ , e la *profondità ottica*  $\tau_\nu$  lungo un cammino  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  dalla sorgente all'osservatore

$$d\tau_\nu = \mu_\nu ds \quad (2.8)$$

allora possiamo riscrivere l'equazione del trasporto



$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (2.9)$$

Se il *campo di radiazione* corrisponde ad uno stato di equilibrio termico ad una data temperatura  $T$ , allora sappiamo che  $I_\nu = B_\nu(T)$ , la funzione di Planck (corpo nero). Dato che  $I_\nu$  non dipende dalla posizione (e quindi dalla profondità ottica), allora il membro di destra è nullo e quindi

$$S_\nu = I_\nu = B_\nu(T) \equiv \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (2.10)$$

indipendentemente dal meccanismo di radiazione.

Se il *mezzo* può essere caratterizzato da una temperatura  $T$  (cioè l'emissione è termica), allora

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\mu_\nu} = B_\nu(T) \quad (2.11)$$

che non è altro che la legge di Kirchhoff.

Se gli stati della materia che contribuiscono all'emissione ed all'assorbimento sono popolati con una distribuzione di Boltzmann (cioè  $N(E) \propto \exp(-E/kT)$ ) ad una certa temperatura  $T$ , ma il campo di radiazione **non** è in equilibrio con la materia, allora il mezzo è detto trovarsi in uno stato di *equilibrio termodinamico locale*.

Una condizione necessaria affinché lo spettro emesso sia termico è che la profondità ottica  $\tau_\nu \rightarrow \infty$ . In questo caso diciamo che il mezzo è *otticamente spesso*. Per contro, in un mezzo otticamente spesso  $I_\nu = S_\nu$  (ma non  $B_\nu$ , a meno che non siamo in equilibrio termodinamico locale).

All'altro estremo, se  $\tau_\nu \rightarrow 0$  possiamo trascurare l'assorbimento nell'equazione del trasporto radiativo e quindi Equazione 2.7 si riduce a

$$I_\nu = \int j_\nu ds \quad (2.12)$$

Un tale mezzo è detto *otticamente sottile*.

Infine, se  $S_\nu = 0$ , abbiamo un mezzo puramente assorbente. L'equazione del trasporto (2.9) diventa quindi

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu \quad \implies \quad I_\nu = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) \quad (2.13)$$

Nel caso di una stella, o ogni altro mezzo otticamente spesso, lo stato della materia può essere caratterizzato localmente da una temperatura  $T$  che varia lentamente con la posizione (cioè abbiamo un equilibrio termico localmente, un caso speciale di equilibrio termodinamico locale). In questa approssimazione, l'equazione del trasporto è equivalente a

$$F_\nu = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu\rho} \frac{dB_\nu(T)}{dr} \quad (2.14)$$

che se viene integrata in frequenza diventa

$$F = -\frac{c}{3\kappa_R\rho} \frac{d}{dr}(aT^4) \quad (2.15)$$

dove  $\kappa_R$  è la *opacità media di Rosseland*, definita come

$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{\int \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}$$

ed abbiamo usato la relazione  $\int B_\nu d\nu = (ac/4\pi)T^4 \equiv (\sigma/\pi)T^4$ .

Ritorniamo ora alla nostra equazione di conservazione dell'energia (2.5), ed in particolare alla discussione sul termine  $-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}}$ . Nel caso di un mezzo otticamente sottile (radiazione può uscire dal mezzo senza interazioni) abbiamo visto che

$$-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} = -4\pi \int j_\nu d\nu$$

Nel caso di un mezzo otticamente spesso, allora  $\mathbf{F}_{\text{rad}}$  è data dalla approssimazione di Rosseland (2.15)

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{16\sigma}{3\kappa_R\rho} T^3 \nabla T$$

La seconda nuova quantità introdotta nell'equazione di conservazione dell'energia è il flusso di calore dovuto a conduzione  $\mathbf{q}$ . Questo misura il tasso a cui moti disordinati (principalmente dovuti ad elettroni) trasportano energia termica nel gas, e quindi riducono le differenze di temperatura (termalizzano). Vedremo più avanti (Eq. 3.42) che per un gas ionizzato che soddisfi la relazione  $\lambda \ll T/|\nabla T|$

$$\mathbf{q} \simeq 10^{-6} T^{5/2} \nabla T \quad \text{erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1} \quad (2.16)$$

Ovviamente il termine  $-\nabla \cdot \mathbf{q}$  aumenta l'ordine dell'equazione differenziale in  $T$ .

Il sistema di equazioni di conservazione, più l'equazione di stato, l'equazione del trasporto, e una descrizione delle quantità  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{q}$  permettono, in linea di principio, una descrizione completa del comportamento del gas date opportune condizioni al contorno.

Ovviamente, tutte le soluzioni conosciute corrispondono a casi particolari o soluzioni approssimate. Quello che tratteremo ora sono alcune semplici casi in cui la soluzione può dare utili informazioni per casi più complessi.

## 2.4 Flussi stazionari adiabatici ed isothermici

Prima di tutto consideriamo un flusso *stazionario*, per cui tutte le derivate rispetto al tempo siano nulle. Assumiamo poi che non vi siano perdite di energia attraverso radiazione ( $\mathbf{F}_{\text{rad}} = 0$ ) e non vi sia conduzione termica ( $\mathbf{q} = 0$ ) in Eq. 2.5.

Le nostre tre leggi di conservazione della massa, momento ed energia diventano

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.17a)$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f} \quad (2.17b)$$

$$\nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon + P \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (2.17c)$$

Sostituendo la prima equazione nella terza otteniamo

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 + \epsilon + \frac{P}{\rho} \right) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (2.18)$$

Moltiplicando scalarmente Eq. 2.17b per  $\mathbf{v}$  otteniamo

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla P = \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla P$$

Quindi, eliminando  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$  dalla Eq. 2.18 otteniamo

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \epsilon + P/\rho \right) = \mathbf{v} \cdot \nabla P$$

ed espandendo  $\nabla(P/\rho)$  e fattorizzando

$$\mathbf{v} \cdot [\nabla \epsilon + P \nabla(1/\rho)] = 0$$

Questa relazione implica, dalla definizione dell'operatore gradiente, che se viaggiamo lungo una linea di flusso di gas, cioè seguiamo la velocità  $\mathbf{v}$ , per gli incrementi  $d\epsilon$  e  $d(1/\rho)$  in  $\epsilon$  e  $1/\rho$  deve valere la relazione

$$d\epsilon + P d(1/\rho) = 0$$

Ma dalla definizione di  $\epsilon$  (2.4) e dalla legge dei gas perfetti (2.2) questo equivale a

$$\frac{3}{2} dT + \rho T d \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0$$

che ha come soluzione

$$\rho^{-1} T^{3/2} = \text{costante}$$

che può essere scritta in termini della pressione (usando l'equazione di stato (2.2)) come

$$P \rho^{-5/3} = \text{costante} \quad (2.19)$$

Equazione 2.19 descrive il cosiddetto *flusso adiabatico*.

Benché abbiamo dimostrato che  $P \rho^{-5/3}$  è costante su una linea di flusso, in molti casi si assume che questa costante sia la stessa per ogni linea di flusso del gas. Questo è equivalente a

porre l'entropia del gas costante. Questi flussi vengono detti *isoentropici*. Si noti come i termini adiabatici e isoentropici vengono spesso intercambiati.

Se il gas non è mono-atomico, e quindi il coefficiente della energia interna  $\epsilon$  non è  $3/2$ , avremmo ottenuto lo stesso un risultato come in Eq. 2.19, ma con un esponente diverso per  $\rho$ :

$$P\rho^{-\gamma} = \text{costante} \quad (2.20)$$

L'equazione 2.20 è detta *politropica* e  $\gamma$  è detto *indice politropico*. Esso è uguale al rapporto dei calori specifici del gas.

Un altro importante caso speciale di flusso si ottiene assumendo che la temperatura  $T$  sia costante in tutta la regione di interesse. Questo tipo di flusso viene detto *isotermico* ed è equivalente a postulare l'esistenza di un qualche processo fisico che mantenga costante  $T$ . In altre parole, l'equazione di conservazione dell'energia viene sostituita dalla relazione  $T = \text{costante}$ . Utilizzando l'equazione di stato, questa relazione corrisponde a

$$P\rho^{-1} = \text{costante}$$

che ha la stessa forma di Eq. 2.20 con  $\gamma = 1$ .

## 2.5 Onde sonore

Una importante classe di soluzioni del nostro sistema di equazioni del gas corrisponde al caso di *equilibrio idrostatico*. In questo caso, oltre ad imporre un flusso stazionario e l'assenza di perdite di radiazione, imponiamo che  $\mathbf{v} = 0$ . In questo caso la legge di conservazione del momento Eq. 2.17b si riduce a

$$\nabla P = \mathbf{f}$$

Soluzioni di questo tipo sono appropriate ad atmosfere stellari (o planetarie) in equilibrio radiativo.

Assumiamo che abbiamo una soluzione in cui  $P$  e  $\rho$  sono certe funzioni della posizione,  $P_0$  e  $\rho_0$ , e consideriamo piccole perturbazioni attorno ad essa. Sia quindi

$$P = P_0 + P', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

dove tutte le quantità primarie sono piccole, così possiamo trascurare prodotti di ordine superiore al secondo. Assumiamo inoltre che le perturbazioni siano adiabatiche (o isotermiche). Perciò

$$P + P' = K(\rho + \rho')^\gamma \quad (2.21)$$

dove  $\gamma = 5/3$  nel caso adiabatico e  $\gamma = 1$  nel caso isotermico. Linearizzando l'equazione di continuità (2.1) e di Eulero (2.3), ed usando il fatto che  $\nabla P_0 = \mathbf{f}$ , abbiamo che

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P' = 0 \quad (2.23)$$

Dato che  $P$  è una funzione solamente di  $\rho$ , allora  $\nabla P' = (dP/d\rho)_0 \nabla \rho'$ , dove il pedice 0 significa che la derivata deve essere valutata per la soluzione di equilibrio, cioè  $(dP/d\rho)_0 = dP_0/d\rho_0$ . Quindi Eq. 2.23 diventa

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0 \nabla \rho' = 0 \quad (2.24)$$

Eliminando  $\mathbf{v}'$  da (2.24) e (2.22) applicando gli operatori  $\nabla \cdot$  e  $\partial/\partial t$  e poi sottraendo, otteniamo

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \rho' \quad (2.25)$$

dove abbiamo definito

$$c_s = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0^{1/2} \quad (2.26)$$

L'equazione 2.25 non è altro che la *equazione d'onda*, con onda che si propaga a velocità  $c_s$ . Si può fare vedere che anche le altre variabili  $P'$  e  $\mathbf{v}'$  ubbidiscono a simili equazioni. Questo implica che piccole perturbazioni attorno all'equilibrio idrostatico si propagano attraverso il gas come onde sonore con velocità  $c_s$ . Dalle Eq. 2.21 e 2.26 vediamo come la velocità del suono possa avere due valori

$$\text{adiabatico: } c_s^{\text{ad}} = \left( \frac{5P}{3\rho} \right)^{1/2} = \left( \frac{5kT}{3\mu m_H} \right)^{1/2} \propto \rho^{1/3} \quad (2.27a)$$

$$\text{isotermico: } c_s^{\text{iso}} = \left( \frac{P}{\rho} \right)^{1/2} = \left( \frac{kT}{\mu m_H} \right)^{1/2} \quad (2.27b)$$

Le velocità del suono  $c_s^{\text{ad}}$  e  $c_s^{\text{iso}}$  sono quantità che possono essere definite localmente in ogni punto del gas. Entrambe sono dello stesso ordine di grandezza della velocità termica media degli ioni del gas. Da un punto di vista numerico abbiamo che

$$c_s \simeq 10 \left( \frac{T}{10^4 K} \right)^{1/2} \text{ Km sec}^{-1} \quad (2.28)$$

Dato che  $c_s$  è la velocità a cui le perturbazioni in pressione attraversano il gas, questa limita la rapidità con cui il gas risponde a variazioni di pressione. Per esempio, se la pressione in una

parte di una regione del gas di dimensione caratteristica  $l$  cambia improvvisamente, altre parti di questa regione non possono rispondere a questo cambiamento fino a quando non è passato un tempo dell'ordine  $l/c_s$ , il tempo di attraversamento del suono.

D'altro canto, se la pressione in una parte della regione cambia su un tempo-scala molto maggiore di  $l/c_s$ , il gas ha tutto il tempo di rispondere alla sollecitazione ed il gradiente di pressione rimarrà piccolo.

Quindi, se consideriamo *flussi supersonici*, dove il gas si muove con  $|\mathbf{v}| > c_s$ , il gas non riesce a rispondere su tempi scala  $l/|\mathbf{v}| < l/c_s$ , e quindi gradienti di pressione hanno effetti trascurabili sul flusso. All'altro estremo, per *flussi subsonici*, caratterizzati da  $|\mathbf{v}| < c_s$ , il gas riesce a rispondere a cambiamenti in pressione quindi, in prima approssimazione, si comporta come se fosse in equilibrio idrostatico.

Queste proprietà si possono ricavare direttamente da una analisi per ordine di grandezza dell'equazione di Eulero. Infatti, per un flusso supersonico abbiamo che

$$\frac{|\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|\nabla P|} \sim \frac{v^2/l}{P/\rho l} \sim \frac{v^2}{c_s^2} > 1$$

e quindi, in prima approssimazione, i gradienti di pressione possono essere trascurati.

Una importante proprietà della velocità del suono è la sua dipendenza dalla densità (Eq. 2.27a).

Questo significa che regioni di densità superiore alla media avranno anche velocità del suono superiori alla media, il che comporta la possibilità di avere *onde d'urto* (*shock waves*).

In uno shock le grandezze che descrivono il fluido cambiano su lunghezze scala dell'ordine del libero cammino medio, e questo comporta una *discontinuità* nel fluido.

## 2.6 Accrescimento stazionario a simmetria sferica

Ora che abbiamo tutto l'apparato matematico a disposizione, possiamo attaccare il problema reale di accrescimento di massa. Si consideri una stella di massa  $M$  che accresce, con simmetria sferica, da una grande nube di gas. Questa è una buona approssimazione di una stella isolata che accresce dal mezzo interstellare, sempre che si possano trascurare il momento angolare, il campo magnetico ed il moto collettivo del gas rispetto alla stella.

In primo luogo, ci aspettiamo di poter determinare il tasso di accrescimento stazionario  $\dot{M}$  (in unità di  $\text{g sec}^{-1}$ ) sulla stella date le condizioni ambientali (densità  $\rho(\infty)$  e temperatura  $T(\infty)$ ) per parti della nube di gas lontane dalla stella, e date delle condizioni al contorno sulla sua superficie.

Secondo, tenteremo di comprendere fino a che distanza la nube è influenzata dalla presenza della stella che accresce.

Innanzitutto usiamo un sistema di coordinate polari sferiche  $(r, \theta, \phi)$  con origine al centro della stella. Avendo assunto simmetria sferica, tutte le variabili sono indipendenti da  $\theta$  e  $\phi$ . Inoltre la velocità del gas ha solamente la componente radiale  $v_r = v$ . Dato che consideriamo materia che cade sulla stella (accrescimento)  $v$  sarà negativa, mentre  $v > 0$  corrisponderà a vento stellare.

Per un flusso stazionario l'equazione di continuità diventa

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho v) = 0 \quad (2.29)$$

dove abbiamo usato l'espressione standard per la divergenza in coordinate sferiche. Questo ha come soluzione  $r^2 \rho v = \text{costante}$ . Dato che  $\rho(-v)$  è il flusso di materia che cade, la costante deve essere in relazione con in tasso di accrescimento (costante)  $\dot{M}$ . Poiché abbiamo a che fare con una superficie di una sfera avremo che

$$4\pi r^2 \rho(-v) = \dot{M} \quad (2.30)$$

Nell'equazione di Eulero, l'unico contributo alla forza esterna  $\mathbf{f}$  è dato dalla gravità, e questa ha solamente la componente radiale

$$f_r = -G \frac{M\rho}{r^2}$$

quindi la conservazione del momento diventa

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (2.31)$$

Utilizziamo infine l'equazione di stato politropica

$$P = K\rho^\gamma \quad (2.32)$$

al posto della legge di conservazione dell'energia. Questo ci permette di trattare simultaneamente sia accrescimento adiabatico ( $\gamma = 5/3$ ) che quello isotermico ( $\gamma = 1$ ). Dopo che avremo trovato la soluzione dovremo vedere se l'assunzione adiabatica o isotermica sia giustificata andando ad indagare i processi di riscaldamento e raffreddamento del gas.

Per esempio, l'approssimazione adiabatica sarà valida se i tempi-scala su cui il gas si scalda o raffredda sono lunghi rispetto al tempo che impiega un elemento del gas a cadere sulla stella. In realtà né l'accrescimento adiabatico né quello isotermico sono valide approssimazioni, per cui ci aspetteremo  $1 < \gamma < 5/3$ .

Una volta determinati  $P(r)$  e  $\rho(r)$ , utilizzando l'equazione di stato possiamo ricavarci la temperatura  $T$

$$T = \frac{\mu m_H P}{\rho k} \quad (2.33)$$

Il nostro problema si riduce quindi nell'integrazione dell'Equazione 2.31 con l'aiuto di (2.32) e (2.30) e quindi nell'identificazione dell'unica soluzione che corrisponde al nostro problema di accrescimento.

Prima di integrare l'Equazione 2.31 vediamo come sia possibile ottenere importanti informazioni senza una integrazione esplicita. Dato che

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = c_s^2 \frac{d\rho}{dr}$$

allora, il termine  $(1/\rho)(dP/dr)$  nell'equazione di Eulero (2.31) può essere scritto come  $(c_s^2/\rho)(d\rho/dr)$ . Ma dalla equazione di continuità (2.29) abbiamo che

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{vr^2} \frac{d}{dr}(vr^2)$$

Quindi Equazione 2.31 diventa

$$v \frac{dv}{dr} - \frac{c_s^2}{vr^2} \frac{d}{dr}(vr^2) + \frac{GM}{r^2} = 0$$

che, con un pò di algebra, può essere riscritta nella forma

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) \frac{d}{dr}(v^2) = -\frac{GM}{r^2} \left[ 1 - \left( \frac{2c_s^2 r}{GM} \right) \right] \quad (2.34)$$

A prima vista sembra che le cose siano diventate molto più complicate, dato che  $c_s$  è in generale una funzione di  $r$ . Però l'interpretazione fisica di  $c_s$  come la velocità del suono nel gas, insieme alla struttura dell'Equazione 2.34, in cui i fattori di entrambi i membri possono (in linea di principio) diventare nulli, ci permette di classificare le possibili soluzioni di (2.34) in classi distinte e di trovare l'unica corrispondente al nostro problema.

In primo luogo, possiamo notare come a grande distanza dalla stella il fattore  $[1 - (2c_s^2 r/GM)]$  nel membro di destra deve diventare negativo, dato che  $c_s^2$  approssima un qualche valore asintotico finito  $c_s^2(\infty)$ , dipendente dalla temperatura del gas lontano dalla stella, mentre  $r$  aumenta senza alcun limite. Questo significa che per grandi  $r$  il membro di destra di (2.34) è positivo.

Nel membro di sinistra, il fattore  $d(v^2)/dr$  deve essere negativo, dato che vogliamo che il gas si trovi a riposo a grandi distanze dalla stella, e che acceleri a mano a mano che si avvicina.

Questi due requisiti sono compatibili tra loro solamente se per grandi  $r$  il flusso del gas è subsonico, cioè

$$v^2 < c_s^2 \quad \text{per grandi } r \quad (2.35)$$

Questo è ovviamente un risultato molto ragionevole dato che il gas avrà una temperatura non nulla, e quindi una velocità del suono non nulla, a grandi distanze dalla stella.

Mentre il gas si avvicina alla stella,  $r$  decresce ed il fattore  $[1 - (2c_s^2 r/GM)]$  deve tendere ad aumentare. Alla fine esso si annullerà, a meno che non si trovi un modo di aumentare  $c_s^2$  riscaldando il gas. Questo però è molto improbabile, dato che il fattore si annulla ad una distanza  $r_s$  data da

$$r_s = \frac{GM}{2c_s^2(r_s)} \simeq 7.5 \cdot 10^{13} \left( \frac{T(r_s)}{10^4 \text{ K}} \right)^{-1} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ cm} \quad (2.36)$$

dove abbiamo usato (2.28) per introdurre la temperatura. L'ordine di grandezza di  $r_s$  è molto maggiore del raggio  $R_*$  di ogni oggetto compatto ( $R_* \lesssim 10^9$  cm).

Una simile analisi dei segni nell'Equazione 2.34 per  $r < r_s$  mostra che il flusso deve essere supersonico vicino alla stella:



$$v^2 > c_s^2 \quad \text{per piccoli } r \quad (2.37)$$

Questa discussione mostra come il problema che stiamo trattando non sia matematicamente ben posto se diamo solamente le condizioni all'infinito. Infatti è necessario specificare anche le condizioni sulla o vicino la superficie della stella. Vedremo che imponendo la condizione (2.37) otterremo solamente una soluzione al nostro problema (soluzione del Tipo 1). Senza l'imposizione (2.37) ci sarebbe anche un'altra possibile soluzione (di Tipo 3).

L'esistenza di un punto  $r_s$  che soddisfi l'Equazione 2.36 è di enorme importanza nella caratterizzazione del flusso di accrescimento. Infatti, da un punto di vista matematico, il fatto che per  $r = r_s$  il membro di destra di (2.34) si annulli implica che anche il membro di destra deve annullarsi per  $r = r_s$ . Questo significa che devono valere le relazioni

$$v^2 = c_s^2 \quad \text{per } r = r_s \quad (2.38)$$

oppure (non necessariamente contemporaneamente)

$$\frac{d}{dr}(v^2) = 0 \quad \text{per } r = r_s \quad (2.39)$$

Tutte le soluzioni di (2.34) possono ora essere classificate in termini del loro comportamento a  $r = r_s$ , dato dalle condizioni (2.38) o (2.39), insieme con il loro comportamento per grandi  $r$ , come (2.35). Questo è molto semplice da vedere se grafichiamo  $v^2(r)/c_s^2(r) \equiv \mathcal{M}^2$  in funzione di  $r$  (vedi Figura 2.1), da cui è chiaro che esistono sei distinte famiglie di soluzioni

$$\text{Tipo 1: } v^2(r_s) = c_s^2(r_s) \quad v^2 \rightarrow 0 \text{ per } r \rightarrow \infty \\ (v^2 < c_s^2, r > r_s; \quad v^2 > c_s^2, r < r_s)$$

$$\text{Tipo 2: } v^2(r_s) = c_s^2(r_s) \quad v^2 \rightarrow 0 \text{ per } r \rightarrow 0 \\ (v^2 > c_s^2, r > r_s; \quad v^2 < c_s^2, r < r_s)$$

$$\text{Tipo 3: } v^2(r_s) < c_s^2(r_s) \text{ dappertutto,} \quad \frac{d}{dr}(v^2) = 0 \text{ per } r = r_s$$

$$\text{Tipo 4: } v^2(r_s) > c_s^2(r_s) \text{ dappertutto,} \quad \frac{d}{dr}(v^2) = 0 \text{ per } r = r_s$$

$$\text{Tipo 5: } \frac{d}{dr}(v^2) = \infty \text{ per } v^2 = c_s^2(r_s); \quad r > r_s \text{ sempre}$$

$$\text{Tipo 6: } \frac{d}{dr}(v^2) = \infty \text{ per } v^2 = c_s^2(r_s); \quad r < r_s \text{ sempre}$$

Esiste solamente una soluzione del Tipo 1 e Tipo 2: queste soluzioni sono dette *transoniche*, in quanto rappresentano la transizione tra un flusso subsonico ad un flusso supersonico. Soluzioni di Tipo 3 e Tipo 4 rappresentano un flusso che è ovunque subsonico e supersonico, rispettivamente.

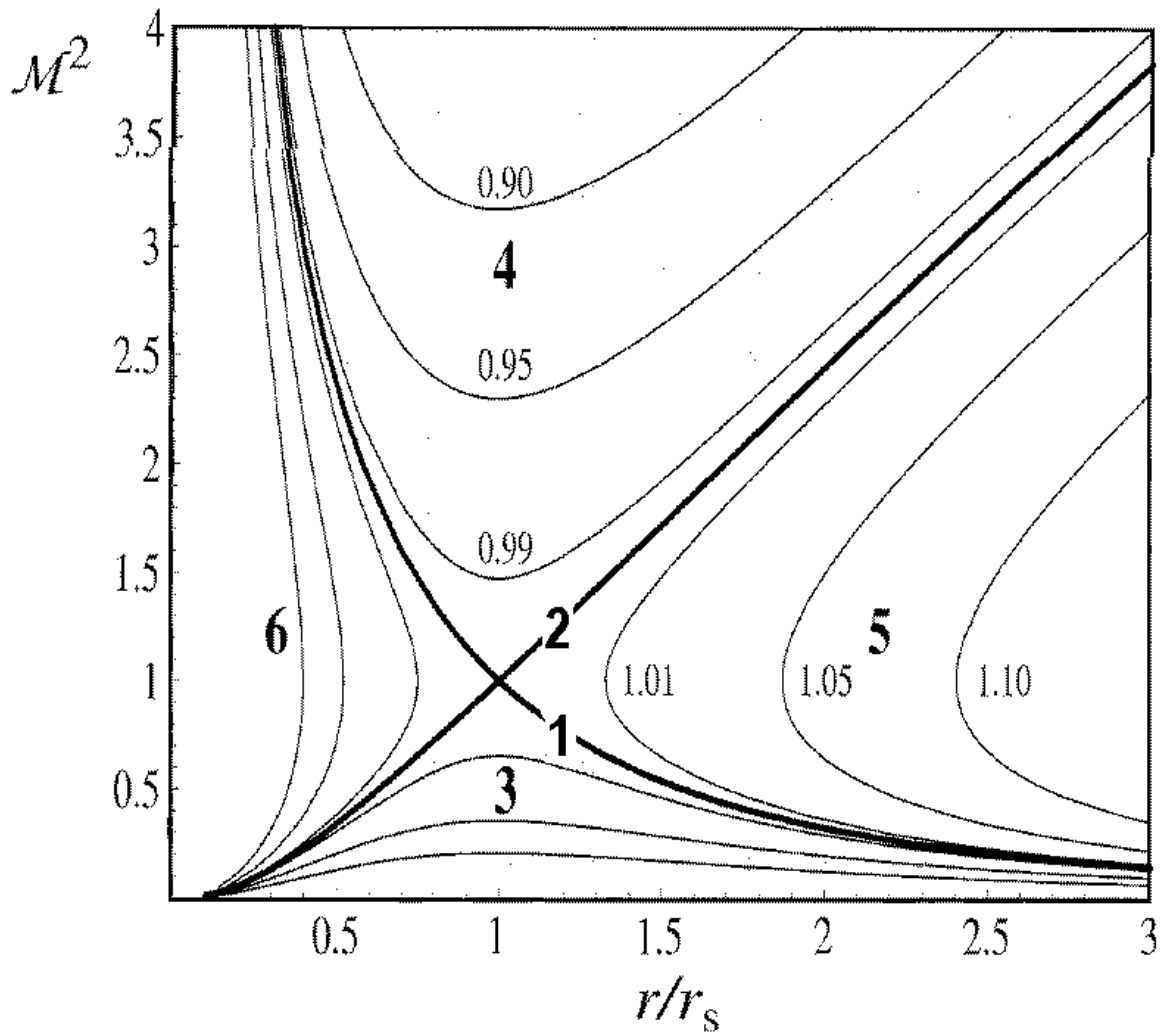


Figura 2.2: Numero di Mach al quadrato  $M^2 = v^2(r)/c_s^2(r)$  in funzione della distanza  $r/r_s$  per un flusso di gas adiabatico, in accrescimento a simmetria sferica, nel campo gravitazionale di una stella. Nel caso  $v < 0$  abbiamo flussi in accrescimento, mentre per  $v > 0$  abbiamo venti o “brezze” stellari. Le due soluzioni transoniche di Tipo 1 e Tipo 2, indicate da una linea spessa, dividono le rimanenti soluzioni in famiglie, come descritto nel testo.

Soluzioni di Tipo 5 e Tipo 6 non ammettono tutti i valori di  $r$  e per ogni valore di  $r$  esistono due possibili valori di  $v^2$ . Per questi motivi escludiamo questo tipo di soluzioni del nostro problema. Soluzioni di Tipo 2 e Tipo 4 sono da escludersi perché sono supersoniche per grandi  $r$ , in violazione alla condizione (2.35), mentre il Tipo 3 è subsonica per piccoli  $r$ , violando quindi la condizione (2.37).

Una soluzione di Tipo 2 con  $v > 0$  descrive un vento stellare (si noti che (2.34) non cambia per  $v \rightarrow -v$ ). Soluzioni di Tipo 3 con  $v > 0$  rappresentano la cosiddetta "brezza stellare", in cui il flusso è ovunque subsonico. Se  $v < 0$  allora abbiamo una atmosfera che sta lentamente decadendo.

Ci è quindi rimasta la soluzione di Tipo 1: questa possiede tutte le proprietà che abbiamo richiesto ed è l'unica soluzione del nostro problema. La condizione al punto sonico (2.38) ci permetterà di collegare il tasso di accrescimento  $\dot{M}$  con la condizione all'infinito.

Una volta risolto il problema della unicità della soluzione, integriamo l'Equazione 2.31 utilizzando l'equazione di stato politropica (2.32) per passare da  $p$  a  $\rho$ :

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} - \frac{GM}{r} = \text{costante}$$

Dalla Eq. 2.32 abbiamo che  $dP = K\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho$ , quindi per  $\gamma \neq 1$  otteniamo

$$\frac{v^2}{2} + \frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \text{costante}$$

Dato però che  $K\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma P/\rho = c_s^2$  otteniamo il cosiddetto *integrale di Bernoulli*:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_s^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \text{costante} \quad (2.40)$$

Nel caso di un flusso isotermico ( $\gamma = 1$ ) si ottiene un integrale logaritmico. Per la proprietà fisica della nostra soluzione (Tipo 1) dobbiamo avere che  $v^2 \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ , quindi la costante in (2.40) deve essere  $c_s^2(\infty)/(\gamma-1)$ , dove  $c_s^2(\infty)$  è la velocità del suono nel gas a grande distanza dalla stella. La condizione al punto sonico (2.36) mette in relazione  $c_s^2(\infty)$  con  $c_s^2(r_s)$

$$c_s^2(r_s) \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma-1} - 2 \right] = \frac{c_s^2(\infty)}{\gamma-1}$$

che può essere riscritta come

$$c_s(r_s) = c_s(\infty) \left( \frac{2}{5-3\gamma} \right)^{1/2} \quad (2.41)$$

Riprendendo l'equazione di continuità (2.30) abbiamo che

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(-v) = 4\pi r_s^2 \rho(r_s) c_s(r_s) \quad (2.42)$$

dato che  $\dot{M}$  è indipendente da  $r$ . Usando il fatto che  $c_s^2 \propto \rho^{\gamma-1}$ , abbiamo che

$$\rho(r_s) = \rho(\infty) \left[ \frac{c_s(r_s)}{c_s(\infty)} \right]^{2/(\gamma-1)}$$

Mettendo questa relazione, insieme alla (2.42) nella (2.41) otteniamo la relazione tra il tasso di accrescimento  $\dot{M}$  e le condizioni all'infinito:

$$\dot{M} = \pi G^2 M^2 \frac{\rho(\infty)}{c_s^3(\infty)} \left[ \frac{2}{5-3\gamma} \right]^{(5-3\gamma)/2(\gamma-1)} \quad (2.43)$$

Si noti come la dipendenza da  $\gamma$  sia molto debole: infatti il fattore  $[2/(5-3\gamma)]^{(5-3\gamma)/2(\gamma-1)}$  varia tra 1 per  $\gamma = 5/3$  a  $e^{3/2} \simeq 4.5$  per  $\gamma = 1$ . Per un valore tipico di  $\gamma = 1.4$  il fattore vale 2.5.

L'equazione 2.43 ci dice che è difficile che l'accrescimento dal mezzo interstellare sia un fenomeno osservabile. Infatti per  $c_s(\infty) = 10 \text{ Km sec}^{-1}$ ,  $\rho(\infty) = 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$ , corrispondenti ad una temperatura di  $10 \text{ K}$  ed una densità numerica di 1 particella per  $\text{cm}^3$ , abbiamo

$$\dot{M} \simeq 1.4 \cdot 10^{11} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left( \frac{\rho(\infty)}{10^{-24} \text{ g cm}^{-3}} \right) \left( \frac{c_s(\infty)}{10 \text{ Km sec}^{-1}} \right)^{-3} \text{ g sec}^{-1} \quad (2.44)$$

La luminosità di accrescimento in questo caso sarebbe di  $2 \cdot 10^{31} \text{ erg sec}^{-1}$ , che ad una distanza tipica di 1 kpc corrisponde ad un flusso troppo basso per essere osservabile.

Vediamo ora di completare la soluzione scrivendo tutte le quantità in funzione di  $r$ . In primo luogo, possiamo ricavare  $v(r)$  in termini di  $c_s(r)$  dalla (2.42)

$$(-v) = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 \rho(r)} = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 \rho(\infty)} \left[ \frac{c_s(\infty)}{c_s(r)} \right]^{2/(\gamma-1)}$$

Sostituendo questa relazione nell'integrale di Bernoulli (2.40) otteniamo una relazione algebrica per  $c_s(r)$ , da cui poi ci si può ricavare  $v(r)$  e  $\rho(r)$ . In pratica però questa equazione può essere risolta soltanto numericamente. Un andamento generale della soluzione può però essere ricavato studiando l'integrale di Bernoulli. Per grandi distanze la forza gravitazionale della stella è debole e tutte le quantità avranno i loro valori "ambientali" ( $\rho(\infty)$ ,  $c_s(\infty)$  e  $v \simeq 0$ ). Mano a mano che ci si avvicina alla stella, la velocità del flusso del gas aumenta fino a quando  $-v$  raggiunge  $c_s(\infty)$ , la velocità del suono all'infinito. L'unico termine in (2.40) capace di bilanciare questo aumento è il termine gravitazionale  $GM/r$ .

Dato che  $c_s(r)$  non è molto più grande di  $c_s(\infty)$ , questo deve accadere ad una distanza

$$r \simeq r_{\text{acc}} = \frac{2GM}{c_s(\infty)^2} \simeq 3 \cdot 10^{14} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \left( \frac{10^4 \text{ K}}{T(\infty)} \right) \text{ cm} \quad (2.45)$$

In questo punto  $\rho(r)$  e  $c_s(r)$  iniziano ad aumentare al di sopra dei valori ambientali. Al punto sonico  $r = r_s$  il flusso diventa supersonico ed il gas è in caduta libera. Infatti la relazione  $v^2 \gg c_s^2$  sostituita nell'integrale di Bernoulli diventa

$$v^2 \simeq \frac{2GM}{r} = v_{\text{ff}}$$

L'equazione di continuità ci permette di scrivere

$$\rho \simeq \rho(r_s) \left(\frac{r_s}{r}\right)^{3/2} \quad \text{per } r \lesssim r_s$$

Infine possiamo, in linea di principio, ottenere la temperatura usando l'equazione di stato poliotropica

$$T \simeq T(r_s) \left(\frac{r_s}{r}\right)^{3(\gamma-1)/2} \quad \text{per } r \lesssim r_s$$

Si noti però che l'aumento di  $T$  al diminuire di  $r$  predetto da questa equazione è probabilmente non realistico.

Il raggio  $r_{\text{acc}}$  definito dall'Equazione 2.45 ha una semplice interpretazione: ad un dato raggio  $r$  il rapporto tra l'energia interna (termica) e l'energia di legame gravitazionale di un elemento di gas di massa  $m$  è

$$\frac{\text{Energia termica}}{\text{Energia gravitazionale}} \sim \left(\frac{1}{2} m c_s^2(r)\right) \left(\frac{r}{GMm}\right) \sim \frac{r}{r_{\text{acc}}} \quad \text{per } r \gtrsim r_{\text{acc}}$$

dato che  $c_s(r) \sim c_s(\infty)$  per  $r > r_{\text{acc}}$ . Quindi, per  $r \gg r_{\text{acc}}$  la forza gravitazionale della stella non influenza il gas. La distanza  $r_{\text{acc}}$  viene detta *raggio di accrescimento*.

Si noti come la relazione (2.43) che fornisce il tasso di accrescimento in funzione delle condizioni all'infinito può essere scritta come

$$\dot{M} \sim \pi r_{\text{acc}}^2 c_s(\infty) \rho(\infty) \quad (2.46)$$

Ricapitoliamo le conclusioni a cui siamo pervenuti studiando il caso (particolare) di accrescimento stazionario a simmetria sferica:

- ① Il tasso di accrescimento stazionario  $\dot{M}$  è determinato dalle condizioni "ambientali" all'infinito (Equazione 2.43) e da una condizione al contorno (ad esempio (2.37)). L'accrescimento diretto dal mezzo interstellare da parte di stelle di neutroni isolate comporta un valore di  $\dot{M}$  troppo piccolo per avere conseguenze osservabili.
- ② Il comportamento del gas subisce l'influenza della forza gravitazionale solamente all'interno del raggio di accrescimento  $r_{\text{acc}}$ .
- ③ Un flusso di accrescimento stazionario con  $\dot{M}$  maggiore o uguale al valore dato da (2.43) **deve** possedere un punto sonico, cioè la velocità del gas in accrescimento **deve** diventare supersonica vicino alla superficie della stella.

L'immediata conseguenza del punto ③ è che, dato che la materia accresciuta deve arrivare alla superficie della stella con una velocità piccola, deve esistere una maniera di frenare il flusso supersonico. Questo però ci conduce nel campo di dominio della fisica del plasma, dato che dovremo tenere conto del comportamento del gas su lunghezze-scala comparabili con il libero cammino medio tra le collisioni.



# Capitolo 3

## Teoria Cinetica del Plasma

### 3.1 Definizione di plasma

Un plasma consiste in una miscela di due gas di particelle elettricamente cariche: un gas di elettroni ed un gas di ioni, con masse delle particelle molto differenti  $m_e$  e  $m_i$ .

Gli elettroni e gli ioni interagiscono tra di loro attraverso forze di Coulomb attrattive e repulsive. Queste forze decrescono molto lentamente ( $\propto r^{-2}$ ) con la distanza e non possiedono una lunghezza-scala caratteristica. Quindi una particella di plasma interagisce contemporaneamente con tutte le altre, e questo rende la descrizione delle collisioni molto complessa. Una ulteriore complicazione è dovuta alla grande differenza di massa tra elettroni e ioni. Dato che le collisioni tra particelle di massa molto diversa riescono a trasferire solamente una piccola frazione dell'energia cinetica, è possibile che gli ioni e gli elettroni possiedano una temperatura molto diversa su tempi-scala lunghi.

### 3.2 Neutralità di carica, oscillazioni di plasma e lunghezza di Debye

Vediamo ora di esaminare in dettaglio le conseguenze del carattere a lungo raggio della forza di Coulomb tra particelle cariche.

Innanzitutto abbiamo che la densità numerica di ioni ed elettroni in ogni punto deve essere approssimativamente uguale, e quindi il plasma deve sempre essere vicino alla neutralità di carica. Infatti anche un piccolo eccesso di carica risulterebbe in un campo elettrico molto grande che farebbe muovere le particelle in modo da ristabilire molto velocemente la neutralità.

Supponiamo che ci sia un eccesso di carica di 1% in una sfera di raggio  $r$  in un plasma di densità numerica  $N$ . Allora gli elettroni che si trovano vicino al bordo della sfera risentiranno di un campo elettrico  $\mathbf{E}$  e di una accelerazione

$$\dot{v} = \frac{e|\mathbf{E}|}{m_e} \simeq \frac{4\pi r^3}{3m_e} \frac{N}{100} \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]r^2}$$

dove  $(-e)$  è la carica di un elettrone.

Per una sfera di raggio  $r = 1$  cm in un tipico plasma astrofisico con  $N = 10^{10}$  particelle per  $\text{cm}^3$  abbiamo che  $\dot{v} \sim 10^{17} \text{ cm sec}^{-2}$ , e quindi gli elettroni impiegherebbero  $3 \cdot 10^{-9}$  sec a ristabilire la neutralità. Infatti essi si muoverebbero così velocemente da indurre *oscillazioni* nel plasma. Dato che tutti i plasmi sono soggetti a piccole perturbazioni che tendono a disturbare la neutralità di carica (ad esempio il passaggio di radiazione elettromagnetica, o il moto termico delle particelle del plasma stesso), la frequenza naturale di queste oscillazioni è una grandezza fondamentale chiamata **frequenza di plasma**.

Per determinarla consideriamo un plasma uniforme con un piccolo eccesso di elettroni in qualche (piccola) regione. Assumiamo che gli ioni abbiano in media una carica  $Ze \simeq e$ , e che le densità numeriche di ioni ed elettroni siano, rispettivamente

$$N_i \simeq N_0 \quad N_e = N_0 + N_1(\mathbf{r}, t)$$

con  $N_1 \ll N_0$  e  $N_1 = 0$  al di fuori della nostra piccola regione.

L'eccesso di carica  $N_1$  dà luogo ad un campo elettrico  $\mathbf{E}$  dato dalla legge di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{[4\pi\epsilon_0]} N_1 e \quad (3.1)$$

Questo campo elettrico provoca il movimento delle particelle. Dato che  $m_i \gg m_e$  possiamo trascurare il moto degli ioni. Gli elettroni si muoveranno come un fluido ed ubbidiranno alle equazioni di conservazione. Dato che  $N_1$  è assunto piccolo, possiamo trascurare il termine  $(\mathbf{v}_e \cdot \nabla)\mathbf{v}_e$  nell'equazione di Eulero, che così diventa

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -e\mathbf{E} \quad (3.2)$$

L'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot (N_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (3.3)$$

che, trascurando prodotti di piccole quantità, diventa

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + N_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_e = 0 \quad (3.4)$$

Possiamo eliminare  $\mathbf{v}_e$  da queste equazioni prendendo la divergenza della (3.2) e la derivata rispetto al tempo della (3.4) e sottraendo

$$\frac{1}{N_0} \frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2} - \frac{e}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Usando l'equazione di Maxwell (3.1) per eliminare  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  otteniamo

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2} + \left\{ \frac{4\pi}{[4\pi\epsilon_0]} \frac{N_0 e^2}{m_e} \right\} N_1 = 0$$

Perciò l'eccesso di carica  $N_1$  oscilla con frequenza di plasma



$$\omega_p = \left\{ \frac{4\pi}{[4\pi\epsilon_0]} \frac{N_0 e^2}{m_e} \right\}^{1/2} \quad (3.5)$$

Da un punto di vista numerico, con  $N_0$  misurato in  $\text{cm}^{-3}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \omega_p &= 5.7 \cdot 10^4 N_0^{1/2} \text{ rad sec}^{-1} \\ \nu_p &= \frac{\omega_p}{2\pi} = 9.0 \cdot 10^3 N_0^{1/2} \text{ Hz} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Un plasma è opaco alla radiazione elettromagnetica di frequenza  $\nu < \nu_p$  perché le oscillazioni del plasma sono più rapide delle variazioni nel campo elettromagnetico, e gli elettroni del plasma si muovono “cancellando” la radiazione. Per la ionosfera della Terra abbiamo che  $N_0 \simeq 10^6 \text{ cm}^{-3}$ , quindi onde radio di frequenza minore di circa  $10^7 \text{ Hz}$  non possono penetrarla e quindi sono riflesse.

Associato al tempo-scala  $\nu_p^{-1}$  delle oscillazioni di carica deve esistere una grandezza-scala  $l$  che definisce su quali distanze il campo elettrico viene generato dall'eccesso di carica  $N_1$ . Possiamo calcolarlo, come ordine di grandezza, valutando le derivate come

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \omega_p, \quad \nabla \sim \frac{1}{l}$$

Dall'equazione (3.3) otteniamo quindi

$$l \sim \frac{v_e}{\omega_p} \quad (3.7)$$

Quindi il campo elettrico  $E$  generato dall'eccesso di carica  $N_1$  è limitato ad una distanza-scala  $l$  dall'effetto di schermo degli elettroni.

Dato che anche un plasma non perturbato sarà soggetto a piccole fluttuazioni di carica dovute al moto termico degli elettroni, esisterà una distanza di schermo, detta **lunghezza di Debye**  $\lambda_{\text{Deb}}$ , che otteniamo ponendo nell'espressione della velocità degli elettroni in (3.7)  $v_e \sim (kT_e/m_e)^{1/2}$ , dove  $T_e$  è la temperatura degli elettroni

$$\lambda_{\text{Deb}} = \left\{ \frac{[4\pi\epsilon_0] kT_e}{4\pi N_0 e^2} \right\}^{1/2} \quad (3.8)$$

Numericamente, con  $N_0$  misurato in  $\text{cm}^{-3}$  e  $T_e$  in K

$$\lambda_{\text{Deb}} \simeq 7 \left( \frac{T_e}{N_0} \right)^{1/2} \text{ cm} \quad (3.9)$$

L'importanza di  $\lambda_{\text{Deb}}$  risiede nel fatto che questa distanza ci fornisce la lunghezza-scala su cui può esistere un sostanziale eccesso di carica; quindi ci fornisce la portata delle collisioni Coulombiane nel plasma.

Affinché la nostra trattazione del plasma sia consistente è necessario che il numero di particelle coinvolte nell'oscillazione sia grande, ed inoltre che le grandezze fisiche del plasma non subiscano variazioni apprezzabili su grandezze-scala  $l$  molto minori della lunghezza di Debye:

$$N_e \lambda_{\text{Deb}}^3 \gg 1 \quad l \gg \lambda_{\text{Deb}} \quad (3.10)$$

Se queste condizioni non sono soddisfatte, allora possiamo trattare il gas come un sistema di particelle indipendenti e trascurare così i cosiddetti "effetti collettivi".

### 3.3 Collisioni Coulombiane

Consideriamo ora collisioni Coulombiane tra particelle del plasma. Dato che queste collisioni coinvolgono l'accelerazione di particelle cariche, verrà prodotta radiazione elettromagnetica a spese dell'energia cinetica delle due particelle. Comunque si può dimostrare come questi due tassi di perdita di energia (per radiazione e per collisione) di una particella che si muove a velocità  $v$  stanno nel rapporto

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{coll}}} \lesssim \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]\hbar c} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim \frac{1}{137} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1 \quad (3.11)$$

dove  $e^2/[4\pi\epsilon_0]\hbar c$  è la costante di struttura fine. Quindi la perdita di energia per radiazione durante una collisione è trascurabile e quindi possiamo considerare l'urto come *elastico*. Il nostro problema quindi consiste nel descrivere l'urto tra due particelle cariche  $e_1$  ed  $e_2$  che interagiscono via forza di Coulomb  $e_1 e_2 / [4\pi\epsilon_0] r^2$  ad una certa distanza  $r$ .

Il modo più semplice per trattare il problema di urto tra due particelle è quello di porci nel sistema di riferimento (SdR) del centro di massa. Se le velocità iniziali delle due particelle nel SdR del laboratorio sono  $v_1$  e  $v_2$ , ed esse hanno massa  $m_1$  e  $m_2$ , il SdR del centro di massa avrà velocità

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.12)$$

In questo SdR le particelle incidenti hanno momento della quantità di moto uguale in modulo ed opposto in segno  $\pm mv$ , e la loro energia cinetica totale è  $\frac{1}{2}mv^2$ , dove abbiamo definito

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (3.13)$$

Dato che la forza di Coulomb ubbidisce ad una legge dell'inverso del quadrato della distanza, le traiettorie delle particelle in collisione nel SdR del centro di massa saranno iperboli, che possono essere caratterizzate da un parametro di impatto  $b$ . Dato che l'urto è elastico, sia le velocità che le energie delle particelle rimangono inalterate: si ha soltanto una deflessione di traiettoria.

L'angolo di deflessione  $\theta$  sarà apprezzabile, diciamo dell'ordine di  $90^\circ$ , per un certo valore del parametro di impatto, che indicheremo con  $b_0$ , tale per cui l'energia cinetica e l'energia potenziale siano comparabili al momento di massimo avvicinamento:

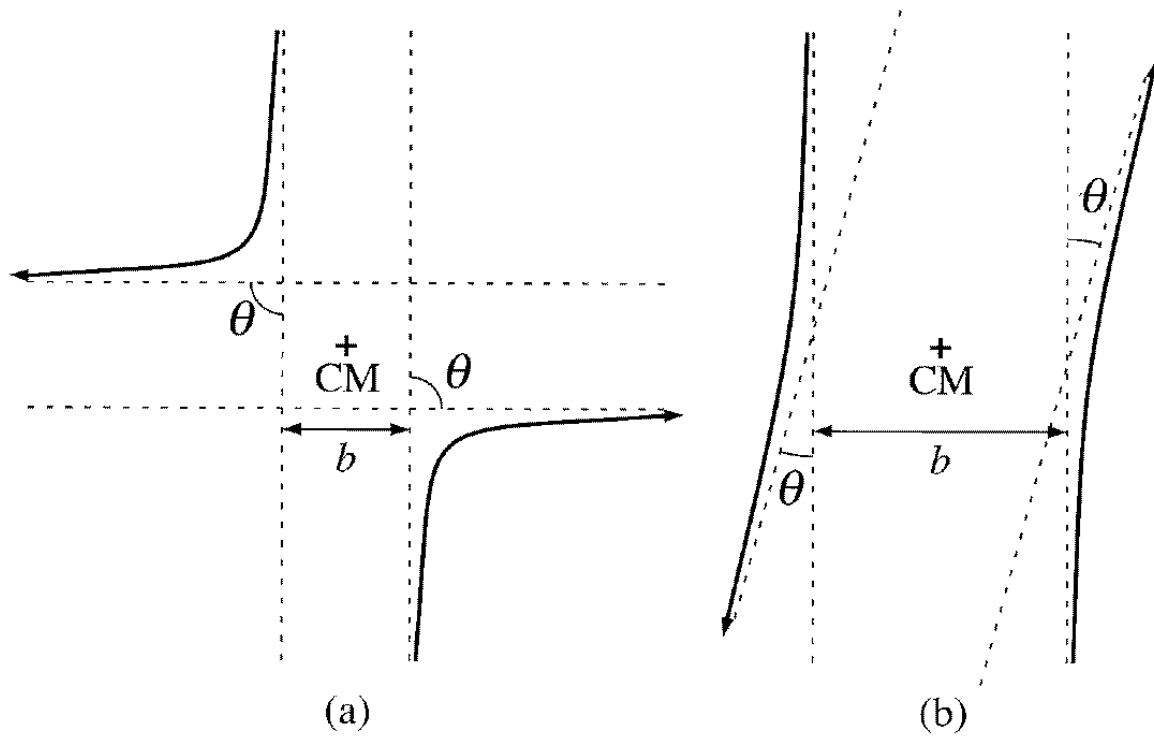


Figura 3.1: Collisioni Coulombiane di due particelle di stessa carica (in questo caso positiva) e stessa massa: (a) collisione ravvicinata; (b) collisione distante. Il parametro di impatto  $b$  prima e dopo l'urto rimane lo stesso per la conservazione della quantità di moto.

$$\frac{e_1 e_2}{[4\pi\epsilon_0]b_0} \sim \frac{1}{2}mv^2 \sim kT \quad (3.14)$$

dove l'ultima eguaglianza vale per particelle termalizzate. Per  $b \gg b_0$  allora  $\theta \sim e_1 e_2 / [4\pi\epsilon_0] b m v^2$  che è molto piccolo.

Nel caso di gas atomico o molecolare  $b_0$  dà una misura, per ordine di grandezza, delle dimensioni delle particelle del gas, e definisce quindi una sezione d'urto

$$\sigma_{\perp} = \pi b_0^2 = \frac{\pi}{[4\pi\epsilon_0]^2} \frac{e_1^2 e_2^2}{(kT)^2} \quad (3.15)$$

Per una densità numerica del gas  $N$ , il libero cammino medio  $\lambda_{\perp}$  tra collisioni sarà

$$\lambda_{\perp} = \frac{1}{N\sigma_{\perp}} \simeq \frac{[4\pi\epsilon_0]^2}{\pi N} \left( \frac{kT}{e_1 e_2} \right)^2 \quad (3.16)$$

Infatti, per la definizione di  $\lambda_{\perp}$ , abbiamo che lungo  $\lambda_{\perp}$  non avvengono collisioni, quindi il volume  $\lambda_{\perp} \cdot \sigma_{\perp}$  può contenere solamente una particella (altrimenti ci sarebbero collisioni!), quindi  $\lambda_{\perp} \cdot \sigma_{\perp} = 1/N$ , da cui la (3.16). Mettendo i valori numerici delle costanti, per  $e_1 = e_2 = e$  abbiamo

$$\lambda_{\perp} \simeq 7 \cdot 10^5 \frac{T^2}{N} \text{ cm} \quad (3.17)$$

Ad ogni istante, ogni particella carica deve interagire elettrostaticamente con le particelle del plasma contenute in una sfera di raggio  $\lambda_{\text{Deb}}$ . Questi urti lontani producono però solamente piccole deflessioni, dato che

$$\frac{\lambda_{\text{Deb}}}{b_0} \sim \frac{[4\pi\epsilon_0]kT\lambda_{\text{Deb}}}{e^2} \sim 4\pi N_0 \lambda_{\text{Deb}}^3 \gg 1$$

avendo usato (3.8) e (3.10). D'altro canto, ci sono così tante particelle in una sfera di Debye che l'effetto cumulativo dell'insieme di tutte le collisioni distanti è maggiore di quello degli incontri ravvicinati per  $b \sim b_0$ . Dato che questo è un punto importante, studiamo in dettaglio il caso in cui le particelle in interazione abbiano tutte la stessa massa  $m_1 \sim m_2 \sim m$  (ad esempio il caso di urti elettrone-elettrone o ione-ione). Allora ogni particella avrà una velocità iniziale  $\sim v$ , ed in un urto distante la sua velocità aumenterà di

$$\Delta v_b \sim v\theta \sim \frac{e_1 e_2}{[4\pi\epsilon_0]m v b}$$

in una direzione ortogonale alla sua direzione di moto originale.

Poiché le particelle hanno la stessa massa, così come le stesse velocità (termiche) iniziali, allora possiamo metterci nel SdR del laboratorio (ma questo **non è vero nel caso più generale!**).

Per calcolare l'effetto totale di tutti gli urti distanti nel deviare una data particella sarà necessario sommare in maniera opportuna gli incrementi  $\Delta v_b$  su tutti i possibili valori di  $b$ . Dato che  $\Delta v_b$  può essere sia positivo che negativo, a seconda delle condizioni iniziali, è meglio considerare il suo quadrato.

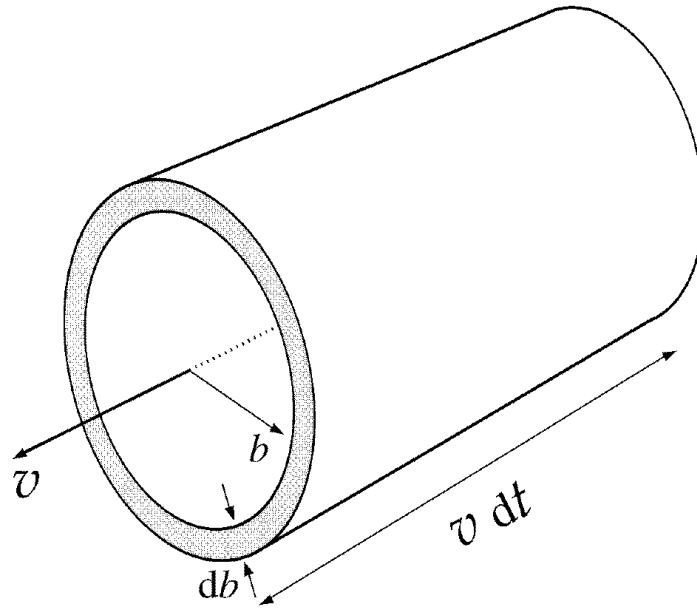


Figura 3.2: Definizione della geometria nel caso urti Coulombiani di una particella di plasma di velocità  $v$ .

Consideriamo ora un guscio cilindrico (si veda Figura 3.2) contenente  $N$  particelle nel volume  $2\pi b db v dt$ , dove  $dt$  è il tempo in cui una data particella “urta” con parametro di impatto  $b$  le  $N$  particelle.

Allora, il tasso di variazione di  $(\Delta v)^2$  sarà

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta v)^2}{dt} &\sim N v \int (\Delta v_b)^2 2\pi b db \\ &= \frac{2\pi N e_1^2 e_2^2}{[4\pi\epsilon_0]^2 m^2 v} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

dove  $b_{\max}$  e  $b_{\min}$  sono il valore più grande e più piccolo di  $b$  che contribuiscono all'integrale, e di cui stabiliremo più tardi i valori.

Per potere stabilire l'importanza relativa degli urti con parametro di impatto grande e piccolo, è necessario associare un libero cammino medio al cambio di velocità (3.18), per poterlo poi confrontare con  $\lambda_{\perp}$ . A questo scopo definiamo un *tempo di deviazione*

$$t_d = \frac{v^2}{d(\Delta v)^2/dt} = \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m^2 v^3}{2\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \quad (3.19)$$

dove abbiamo usato la notazione standard  $\Lambda = b_{\max}/b_{\min}$ . Dalla sua definizione, il tempo di deviazione misura il tempo che intercorre prima che una particella del plasma di velocità  $v$  venga deviata in maniera significativa dalla sua traiettoria iniziale.

Associata al tempo di deviazione  $t_d$  viene definita la *lunghezza di deviazione*  $\lambda_d$

$$\lambda_d = vt_d = \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m^2 v^4}{2\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \quad (3.20)$$

Confrontando Eq. 3.20 con (3.16), ed usando il fatto che  $mv^2 \sim kT$ , troviamo che

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_d} \sim \ln \Lambda \quad (3.21)$$

Quindi, urti distanti e a piccole deflessioni dominano urti ravvicinati e a grandi angoli se  $\ln \Lambda > 1$ . Vedremo ora che  $\ln \Lambda$ , detto *logaritmo di Coulomb* è normalmente dell'ordine di 10–20, e quindi tra tutte le possibili collisioni sono quelle a piccoli angoli che danno il contributo maggiore. Innanzi tutto, dato che siamo interessati al logaritmo di  $\Lambda$ , sarà sufficiente ottenere una stima di  $\Lambda$ , senza dover entrare troppo nel dettaglio. Come primo tentativo, potremmo prendere per  $b_{\min}$  la distanza di massimo avvicinamento  $b_0$  data dall'Eq. 3.14.

Bisogna però stare attenti a non violare il principio di indeterminazione, secondo il quale non è possibile conoscere simultaneamente la posizione ed il momento di una particella con incertezze minori di  $\Delta x$  e  $\Delta p$  tali che

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

Quindi non possiamo porre  $b_{\min} = b_0$  se quest'ultimo è minore di

$$b_{\min}(MQ) \sim \frac{\hbar}{\Delta p} \sim \frac{\hbar}{mv} \quad (3.22)$$

dove abbiamo usato  $\Delta p \sim mv$ . Equazione 3.22 dà  $b_{\min}$  come la lunghezza d'onda di de Broglie di una particella di momento  $mv$ . In generale, quindi, avremo che

$$b_{\min} = \max \left\{ \frac{\hbar}{mv}, \frac{2e_1 e_2}{[4\pi\epsilon_0]mv^2} \right\} \quad (3.23)$$

quindi  $b_{\min}$  avrà il suo valore classico  $b_0$  a meno che

$$v \lesssim \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]\hbar c} c = \frac{c}{137} \quad (3.24)$$

Per ricavarci una stima di  $b_{\max}$  ricordiamoci che il plasma reagisce a perturbazioni nella carica in un tempo caratteristico  $1/\nu_p$  (dato da Eq. 3.6). Quindi, il plasma riesce a schermare il campo Coulombiano di ogni particella il cui tempo di interazione  $\sim b/v$  sia maggiore di  $1/\nu_p$ . Quindi possiamo ragionevolmente porre

$$b_{\max} = \frac{v}{\nu_p}$$

Ovviamente, se  $v$  è la velocità termica degli elettroni  $v_e$ , otteniamo

$$b_{\max} = \lambda_{\text{Deb}}$$

come deve essere. Dato che per plasmi astrofisici le particelle hanno  $mv^2 \sim kT$ , allora il logaritmo di Coulomb avrà valore

$$\ln \Lambda = \ln \left( \frac{\lambda_{\text{Deb}}}{b_0} \right)$$

che può essere scritta, utilizzando l'espressione numerica per  $\lambda_{\text{Deb}}$  data da Eq. 3.9

$$\ln \Lambda \simeq 10 + 3.45 \log T - 1.15 \log N_e \quad (3.25)$$

con  $N_e$  misurato in  $\text{cm}^{-3}$ . E' facile verificare come  $\ln \Lambda$  sia nell'intervallo 10–20 per plasmi di interesse astrofisico. Questo quindi dimostra come l'effetto di molti urti deboli e distanti sia più importante di urti forti e ravvicinati.

Si noti inoltre come  $\ln \Lambda$  sia estremamente insensibile agli errori sulle stime di  $b_{\text{min}}$  e  $b_{\text{max}}$ : se  $\ln \Lambda = 15$ , allora anche un errore su  $\Lambda$  di un fattore 100 produce  $\ln \Lambda$  nell'intervallo 10–20. Quindi (3.25) dà una stima ragionevole, anche se (3.24) non dovesse essere soddisfatta.

### 3.4 Plasmi termici: tempo di rilassamento e libero cammino medio

Vediamo ora di applicare i nostri risultati sugli urti tra particelle ad un plasma in cui le particelle hanno velocità termiche. Per semplificare non effettueremo la somma su tutte le possibili velocità delle particelle che contribuiscono agli urti, ma **porremo**  $mv^2 \sim kT$ . Questo ci fornirà il corretto ordine di grandezza per  $\lambda_d$ , la lunghezza di deviazione definita in (3.20).

E' bene evidenziare come, in generale, sia necessaria una analisi dell'evoluzione temporale della distribuzione di velocità risolvendo l'equazione di Fokker-Planck. Questo è particolarmente vero per la determinazione del tempo di scambio energetico  $t_E$  nel caso di particelle veloci (sopratermiche) che vedremo nel seguito.

Comunque, ponendo  $mv^2 \sim kT$  nella (3.20) abbiamo che per particelle di massa comparabile

$$\lambda_d \simeq \frac{7 \cdot 10^5}{\ln \Lambda} \frac{T^2}{N} \text{ cm} \quad (3.26)$$

Una importante proprietà di (3.26) è la sua indipendenza dalla massa delle particelle, quindi la distanza media attraversata prima che la particella subisca un urto è la stessa per gli elettroni e per gli ioni. Questo però non è vero per il tempo di deviazione: infatti il tempo di deviazione  $t_d(\text{e-e})$  per elettroni con elettroni è  $\sqrt{m_p/m_e} \sim 43$  volte più breve di quello di ioni con ioni, ma questo è compensato dalla maggiore velocità degli elettroni.

Nel caso di particelle con masse diverse (come nel caso di urti elettroni con ioni), si può dimostrare che le equazioni (3.19) e (3.20) valgono ancora con  $m$  dell'ordine della massa più piccola e  $v$  dell'ordine della velocità termica più grande. Quindi, nel caso di urti elettrone-ione avremo  $m \sim m_e$  e  $v \sim (kT/m_e)^{1/2}$

$$t_d(\mathbf{e}-\mathbf{i}) \sim \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m_e^{1/2} (kT)^{3/2}}{2\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \sim t_d(\mathbf{e}-\mathbf{e}) \quad (3.27)$$

Quindi gli urti elettrone-ione avvengono allo stesso tasso degli urti elettrone-elettrone. Può essere utile, a questo punto, definire una frequenza d'urto (elettronica)

$$\nu_c \sim \frac{1}{t_d(\mathbf{e}-\mathbf{i})} \simeq 2 \ln \Lambda Z^2 N_e T^{-3/2} \text{ sec}^{-1} \quad (3.28)$$

con  $N_e$  misurato in  $\text{cm}^{-3}$  e  $Z$  la carica media degli ioni. Analogamente definiamo la frequenza d'urto ione-ione

$$\nu_c(\mathbf{i}-\mathbf{i}) \sim \frac{1}{t_d(\mathbf{i}-\mathbf{i})} \simeq 5 \cdot 10^{-2} \ln \Lambda Z^4 N_e T^{-3/2} \text{ sec}^{-1} \quad (3.29)$$

Finora abbiamo considerato soltanto *deflessioni* delle traiettorie di particelle del plasma: il tempo-scala  $t_d$  dà una misura approssimata del tempo necessario affinché una distribuzione di velocità inizialmente anisotropa venga resa isotropa (termalizzazione). Alla fine però ogni distribuzione iniziale di velocità deve tendere alla distribuzione di equilibrio di Maxwell-Boltzmann.

Il tempo-scala affinché questo accada è detto *tempo-scala di scambio energetico*  $t_E$ :

$$t_E = \frac{E^2}{d(\Delta E)^2/dt} \quad (3.30)$$

dove  $E$  è l'energia di una particella di prova, e  $\Delta E$  è la variazione di energia durante gli urti (si veda Eq. 3.19).

Si noti che, a priori, non c'è alcuna ragione per cui  $t_E$  sia uguale a  $t_d$ : infatti nel SdR del centro di massa avviene una deflessione delle traiettorie  $\theta$  ma nessun scambio di energia, dato che le velocità delle particelle non cambiano prima e dopo l'urto.

Un importante esempio che mette in luce questa differenza è il caso degli urti elettrone-ione in un plasma in equilibrio termico: in questo caso  $m_e \ll m_p$  ed il SdR nel centro di massa differisce da quello del laboratorio soltanto per una velocità  $\mathbf{v}_{CM} \simeq (m_e/m_p)^{1/2} \mathbf{v}_i \ll \mathbf{v}_i$  (si veda (3.12)). Per il fatto che non viene scambiata energia nel SdR del centro di massa, abbiamo che il massimo trasferimento nel SdR del laboratorio si ha in un urto frontale, ed è uguale a

$$\Delta E = 2m_i v_{CM}^2 \simeq 2m_e v_i^2$$

e quindi

$$\frac{\Delta E}{\frac{1}{2}m_i v_i^2} \sim \frac{m_e}{m_i} \ll 1 \quad (3.31)$$

Quindi le collisioni tra elettroni e ioni non sono molto efficienti nel trasferire energia. Come abbiamo visto in precedenza (vedi Eq. 3.27), il tasso di collisione elettrone-ione ed elettrone-elettrone sono simili, ma una differenza nell'energia media tra elettroni e ioni verrà livellata dalle collisioni in un tempo  $\sim m_i/m_e \sim m_p/m_e \sim 1836$  volte più lungo rispetto ad una stessa differenza tra le energie degli elettroni. Per urti tra particelle di massa e velocità simili ci aspettiamo



che  $t_E \sim t_d$ , quindi dalle loro definizioni (3.28) e (3.29) ci aspettiamo che i tempi di rilassamento necessari per stabilire, da una condizione iniziale di non-equilibrio, (i) una distribuzione termica per gli elettroni, (ii) una distribuzione termica per gli ioni, (iii) una equipartizione di energia tra elettroni e ioni siano nel rapporto

$$t_E(e-e) : t_E(i-i) : t_E(e-i) = 1 : \left(\frac{m_p}{m_e}\right)^{1/2} : \left(\frac{m_p}{m_e}\right) \quad (3.32)$$

Quindi, i primi a raggiungere l'equilibrio sono gli elettroni, seguiti dagli ioni, ed infine avviene l'equipartizione. Questo comportamento è particolarmente importante nello studio delle onde d'urto, che vedremo in seguito.

### 3.5 Il potere di frenamento di particelle veloci da parte del plasma

Nello studio dell'accrescimento dovremo considerare come particelle veloci (che compongono la materia che viene accresciuta) vengono incorporate nel plasma circostante. Questo processo coinvolge ovviamente collisioni, ma con la differenza che questa volta le velocità delle particelle in caduta sono molto maggiori delle velocità delle particelle circostanti che compongono l'atmosfera stellare.

Consideriamo quindi una particella di prova (una particella per cui possiamo trascurare la sua influenza sul mezzo circostante) di massa  $m_1$ , velocità  $U$  e carica  $e_1$  che incide su di un plasma di densità (numerica)  $N$ , temperatura  $T$ , formato da particelle di massa  $m_2$  e carica  $e_2$ . In questo modo potremo considerare separatamente il potere frenante degli elettroni e degli ioni componenti il plasma. Assumiamo inoltre che la nostra particella di prova sia veloce (sopratermica) nel senso che

$$\frac{1}{2}m_1U^2 \gg \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m_2v_{th}^2$$

cioè  $U$  è molto maggiore della velocità termica tipica delle particelle del mezzo circostante. Possiamo ora definire un *tempo-scala di rallentamento*:

$$t_s = -\frac{U}{dU/dt} \quad (3.33)$$

Per le nostre particelle sopratermiche, assumendo velocità non relativistiche ( $U \ll c$ ) abbiamo che

$$\begin{aligned}
 t_s &\sim \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m_1^2 U^3}{8\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\
 t_d &\sim \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m_1^2 U^3}{8\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \\
 t_E &\sim \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m_1^2 U^3}{8\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \frac{m_2 U^2}{2kT}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Il logaritmo di Coulomb è stato calcolato con  $b_{\max} = U/\nu_p$ . Dall'analisi delle relazioni (3.34) possiamo trarre due importanti conclusioni:

- Il fattore  $m_2/(m_1 + m_2)$  nell'espressione per  $t_s$  significa che ioni sopratermici sono rallentati meglio dagli elettroni. Questo avviene in un tempo

$$t_s \sim \left( \frac{m_e}{m_p} \right) t_d$$

- Elettroni sopratermici sono rallentati in modo simile sia dagli elettroni che dagli ioni. Infatti il temposcala  $t_s$  è lo stesso che  $t_d$ .

E' spesso di interesse calcolare la distanza media che una particella percorre prima di essere rallentata  $\lambda_s \sim U t_s$ . Questa distanza viene a volta chiamata *distanza di frenamento* (*stopping length*). Per un protone incidente su di un plasma abbiamo

$$\lambda_s = U t_s \sim \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m_p^2 U^4}{8\pi N e^4 \ln \Lambda} \frac{m_e}{m_p} \tag{3.35}$$

dato che, come abbiamo visto, il potere frenante è dato principalmente dagli elettroni. Se indichiamo con  $E_p = \frac{1}{2} m_p U^2$  l'energia cinetica del protone, allora Eq. 3.35 può essere scritta come

$$\lambda_s = \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m_e}{2\pi N e^4 \ln \Lambda m_p} E_p^2 \tag{3.36}$$

Usando il fatto che  $N m_p \simeq \rho$ , la densità del plasma circostante, abbiamo che la densità colonnare  $\rho \lambda_s$  di plasma necessaria per rallentare un protone incidente dipende solamente dal quadrato dell'energia del protone. Infatti il potere frenante di un plasma viene spesso espresso in termini di densità colonnare per  $(\text{keV})^2$  dell'energia della particella incidente. Da un punto di vista numerico abbiamo che

$$\rho \lambda_s = 4.6 \cdot 10^{-10} \text{ g cm}^{-2} (\text{keV})^{-2} \quad \text{per } \ln \Lambda = 15 \tag{3.37}$$

### 3.5.1 Esempio: calcolo potere frenante di un plasma su un flusso in accrescimento

L'energia di un flusso di accrescimento supersonico viene trasportata quasi completamente dagli ioni. Come esempio di uso di  $\lambda_s$  si consideri il problema di un protone in caduta libera su di una stella. E' interessante sapere se il protone sarà in grado di penetrare la fotosfera della stella prima di essere fermato. In questo caso, la maggior parte dell'energia di accrescimento fornita da un flusso di tali protoni verrà convertita in radiazione di corpo nero ad una temperatura  $\sim T_b$ .

E' semplice rispondere a questa domanda nel caso in cui l'opacità degli strati superficiali della stella sia dovuta a scattering di elettroni come, per esempio, nel caso di stelle di neutroni. La condizione per la penetrazione è che  $\lambda_s$  deve essere maggiore del libero cammino medio  $\lambda_{ph}$  dei fotoni attraverso gli strati della stella. Nel caso di opacità dovuto a scattering di elettroni abbiamo che (si veda discussione subito dopo Eq. 3.16)

$$\lambda_{ph} \simeq \frac{1}{N\sigma_T}$$

dove  $\sigma_T$  è la sezione d'urto Thomson

$$\sigma_T = [4\pi\epsilon_0]^{-2} \frac{8\pi}{c} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \quad (3.38)$$

Utilizzando le espressioni (3.35) e (3.38) otteniamo che

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_{ph}} = \frac{m_p}{m_e} \frac{1}{3 \ln \Lambda} \left( \frac{U}{c} \right)^4$$

Quindi, per  $\ln \Lambda = 15$ , la condizione affinché avvenga penetrazione è

$$U \gg 2.6 \left( \frac{m_e}{m_p} \right)^{1/4} c \sim 0.4 c \quad (3.39)$$

Se per  $U$  prendiamo la velocità di caduta libera  $(2GM/R_*)^{1/2}$ , dalla (3.39) si deduce che la penetrazione può avvenire solamente su oggetti che sono *compatti*, nel senso che

$$R_* \lesssim 6 R_{Schw} \quad (3.40)$$

dove  $R_{Schw}$  è il raggio gravitazionale o raggio di Schwarzschild definito come

$$R_{Schw} = \frac{2GM}{c^2} \simeq 3 \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ Km}$$

Si noti che per un buco nero, anche se ovviamente vale la disuguaglianza (3.40), non ha senso parlare di penetrazione, a causa della mancanza di una superficie solida. La penetrazione di protoni è possibile, in linea di principio, per stelle di neutroni ma non per oggetti meno compatti.

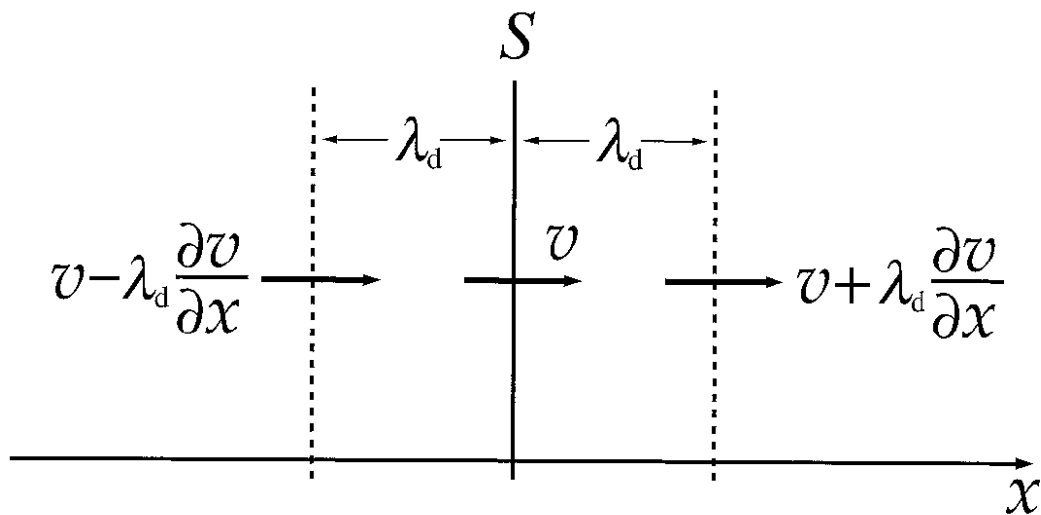


Figura 3.3: Definizione della geometria monodimensionale di trasporto della quantità di moto attraverso una superficie  $S$  dovuto a viscosità.

### 3.6 Fenomeni di trasporto: viscosità

Il fatto che le particelle del plasma si trovino in costante moto termico, e che quindi trasportino le loro quantità di moto, energie, ecc, significa che esse tenderanno a scambiarsi queste quantità e cercheranno di livellare ogni gradiente presente nel plasma. Quindi, le proprietà microscopiche del plasma, su scale del libero cammino medio, avranno effetti anche a livello macroscopico attraverso *processi di trasporto*. Esempi di questo tipo di processi sono la viscosità e la conducibilità termica, in cui le quantità trasferite sono la quantità di moto (viscosità) e l'energia termica (conducibilità).

Come vedremo, processi di trasporto diventano importanti quando sono presenti grandi gradienti (ad esempio di velocità o di temperatura) nel plasma.

Vediamo ora di esaminare come funziona la viscosità in un semplice caso. Consideriamo un plasma che si muova con una velocità globale (“bulk”)  $v(x)$  nella direzione  $x$ . Tracciamo una superficie  $S$  ortogonale alla velocità del gas ad un certo istante, e consideriamo il trasferimento di quantità di moto attraverso la superficie  $S$  dovuta a moti termici.

Questo creerà un effetto di viscosità *globale*. Il trasferimento delle altre componenti della quantità di moto nelle direzioni  $y$  e  $z$  creerà la cosiddetta viscosità di scorrimento (“shear”), che ha importanti effetti sul moto del gas.

Per simmetria, il trasferimento della componente  $x$  della quantità di moto sarà zero a meno che non esista un gradiente di velocità alla superficie  $S$ . Poniamo allora  $\partial v / \partial x = v / L$ , dove  $L$  è la lunghezza-scala su cui avviene variazione di velocità.

Le particelle che trasportano momento attraverso  $S$ , a causa del loro moto termico, saranno quelle presenti all'interno di una lunghezza di deviazione  $\lambda_d$  (definita in Eq. 3.20): dato che

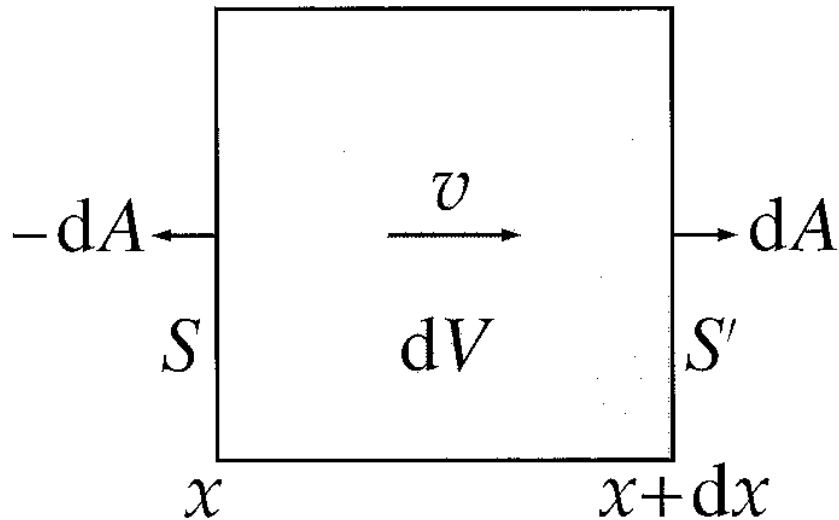


Figura 3.4: Definizione della geometria per la densità di forza dovuta a viscosità.

non avvengono deviazioni significative su lunghezze-scala minori di  $\lambda_d$ , allora queste particelle trasporteranno tutto il momento attraverso  $S$ , e dovremmo considerare entrambe le facce della superficie, con i loro valori diversi di  $\lambda_d$ .

Per semplificare la trattazione assumeremo che la maggior parte del trasferimento di momento viene fatto da particelle con energia termica  $E \sim kT$ : in questo caso il valore appropriato per  $\lambda_d$  è il libero cammino medio termico (3.26), uguale per tutte le particelle.

Una seconda semplificazione deriva dal fatto che la maggior parte della quantità di moto associata al plasma proviene quasi totalmente dagli ioni, a causa della loro maggior massa.

Infine assumeremo che solamente la velocità  $v$  e **non**  $\rho$ ,  $\lambda_d$  o la velocità del suono  $c_s$  cambino su lunghezze-scala dell'ordine di  $\lambda_d$ .

Quindi il tasso netto di trasferimento di momento della quantità di moto attraverso l'unità di area  $S$  è approssimativamente

$$-\rho c_s \left( v + \lambda_d \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho c_s \left( v - \lambda_d \frac{\partial v}{\partial x} \right) \simeq -2\rho c_s \lambda_d \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.41)$$

Per ricavare questa equazione abbiamo tenuto conto del fatto che gli ioni del plasma hanno velocità dell'ordine della velocità del suono  $c_s$  (equazioni (2.27a) e (2.27b)) e che la variazione di velocità su di una distanza  $\lambda_d$  è dell'ordine di  $\lambda_d \partial v / \partial x$ .

Consideriamo ora un elemento di volume  $dV$  nel flusso di plasma, che sia racchiuso dalle superfici  $S$  e  $S'$  definite a  $x$  e  $x + dx$ , ognuna di area  $dA$ , così che  $dV = dx dA$ . Il tasso di trasferimento di momento (3.41) significa che esiste una forza che agisce nella direzione  $x$  sull'elemento di volume  $dV$  dovuta a viscosità. Questa forza è data dalla differenza tra l'espressione (3.41) valutata nel punto  $x$  e valutata nel punto  $x + dx$

$$dF_{\text{visc}} = 2\rho c_s \lambda_d dA \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \right) - 2\rho c_s \lambda_d dA \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\simeq 2\rho c_s \lambda_d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dV$$

Quindi esiste una densità di forza viscosa data da

$$f_{\text{visc}} \simeq 2\rho c_s \lambda_d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3.42)$$

che agisce su ogni particella del plasma. Ovviamente questa forza svanisce nel caso in cui non vi siano gradienti di velocità.

Per vedere quando la forza viscosa diventa importante, dall'equazione di Eulero (2.3) si vede come bisogna confrontare  $f_{\text{visc}}$  con il gradiente di pressione  $\partial P/\partial x$ . Se la pressione cambia su una lunghezza-scala  $L$ , allora il loro rapporto è

$$\frac{\text{Viscosità}}{\text{Pressione}} \sim \rho c_s \lambda_d \frac{v}{L^2} \frac{L}{P}$$

ma dall'Eq. 2.2 abbiamo che  $P \simeq \rho c_s^2$ , quindi il rapporto diventa

$$\frac{\text{Viscosità}}{\text{Pressione}} \sim \frac{v}{c_s} \frac{\lambda_d}{L} \quad (3.43)$$

da cui vediamo come la viscosità diventi importante per flussi supersonici ( $v > c_s$ ) con grandi gradienti ( $L \sim \lambda_d$ ), che sono proprio le condizioni che si verificano nelle onde d'urto. Se i gradienti sono piccoli ( $L \gg \lambda_d$ ) la viscosità può in generale essere trascurata, a meno che il flusso non sia altamente supersonico ( $v \gg c_s$ ).

Nella nostra discussione abbiamo considerato effetti viscosi solamente nel caso di un flusso di gas monodimensionale. Ovviamente, nel caso in cui il campo di velocità vari in direzioni ortogonali al flusso (moti di scorrimento "shearing") entreranno in gioco effetti viscosi dello stesso tipo. Inoltre, se sono presenti violenti moti turbolenti che coinvolgono spostamenti di parti di materia, anche questi possono dare origine a viscosità (turbolenta).

Nel caso in cui la viscosità fosse dovuta a conduzione termica, la quantità che viene trasferita è l'energia (termica) interna. In questo caso il processo di trasporto sarà dominato dagli elettroni, dato che questi sono più veloci di un fattore  $(m_i/m_e)^{1/2} \sim 43$ . Un calcolo molto simile a quello fatto in precedenza mostra che un gradiente di temperatura  $\partial T/\partial x$  dà luogo ad un flusso di conduzione termica

$$q \sim -\frac{N_e k T}{m_e v_e} \lambda_d k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.44)$$

dove  $v_e = (kT/m_e)^{1/2}$ . La formula per il coefficiente di conduzione termica usato nell'espressione (2.33) segue direttamente da (3.44) e (3.26).

### 3.7 Effetti dovuti a campi magnetici

In problemi di accrescimento abbiamo a che fare con plasmi immersi in forti campi magnetici, dell'ordine di  $10^{12}$  gauss ( $=10^8$  Tesla), per stelle di neutroni e  $10^6$  gauss per nane bianche. La presenza di questo campo produce importanti effetti, ad esempio, modificando le proprietà di polarizzazione ed il trasporto radiativo. Ci occuperemo però solamente di due effetti magnetici: l'influenza del campo magnetico sul flusso di gas e sui processi di trasporto.

Per grandi linee, la presenza di correnti in un plasma in movimento modifica il campo magnetico, mentre il campo magnetico agisce sulle cariche per generare correnti elettriche. Questo rende il trattamento del flusso molto complicato però vedremo che nel caso in cui il plasma possieda una grande conducibilità elettrica (ed è il caso dei plasmi astrofisici) allora il plasma ed il campo magnetico si muovono insieme. Quello che ora determineremo saranno le condizioni per cui il gas segue il moto del campo magnetico o, reciprocamente, il campo magnetico viene trascinato dal gas.

Il campo magnetico  $\mathbf{B}$  è governato dalle equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \left[ \frac{1}{c} \right] \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left[ \frac{c\mu_0}{4\pi} \right] \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}\end{aligned}\quad (3.45)$$

La prima equazione ci dice che  $\mathbf{B}$  può essere rappresentato da linee di campo aperte; nella seconda equazione possiamo invece trascurare il termine dovuto a correnti di spostamento, viste le condizioni astrofisiche del nostro plasma.

La densità di corrente elettrica  $\mathbf{j}$  si relaziona al campo elettromagnetico attraverso la legge di Ohm appropriata ad un mezzo in movimento:

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{[c]}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \quad (3.46)$$

dove  $\sigma$  è la conducibilità elettrica (si ricordi che la legge di Ohm in un mezzo non in movimento è  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  e che l'Equazione 3.46 non è altro che la trasformazione di  $\mathbf{E}$  per un SdR che trasla con velocità  $\mathbf{v}$  rispetto al SdR del laboratorio).

Prendendo il rotore della (3.45) ed usando (3.46), assumendo  $\sigma$  costante, abbiamo che

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \left[ \frac{c\mu_0}{4\pi} \right] \frac{4\pi}{c} \sigma \left( \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{[c]}{c} \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \right)$$

Utilizzando l'equazione di Faraday

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{[c]}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

possiamo eliminare la dipendenza da  $\mathbf{E}$ . Il membro di sinistra diventa

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B}$$

quindi otteniamo

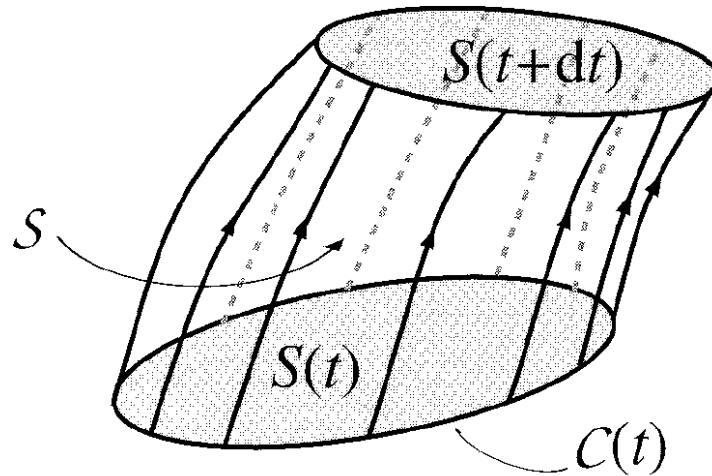


Figura 3.5: Volume definito dal moto della superficie  $S(t)$  in movimento con il fluido.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) + \left[ \frac{4\pi}{c^2 \mu_0} \right] \frac{c^2}{4\pi \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.47)$$

Dunque il tasso di variazione del campo magnetico è governato da un termine di diffusione del campo ( $\propto \sigma^{-1} \nabla^2 \mathbf{B}$ ) ed un termine di convezione ( $\propto \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ ).

Per determinare le condizioni per cui è possibile trascurare il termine di diffusione, per ordine di grandezza, introduciamo una lunghezza-scala  $l$  della distribuzione spaziale di  $\mathbf{B}$  e valutiamo le variazioni di  $\mathbf{B}$  su  $l$ . Al solito, avremo che  $\nabla \sim 1/l$ . Imponendo  $\partial \mathbf{B} / \partial t \ll 1$  in Eq. 3.47 otteniamo

$$\left[ \frac{4\pi}{c^2 \mu_0} \right] \frac{c^2}{4\pi \sigma} \frac{|\mathbf{B}|}{l^2} \ll \frac{|\mathbf{v}| |\mathbf{B}|}{l}$$

che può essere riscritta come

$$\left[ \frac{4\pi}{c^2 \mu_0} \right] \frac{c^2}{4\pi} \frac{1}{\sigma |\mathbf{v}| l} = \frac{1}{R_m} \ll 1$$

dove  $R_m$  è detto *numero di Reynolds magnetico*. Questo parametro ci permette di distinguere fra le situazioni in cui ha luogo una diffusione delle linee di forza rispetto al fluido da situazioni in cui le linee di forza sono congelate entro il fluido e da esso trasportate.

Per vedere come il campo ed il fluido si muovano insieme per  $R_m \gg 1$  consideriamo un flusso magnetico  $\Phi$  attraverso una superficie  $S(t)$ , racchiusa da una curva chiusa  $C(t)$  che si muove con il fluido (vedi Figura 3.5).

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \int_{S(t+dt)} \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \right] \frac{1}{dt}$$



Dato però che il flusso attraverso una superficie chiusa è zero, al tempo  $t + dt$  avremo che

$$\int_{S(t+dt)} \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

dove  $S$  è la superficie generata dal moto di  $C$ . Quindi

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \int_{S(t)} (\mathbf{B}(t+dt) - \mathbf{B}(t)) \cdot d\mathbf{S} - \int_S \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} dt \right] \frac{1}{dt}$$

dato che

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} dt$$

e  $d\mathbf{r}$  è un elemento di linea lungo  $C(t)$ .

Avremo quindi che calcolando il limite per  $dt \rightarrow 0$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \int_C (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}$$

L'integrale sul contorno  $C$  può essere trasformato in un integrale sulla superficie  $S(t)$  utilizzando il teorema di Stokes e quindi

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{S(t)} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S}$$

Trascurando il termine di diffusione in Eq. 3.47 otteniamo

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

quindi il flusso attraverso un elemento di fluido è conservato. Infatti il fluido ed il campo magnetico si muovono insieme (nel senso che una linea di campo magnetico è formata sempre dalle stesse particelle per tutto il tempo). In altri termini, il campo magnetico è congelato in un fluido perfettamente conduttore. Vi sono due importanti conseguenze di un fluido a conducibilità infinita. Se infatti poniamo  $\sigma \rightarrow \infty$  in Eq. 3.46 dobbiamo avere

$$\mathbf{E} + \frac{[c]}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = 0 \quad (3.48)$$

detta talvolta *condizione magnetoidrodinamica perfetta*. Da questa condizione ricaviamo che

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.49)$$

dato che  $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{B}) = 0$ . La condizione (3.49) è detta *degenerazione*.

Per completare la nostra discussione sugli effetti del campo magnetico sul flusso di accrescimento, consideriamo le forze magnetiche che operano sul plasma. Dato che ogni particella carica è soggetta alla forza di Lorentz  $(e/c) \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}[c]$ , allora la densità di forza magnetica sarà

$$\mathbf{f}_{\text{mag}} = \frac{[c]}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$$

Usando Eq. 3.45, senza il termine di corrente di spostamento, per eliminare  $\mathbf{j}$  otteniamo

$$\mathbf{f}_{\text{mag}} = \left[ \frac{4\pi}{\mu_0} \right] \frac{1}{4\pi} (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}$$

che, sviluppando i prodotti vettoriali, diventa

$$\mathbf{f}_{\text{mag}} = \left[ \frac{4\pi}{\mu_0} \right] \left\{ -\nabla \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right\} \quad (3.50)$$

Se confrontiamo questa equazione con l'equazione di Eulero (2.3) abbiamo che il primo termine si comporta come una pressione idrostatica di intensità

$$P_{\text{mag}} = \left[ \frac{4\pi}{\mu_0} \right] \frac{B^2}{8\pi} \quad (3.51)$$

Il secondo termine in (3.50) assume poca importanza ma è possibile fare vedere che si comporta come una tensione di intensità  $[4\pi/\mu_0](B^2/4\pi)$  lungo le linee di forza del campo.

Una analisi dell'equazione di Eulero ci permette di mostrare l'importanza relativa dei termini di pressione inerziale, del gas e magnetica, che stanno nella relazione

$$\rho v^2 : \rho c_s^2 : \frac{B^2}{8\pi} \left[ \frac{4\pi}{\mu_0} \right] \quad (3.52)$$

Da qui segue che la velocità del fluido sarà determinata dal campo magnetico se la pressione magnetica è quella dominante. Se la pressione inerziale è quella maggiore delle tre, allora il campo magnetico viene trascinato dal fluido, che si muove come se le forze magnetiche fossero assenti. Nel caso intermedio  $\rho c_s^2 \gg B^2/8\pi[4\pi/\mu_0] \gg \rho v^2$ , il campo magnetico muove il fluido, ma è esso stesso confinato dalla pressione del gas. L'eguaglianza delle densità di energia magnetica e cinetica definisce una velocità

$$v_A = \left( \frac{B^2}{4\pi\rho} \left[ \frac{4\pi}{\mu_0} \right] \right)^{1/2}$$

detta *velocità di Alfvén* a cui le perturbazioni magnetiche si propagano nel fluido. Dalla (3.52) abbiamo che le forze magnetiche dominano il flusso se

$$v_A \gg \max(v, c_s)$$

L'importanza dei campi magnetici nel modificare le proprietà dei processi di trasporto radiativo derivano dal fatto che questi campi modificano il moto delle particelle che compongono il plasma. Infatti, una particella di massa  $m$  e carica  $q$  che si muove di moto non relativistico in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  mostrerà un moto a spirale attorno alle linee di campo con frequenza angolare

$$\Omega = \frac{qB}{mc} [c] \text{ Hz} \quad (3.53)$$

conosciuta sotto i nomi di frequenza di Larmor, giro-frequenza o frequenza di ciclotrone. Il raggio della spirale è dato dalla componente ortogonale  $v_{\perp}$  a  $\mathbf{B}$  della velocità. Il raggio di Larmor  $r_L$  ha espressione

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\Omega}$$

Se  $v_{\perp}$  è data da una velocità termica media  $(kT/m)^{1/2}$ , allora

$$r_L = \frac{(mkT)^{1/2}}{qB} \frac{c}{[c]}$$

che per elettroni e ioni di massa  $Am_p$  e carica  $Ze$  vale

$$\begin{aligned} r_{Le} &\simeq 2.2 \cdot 10^{-2} T^{1/2}/B \text{ cm} \\ r_{Li} &\simeq AT^{1/2}/ZB \text{ cm} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Chiaramente  $r_L$  limita la distanza che le particelle possono attraversare in un plasma in una direzione ortogonale a  $\mathbf{B}$ . Quindi i processi di trasporto attraverso le linee del campo tenderanno ad essere soppressi se  $r_L < \lambda_d$ , mentre i tassi di trasporto lungo le linee del campo non verranno modificati.

### 3.8 Onde d'urto nei plasmi

Molto spesso in astrofisica abbiamo a che fare con situazioni in cui la velocità del flusso gassoso subisce una transizione tra un valore supersonico ed uno subsonico. Un ottimo esempio è quello relativo al caso di accrescimento sferico, adiabatico e stazionario che abbiamo studiato precedentemente. La velocità del gas sarà in generale prossima alla velocità di caduta libera  $v_{ff}$  e quindi supersonica vicino alla superficie della stella che sta accrescendo materia. Ovviamente il gas dovrà fare una transizione ad un flusso subsonico se vogliamo che la materia venga accresciuta.

Dal punto di vista del gas, cioè in un SdR che si muova alla velocità del gas  $v$ , la superficie della stella comprime il gas ad una velocità supersonica  $v_{ff}$ . Per semplificare, approssimiamo questo processo ad un pistone che comprime il gas in un cilindro (vedi Figura 3.6). Assumiamo che le variazioni indotte dal pistone siano così rapide che il gas si comporti adiabaticamente.

Quando il pistone si mette in movimento, partendo da una posizione di riposo, un segnale attraversa il gas alla velocità del suono ed il gas si comprime. Mentre il pistone continua ad accelerare nel gas, un altro segnale si propaga nel gas già compresso e lo comprime ancora di più; questo secondo segnale si propaga alla velocità del suono del gas già compresso. Dato che la velocità del suono  $c_s^{ad} \propto \rho^{1/3}$  (Eq. 2.27a) questa seconda velocità è leggermente maggiore di quella originale. Quindi, dividendo il gas di fronte al pistone in zone che indicheremo con 1,

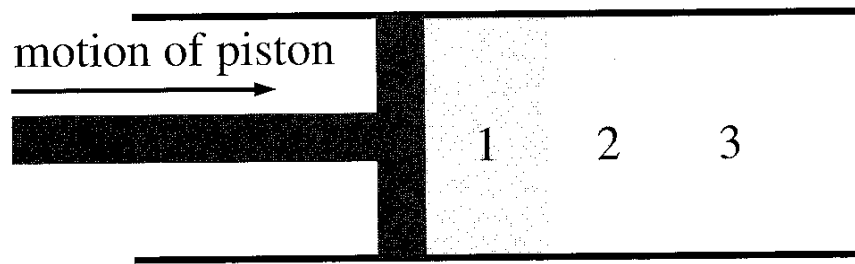


Figura 3.6: Compressione di un gas in un cilindro.

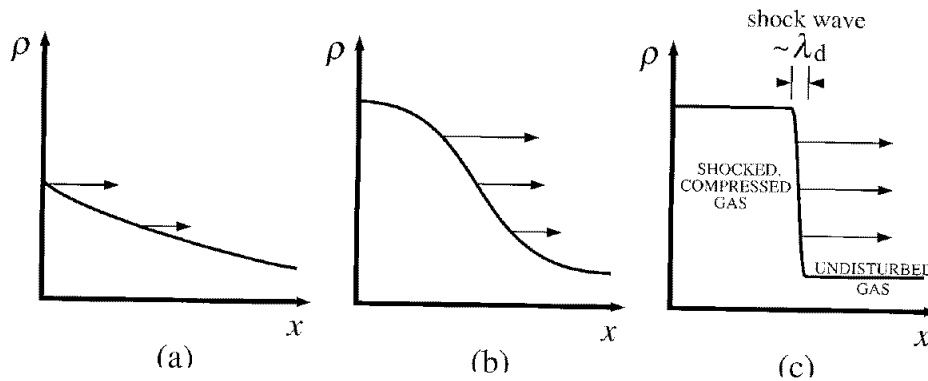


Figura 3.7: Formazione di un'onda d'urto in un gas. (a) La zona del gas più densa (1) cerca di "sorpassare" la zona meno densa (2) dato che la sua velocità del suono adiabatica è maggiore; (b) come risultato, il gradiente di densità, e quindi la tendenza al "sorpasso", aumenta con la conseguenza della formazione (c) di un'onda d'urto dello spessore dell'ordine del libero cammino medio delle particelle del gas.

2, 3,... abbiamo che le densità  $\rho(1)$ ,  $\rho(2)$ ,  $\rho(3)$ ,... in queste zone ubbidiranno alla  $\rho(1) > \rho(2) > \rho(3)$ ...

Perciò il gas sufficientemente lontano sulla destra rimarrà alla sua densità originale fino a quando l'onda di densità non sarà arrivata. Allora, le zone a densità più alta sulla sinistra continueranno ad aumentare la densità per fare sì che la loro densità rimanga maggiore. Il profilo di densità del gas si irripidirà sempre più come mostrato in Figura 3.7.

Questo irripidimento non può continuare infinitamente: quando la lunghezza-scala di densità  $L \simeq \rho/|\nabla\rho|$  inizia ad essere dell'ordine del libero cammino medio,  $\lambda_d$ , allora nelle regioni di maggiore densità le forze viscosive iniziano ad essere importanti, iniziando a dissipare energia. Abbiamo quindi conversione di energia cinetica (ordinata) in energia termica (caotica). La descrizione di questo processo è molto complessa ma dato che lo spessore dello shock è molto minore delle lunghezze-scala dei gradienti nel gas da entrambe le parti, possiamo approssi-

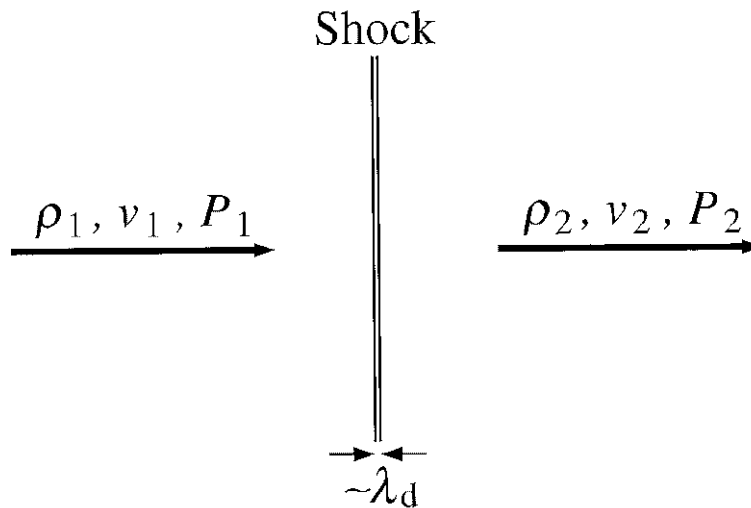


Figura 3.8: Calcolo delle condizioni di Rankine-Hugoniot al fronte d'urto.

mare lo shock con una discontinuità nel flusso di gas. In questo caso le relazioni tra densità, velocità e pressione (temperatura) del gas attraverso questa discontinuità si possono ricavare applicando le leggi di conservazione.

Per vedere come queste funzioni, poniamoci in un SdR in cui lo shock è fermo. Dato il suo piccolo spessore, possiamo idealizzare lo shock come un piano. Inoltre, dato che il gas attraversa lo shock molto velocemente, variazioni nelle condizioni del gas avvengono istantaneamente e possiamo quindi idealizzare il flusso in ingresso ed in uscita dallo shock come stazionario. Come si vede in Figura 3.8, avremo che il gas entra nello shock con densità, velocità e pressione  $\rho_1, v_1$  e  $P_1$  ed esce con densità, velocità e pressione  $\rho_2, v_2$  e  $P_2$ .

Applichiamo ora le leggi di conservazione della massa, momento ed energia attraverso lo shock; questo è equivalente ad integrare le equazioni della dinamica dei gas (2.1), (2.3) e (2.5) attraverso la discontinuità. Se  $x$  misura la distanza dal fronte dello shock, integriamo rispetto a  $x$  tra  $-dx$  a  $+dx$ , dove  $dx \sim \lambda_d/2$ , e prendiamo il limite  $dx \rightarrow 0$ .

Dalla equazione di continuità (2.1):

$$\frac{d}{dx}(\rho v) = 0$$

otteniamo che

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = J \quad (3.55)$$

Chiaramente, la quantità  $J = \rho v$  che si conserva è il flusso di materia attraverso lo shock. Dall'equazione di Eulero (2.3) abbiamo

$$\rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dP}{dx} = f_x$$

che può essere riscritta, tenendo conto di (3.55)

$$\frac{d}{dx}(P + \rho v^2) = f_x$$

dove  $f_x$  è la densità di forza nella direzione  $x$ . Integrando attraverso il fronte dello shock  $x = 0$  abbiamo

$$(P_1 + \rho_1 v_1^2) - (P_2 + \rho_2 v_2^2) = \lim_{dx \rightarrow 0} \int_{-dx}^{+dx} f_x dx = 0$$

dato che  $f_x$  è una quantità finita. Quindi l'equazione di Eulero ci fornisce un'altra quantità conservata

$$P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2 = I \quad (3.56)$$

che non è altro che il flusso del momento della quantità di moto.

Infine, dall'equazione di conservazione dell'energia (2.5) abbiamo

$$\frac{d}{dx} \left[ v \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon + P \right) \right] = f_x v$$

se assumiamo che le perdite radiative e conduzione termica siano piccole attraverso lo shock. Questa non è altro che l'assunzione che abbiamo fatto per descrivere un flusso adiabatico, e le condizioni che ricaveremo alla discontinuità verranno dette *condizioni di shock adiabatico*. Quindi, usando il fatto che  $\rho v = \text{costante}$  e che  $\epsilon = \frac{3}{2} P / \rho$ , l'equazione di conservazione dell'energia può essere scritta nella forma

$$\rho v \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} v^2 + \frac{5}{2} \frac{P}{\rho} \right] = f_x v$$

dove abbiamo supposto che il gas fosse monoatomico. Integrando lungo il fronte di shock (ed usando la (3.55)), abbiamo che la quantità che si conserva è

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{5}{2} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{5}{2} \frac{P_2}{\rho_2} = E \quad (3.57)$$

dato che  $\int f_x v dx$  si annulla attraverso il fronte di shock. La quantità  $E = \frac{1}{2} v^2 + \frac{5}{2} \frac{P}{\rho}$  è quindi l'energia totale specifica dove si è tenuto conto del lavoro fatto dalla pressione nel comprimere il gas attraverso lo shock.

Le tre equazioni di conservazione (3.55), (3.56) e (3.57) sono dette **condizioni di Rankine-Hugoniot** e permettono, con un pò di algebra, di ricavarsi i valori di discontinuità (salti) in  $\rho$ ,  $v$  e  $P$  durante il passaggio nel fronte d'urto.

Dividendo  $I$  per  $Jv$  abbiamo

$$\frac{I}{Jv} = \frac{P}{\rho v^2} + 1$$

Definendo il numero di Mach  $\mathcal{M}$  come

$$\mathcal{M}^2 = \frac{v^2}{(c_s^{\text{ad}})^2} = \frac{3}{5} \frac{\rho v^2}{P} \quad (3.58)$$

otteniamo

$$\frac{I}{Jv} = \frac{3}{5\mathcal{M}^2} + 1 \quad (3.59)$$

Usando (3.55) e (3.56), possiamo scrivere la (3.57) come

$$E = \frac{v^2}{2} + \frac{5}{2} \left( \frac{Iv}{J} - v^2 \right)$$

o, equivalentemente, come

$$v^2 - \frac{5}{4} \frac{I}{J} v + \frac{E}{2} = 0$$

Questa è una equazione di secondo grado in  $v$ , in cui le due soluzioni devono essere  $v_1$  e  $v_2$ , dato che abbiamo usato le leggi di conservazione. Abbiamo quindi che

$$v_1 + v_2 = \frac{5}{4} \frac{I}{J}$$

o, messo in altra forma

$$1 + \frac{v_2}{v_1} = \frac{5}{4} \frac{I}{Jv_1} = \frac{5}{4} \left[ \frac{3}{5\mathcal{M}_1^2} + 1 \right] \quad (3.60)$$

dove abbiamo usato la (3.59), ed abbiamo definito  $\mathcal{M}_1 = v_1/c_s^{\text{ad}}(1)$ , il numero di Mach relativo al gas pre-shock ("upstream").

Molto spesso abbiamo situazioni dove il flusso è altamente supersonico, cioè  $\mathcal{M}_1 \gg 1$ . Nel caso quindi di *shock forti* abbiamo che

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{4} \quad (3.61)$$

cioè la velocità diminuisce di un quarto del suo valore pre-shock. Dall'Eq. 3.55 abbiamo allora che

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 4 \quad (3.62)$$

che mostra come il gas subisca una compressione di un fattore quattro nello shock. I valori  $\frac{1}{4}$  e 4 nelle relazioni (3.61) e (3.62) sono dovuti al fatto che abbiamo preso come indice politropico  $\gamma = \frac{5}{3}$ .

Dalla Eq. 3.59 abbiamo che per uno shock forte vale la relazione  $I = Jv$ , quindi

$$I = \rho_1 v_1^2 \left( 1 + \frac{3}{5\mathcal{M}_1^2} \right) \simeq \rho_1 v_1^2$$

Quindi, nella regione pre-shock la pressione termica  $P_1$  è trascurabile rispetto alla pressione inerziale  $\rho_1 v_1^2$ .

Per il fatto che  $I = Jv$ , la pressione  $P_2$  davanti allo shock è

$$P_2 = \rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2 = \rho_1 v_1 (v_1 - v_2)$$

dove abbiamo usato (3.55). Eliminando  $v_2$  utilizzando (3.55) abbiamo che

$$P_2 = \frac{3}{4} \rho_1 v_1^2 \quad (3.63)$$

cioè la pressione davanti al fronte d'urto è  $\frac{3}{4}$  della pressione inerziale. Quello che è successo è che processi di dissipazione (ad esempio viscosi) hanno convertito la maggior parte dell'energia cinetica del flusso supersonico in calore (cioè moto disordinato delle particelle, a differenza del moto ordinato prima dello shock). Possiamo vedere infatti come le particelle del gas davanti allo shock siano subsoniche

$$c_s^{\text{ad}}(2) = \left( \frac{5P_2}{3\rho_2} \right)^{1/2} = \left( \frac{5\rho_1 v_1^2}{16\rho_1} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{4} v_1 > v_2 = \frac{v_1}{4} \quad (3.64)$$

dove abbiamo usato le relazioni (3.63), (3.62) e (3.61).

Si noti che abbiamo implicitamente assunto che  $(\rho_1, v_1, P_1)$  e  $(\rho_2, v_2, P_2)$  si riferissero al gas prima e dopo lo shock, rispettivamente, e che quindi il gas andasse da un flusso supersonico ad uno subsonico. Questo è giustificato dal risultato che un moto ordinato (pre-shock) è stato trasformato in un moto disordinato nel dopo-shock.

La temperatura  $T_2$  del gas dopo-shock è data dalla legge dei gas perfetti (2.2):

$$T_2 = \frac{\mu m_H P_2}{k \rho_2} = \frac{3}{16} \frac{\mu m_H}{k} v_1^2 \quad (3.65)$$

Se, come nell'esempio che ha motivato la nostra discussione,  $v_1$  è la velocità di caduta libera del gas, uguale a  $(2GM/R_*)^{1/2}$ , su di una stella di raggio  $R_*$  e massa  $M$ , allora (3.65) mi dà

$$T_2 = \frac{3}{8} \frac{GM\mu m_H}{kR_*} \quad (3.66)$$

Confrontando Eq. 3.66 con la definizione di temperatura termica  $T_{\text{th}}$  di Eq. 1.6c

$$T_{\text{th}} = \frac{GMm_p}{3kR_*} \iff G \frac{M(m_e + m_p)}{R_*} = 2 \times \frac{3}{2} k T_{\text{th}} \quad (3.67)$$

abbiamo che quest'ultima è molto vicina alla temperatura di shock  $T_2$ , dato che  $m_H \sim m_p$ ,  $\mu \sim 1$  e  $\frac{3}{8} \sim \frac{1}{3}$  (il valore  $\frac{3}{8}$  deriva dall'aver preso  $\gamma = \frac{5}{3}$ ).

Perciò in uno shock forte l'energia cinetica "ordinata" del gas supersonico pre-shock viene convertita in moti termici disordinati; la velocità termica dopo-shock ( $\simeq c_s(2)$ ) è dell'ordine della velocità nel pre-shock (vedi Eq. 3.64). La temperatura di shock  $T_2$  potrà essere osservabile



solamente se il gas dopo-shock è otticamente sottile, altrimenti lo spettro emesso sarà quello di corpo nero a temperatura  $T_2$  (si veda Eq. 1.6b).

Abbiamo quindi che riscaldamento da shock di un gas otticamente sottile è una maniera di generare alte temperature e, di conseguenza, emissione ad alta energia.

Benché abbiamo ristretto la nostra discussione al caso  $\mathcal{M}_1 \gg 1$ , non c'è nessuna difficoltà ad estendere i nostri risultati al caso di shock deboli ( $\mathcal{M}_1$  finito). E' possibile dimostrare come si ottengano, in questo caso, delle relazioni simili alle (3.61), (3.62) e (3.63), con coefficienti che dipendono dalla forza dello shock.

Si noti, infine, che l'irripidimento del profilo dello shock risulta inevitabile per la mono-dimensionalità del problema, dato che la velocità del suono aumentava con la densità e quest'ultima aumentava a causa della perturbazione in pressione. In situazioni più complicate questo non potrebbe accadere: ad esempio fenomeni di dissipazione e/o di espansione geometrica potrebbero cambiare questo andamento.



# Capitolo 4

## Processi Radiativi

### 4.1 Introduzione

Nel Capitolo 2 abbiamo introdotto l'equazione del trasporto radiativo (2.7), che qui riscriviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu &= -\mu_\nu I_\nu + j_\nu \\ &= -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \end{aligned} \quad (4.1)$$

dove  $\mu_\nu$  è il coefficiente di assorbimento,  $j_\nu$  il coefficiente di emissione (energia emessa per unità di tempo, per unità di angolo solido, per unità di volume in direzione  $\mathbf{n}$ ), ed abbiamo introdotto la quantità  $\kappa_\nu$ , detta opacità specifica e definita come  $\mu_\nu = \kappa_\nu \rho$ .

Abbiamo inoltre introdotto il concetto di funzione sorgente  $S$ , definita come il rapporto tra i coefficienti di emissione e di assorbimento; ed il concetto di profondità ottica  $\tau_\nu$  (vedi Eq. 2.8) che ci ha permesso di definire un mezzo *otticamente spesso* (*opaco*) quando  $\tau_\nu$  integrato lungo un percorso tipico attraverso il mezzo soddisfa  $\tau_\nu > 1$ .

Al contrario, quando  $\tau_\nu < 1$  il mezzo è detto *otticamente sottile* (*trasparente*).

Un concetto che si dimostra utile nella trattazione del trasporto radiativo è quello di *libero cammino medio*, definito come la distanza media che un fotone riesce a percorrere prima di essere assorbito dalla materia in cui si muove. Come abbiamo già visto (si veda Eq. 2.13), la probabilità che un fotone attraversi almeno una profondità ottica  $\tau_\nu$  è semplicemente  $e^{-\tau_\nu}$ . La profondità ottica *media* è quindi uguale all'unità

$$\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1$$

La distanza media attraversata in un mezzo omogeneo è definita *libero cammino medio*  $l_\nu$  ed è data da  $\langle \tau_\nu \rangle = \mu_\nu l_\nu = 1$ , o equivalentemente

$$l_\nu = \frac{1}{\mu_\nu} = \frac{1}{N\sigma_\mu} \quad (4.2)$$

In altre parole, il libero cammino medio, per un mezzo omogeneo, non è altro che il reciproco del coefficiente di assorbimento.

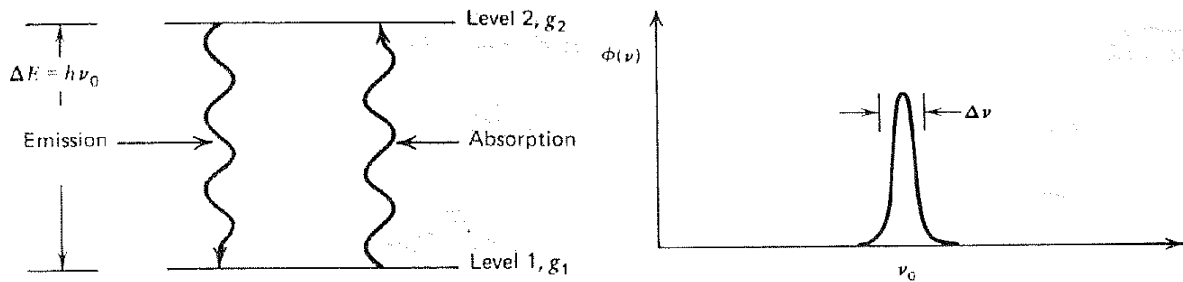


Figura 4.1: (a) Emissione ed assorbimento tra due livelli energetici. (b) Profilo della riga di emissione.

## 4.2 I coefficienti di Einstein

Per meglio comprendere quali sono i meccanismi che stanno alla base dell'assorbimento ed emissione di un plasma, introduciamo i coefficienti di Einstein. Dalla legge di Kirchhoff  $j_\nu = \mu_\nu B_\nu$  (2.11) abbiamo che deve esistere una qualche relazione a livello microscopico tra emissione ed assorbimento. Questa relazione fu scoperta da Einstein considerando il semplice caso di due livelli energetici discreti: il primo di energia  $E$  e peso statistico  $g_1$ , ed il secondo di energia  $E + h\nu_0$  e peso statistico  $g_2$  (si veda Figura 4.1).

Il sistema effettua una transizione dallo stato 1 allo stato 2 per assorbimento di un fotone di energia  $h\nu_0$ . In modo simile, una transizione dallo stato 2 allo stato 1 avviene quando un fotone è emesso.

Einstein identificò tre processi:

- **Emissione spontanea:** avviene quando il sistema è nello stato 2 e decade allo stato 1 con emissione di un fotone. Questo avviene anche in assenza di un campo di radiazione. Definiamo il *coefficiente di Einstein A*:

$$A_{21} = \begin{cases} \text{Probabilità di transizione per emissione spontanea per} \\ \text{unità di tempo} \end{cases} \quad (4.3)$$

- **Assorbimento:** avviene in presenza di fotoni di energia  $h\nu_0$ . Il sistema effettua una transizione tra lo stato 1 e lo stato 2 assorbendo un fotone. La differenza di energia tra i due livelli non sarà infinitamente stretta, ma sarà descritta da una funzione  $\phi(\nu)$ , piccata a  $\nu = \nu_0$ . Per comodità prenderemo questa funzione normalizzata:

$$\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1 \quad (4.4)$$

Questa funzione descrive l'efficienza che hanno le frequenze attorno a  $\nu_0$  nel provocare la transizione.

Definiamo allora il *coefficiente di Einstein B* dalla relazione

$$B_{12}\bar{J} = \begin{cases} \text{Probabilità di transizione per assorbimento per unità di} \\ \text{tempo} \end{cases} \quad (4.5)$$

dove abbiamo definito

$$\bar{J} \equiv \int_0^{\infty} J_{\nu} \phi(\nu) d\nu \quad (4.6)$$

in termini della *intensità media*  $J_{\nu}$

$$J_{\nu} \equiv \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu} d\Omega \quad (4.7)$$

□ **Emissione stimolata:** per derivare la legge di Planck è necessario un altro processo proporzionale a  $\bar{J}$  e che provoca l'*emissione* di un fotone. Definiamo quindi

$$B_{21}\bar{J} = \begin{cases} \text{Probabilità di transizione per emissione stimolata per} \\ \text{unità di tempo} \end{cases} \quad (4.8)$$

Si noti che se  $J_{\nu}$  varia lentamente lungo l'ampiezza  $\Delta\nu$  della riga, allora  $\phi(\nu)$  si comporta come una funzione  $\delta$ , e le probabilità per unità di tempo per assorbimento ed emissione stimolata diventano semplicemente  $B_{12}J_{\nu_0}$  e  $B_{21}J_{\nu_0}$ .

All'equilibrio termodinamico avremo che il numero di transizioni per unità di tempo per unità di volume dallo stato 1 sarà uguale al numero di transizioni per unità di tempo per unità di volume nello stato 1. Se indichiamo con  $N_1$  e  $N_2$  le densità numeriche di atomi negli stati 1 e 2, abbiamo che

$$N_1 B_{12} \bar{J} = N_2 A_{21} + N_2 B_{21} \bar{J} \quad (4.9)$$

Risolviendo per  $\bar{J}$  abbiamo che

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(N_1/N_2)(B_{12}/B_{21}) - 1}$$

All'equilibrio termodinamico il rapporto  $N_1/N_2$  vale

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1 \exp(-E/kT)}{g_2 \exp[-(E + h\nu_0)/kT]} = \frac{g_1}{g_2} \exp(h\nu_0/kT) \quad (4.10)$$

quindi l'espressione per  $\bar{J}$  diventa

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{(g_1 B_{12}/g_2 B_{21}) \exp(h\nu_0/kT) - 1} \quad (4.11)$$

All'equilibrio termodinamico però abbiamo che  $J_{\nu} = B_{\nu}$ , ed il fatto che  $B_{\nu}$  vari lentamente sulla distanza-scala  $\Delta\nu$ , implica che  $\bar{J} = B_{\nu}$ .

Se vogliamo che l'espressione (4.11) sia uguale alla funzione di Planck per ogni temperatura è necessario che valgano le *relazioni di Einstein*

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad (4.12a)$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21} \quad (4.12b)$$

Queste equazioni mettono in relazione le proprietà atomiche, e non fanno nessun riferimento alla temperatura, quindi devono essere valide indipendentemente dal fatto che gli atomi si trovino in equilibrio termodinamico.

L'introduzione dell'emissione stimolata è dovuta al fatto che se questa non viene presa in considerazione si riesce ad ottenere solamente la legge di Wien e non la legge di Planck. Se consideriamo il fatto che la legge di Wien corrisponde al limite  $h\nu \gg kT$  nella legge di Planck, nella condizione  $h\nu \gg kT$  lo stato 2 è molto meno popolato rispetto allo stato 1, cioè  $N_2 \ll N_1$ . Quindi, dalla (4.9) vediamo come l'emissione stimolata sia trascurabile rispetto all'assorbimento. Vediamo ora di ottenere i coefficienti di assorbimento ed emissione in funzione dei coefficienti di Einstein. In primo luogo dobbiamo fare delle assunzioni sulla distribuzione in frequenza della radiazione emessa durante una transizione spontanea dallo stato 2 allo stato 1. L'assunzione più semplice (che è molto spesso verificata in astrofisica) è che questa emissione sia distribuita con la stessa funzione  $\phi(\nu)$  che descrive l'assorbimento.

La quantità di energia emessa nel volume  $dV$ , angolo solido  $d\Omega$ , intervallo di frequenza  $d\nu$ , e tempo  $dt$  è per definizione  $j_\nu dV d\Omega d\nu dt$ .

Dato che ogni atomo contribuisce una energia  $h\nu_0$  distribuita su di un angolo solido  $4\pi$  per ogni transizione, la quantità di energia emessa può essere espressa come

$$\frac{h\nu_0}{4\pi} \phi(\nu) N_2 A_{21} dV d\Omega d\nu dt$$

quindi il coefficiente di emissione sarà

$$j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} N_2 A_{21} \phi(\nu) \quad (4.13)$$

Per ottenere il coefficiente di assorbimento, dalla definizione di coefficiente di Einstein di tipo B segue che l'energia totale assorbita nel tempo  $dt$  e volume  $dV$  è

$$dV dt h\nu_0 N_1 B_{12} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int d\nu \phi(\nu) I_\nu$$

Quindi l'energia assorbita da un fascio in un intervallo di frequenza  $d\nu$ , angolo solido  $d\Omega$ , tempo  $dt$  e volume  $dV$  è

$$dV dt d\Omega d\nu \frac{h\nu_0}{4\pi} N_1 B_{12} \phi(\nu) I_\nu$$

Prendendo come elemento di volume un cilindro di area  $dA$  e lunghezza  $ds = c dt$ , e ricordando le definizioni di  $I_\nu$  e  $\mu_\nu$ , abbiamo che il coefficiente di assorbimento (non corretto per emissione stimolata) ha la forma

$$\mu_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} N_1 B_{12} \phi(\nu) \quad (4.14)$$

Per tenere in conto l'emissione stimolata conviene considerarla come un termine di *assorbimento negativo*, dato che ha tutte le caratteristiche di un assorbimento (proporzionale all'intensità ed ha effetti solamente su fotoni lungo il fascio). Infatti questi due processi avvengono sempre contemporaneamente e non possono essere separati. Con un ragionamento del tutto analogo a quello che ha portato all'Eq. 4.14 abbiamo che il coefficiente di assorbimento corretto per emissione stimolata è

$$\mu_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (N_1 B_{12} - N_2 B_{21}) \quad (4.15)$$

E' ora possibile scrivere l'equazione del trasporto (2.9) in termini dei coefficienti di Einstein

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\frac{h\nu}{4\pi} (N_1 B_{12} - N_2 B_{21}) \phi(\nu) + \frac{h\nu}{4\pi} N_2 A_{21} \phi(\nu) \quad (4.16)$$

La funzione sorgente  $S$  può essere ottenuta dividendo (4.13) per (4.15):

$$S_\nu = \frac{N_2 A_{21}}{N_1 B_{12} - N_2 B_{21}} \quad (4.17)$$

Usando le relazioni di Einstein (4.12) il coefficiente di assorbimento e la funzione sorgente possono essere scritti come

$$\mu_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} N_1 B_{12} \left( 1 - \frac{g_1}{g_2} \frac{N_2}{N_1} \right) \phi(\nu) \quad (4.18)$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left( \frac{g_2}{g_1} \frac{N_1}{N_2} - 1 \right)^{-1} \quad (4.19)$$

L'equazione 4.19 è detta legge di Kirchhoff generalizzata. Vediamo ora di discutere tre casi interessanti di queste equazioni.

### 4.2.1 Emissione termica (LTE)

Se la materia si trova in equilibrio termico con se stessa (ma non necessariamente con la radiazione), allora

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \quad (4.20)$$

La materia si dice essere in uno stato di *equilibrio termodinamico locale (LTE)*. In questo caso le equazioni (4.18) e (4.19) diventano

$$\mu_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} N_1 B_{12} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \phi(\nu) \quad (4.21)$$

$$S_\nu = B_\nu(T) \quad (4.22)$$

La (4.22) non è altro che la legge di Kirchhoff, mentre in (4.21) è comparso il fattore correttivo dovuto all'emissione stimolata.

## 4.2.2 Emissione non termica

Il caso di emissione non termica viene considerato se

$$\frac{N_1}{N_2} \neq \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$$

Per un plasma, ad esempio, questo accade se le particelle non possiedono una distribuzione di velocità di Maxwell-Boltzmann, o se le popolazioni atomiche non ubbidiscono ad una legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Questo termine può essere applicato anche nei casi in cui sia presente scattering.

## 4.2.3 Popolazioni invertite: maser e laser

Per un sistema in equilibrio termico abbiamo che (si veda (4.20))

$$\frac{N_2}{N_1} \frac{g_1}{g_2} = \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right) < 1$$

quindi

$$\frac{N_1}{g_1} > \frac{N_2}{g_2} \quad (4.23)$$

Anche nel caso in cui il sistema non si trovi in equilibrio termico, questa relazione è generalmente soddisfatta. In questo caso si parla di *popolazioni normali*. Però è possibile “pompare” abbastanza atomi nello stato superiore in modo da avere *popolazioni invertite*:

$$\frac{N_1}{g_1} < \frac{N_2}{g_2} \quad (4.24)$$

In questo caso il coefficiente di assorbimento è *negativo*, come si può vedere dall'Equazione 4.18. Quindi l'intensità aumenta lungo un raggio, anziché diminuire. Un tale sistema è detto maser (**M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation) nel caso di emissione in micro-onde, o laser (**L**ight . . .) nel caso di luce visibile.

L'amplificazione può essere molto grande. Una profondità ottica negativa uguale a  $-100$  conduce ad una amplificazione del segnale di un fattore  $10^{43}$ . Amplificazione maser in righe molecolari è stata osservata in molte sorgenti astrofisiche.



### 4.3 Processo di scattering

Nel caso di pura emissione termica la quantità di radiazione emessa da un elemento di materiale **NON** dipende dal campo di radiazione incidente: la funzione sorgente è sempre  $B_\nu(T)$ . Questo elemento emetterà lo stesso spettro sia che si trovi isolato nello spazio sia che si trovi immerso all'interno una stella dove il campo di radiazione ambientale è preponderante.

Esiste però un altro processo di emissione molto comune in astrofisica (e non solo), detto *scattering*, che dipende completamente dalla quantità di radiazione che cade sull'elemento. Se la radiazione "scatterata" è emessa in maniera isotropa sull'angolo solido, così che il coefficiente di emissione è indipendente dalla direzione, si parla di *scattering isotropo*.

Se la quantità totale di radiazione **emessa** per unità di frequenza è uguale alla quantità totale di radiazione **assorbita** nello stesso intervallo di frequenza si parla di *scattering coerente (elastico o monocromatico)*.

Il coefficiente di emissione per scattering isotropo e coerente può essere trovato eguagliando la potenza assorbita per unità di volume:

$$j_\nu = \sigma_\nu J_\nu \quad (4.25)$$

dove  $\sigma_\nu$  è il coefficiente di assorbimento del processo di scattering, a volte chiamato *coefficiente di scattering*. La funzione sorgente per il processo di scattering è dunque

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\mu_\nu} = \frac{j_\nu}{\sigma_\nu} = J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega \quad (4.26)$$

L'equazione del trasporto per il processo di scattering diventa quindi

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\sigma_\nu(I_\nu - J_\nu) \quad (4.27)$$

Questa è un'equazione integro-differenziale, la cui soluzione da un punto di vista matematico è alquanto complessa.

L'emissione e l'assorbimento di radiazione può essere governata da più di un processo: ad esempio, consideriamo il caso di un materiale con coefficiente di assorbimento  $\mu_\nu$  descrivente emissione termica e coefficiente di scattering  $\sigma_\nu$  descrivente scattering coerente isotropo. L'equazione del trasporto avrà allora due termini

$$\begin{aligned} \frac{dI_\nu}{ds} &= -\mu_\nu(I_\nu - B_\nu) - \sigma_\nu(I_\nu - J_\nu) \\ &= -(\mu_\nu + \sigma_\nu)(I_\nu - S_\nu) \end{aligned} \quad (4.28)$$

La funzione sorgente

$$S_\nu = \frac{\mu_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\mu_\nu + \sigma_\nu} \quad (4.29)$$

è una media di due funzioni sorgenti separate, pesate per i loro rispettivi coefficienti di assorbimento.

Il coefficiente di assorbimento netto è  $\mu_\nu + \sigma_\nu$ , che può essere usato per definire la profondità ottica  $d\tau_\nu = (\mu_\nu + \sigma_\nu)ds$ .

Questo coefficiente di assorbimento netto è chiamato *coefficiente di estinzione*, per distinguerlo dal coefficiente di assorbimento “vero”  $\mu_\nu$ . Se un elemento di materia si trova all’interno di un mezzo ad una temperatura costante, ci aspettiamo che il campo di radiazione si trovi prossimo al valore termodinamico  $J_\nu = B_\nu(T)$ . Se invece l’elemento si trova isolato nello spazio libero, allora  $J_\nu = 0$ , e quindi la funzione sorgente è  $S_\nu = \mu_\nu B_\nu / (\mu_\nu + \sigma_\nu)$ , una frazione della funzione di Planck.

## 4.4 Random walk

Un modo particolarmente utile di studiare lo scattering è per mezzo del cosiddetto *random walk*. E’ possibile studiare i processi di assorbimento, emissione, e propagazione in termini probabilistici per un singolo fotone piuttosto che studiare il comportamento medio di un gran numero di fotoni, come abbiamo fatto finora. Ad esempio, il decadimento esponenziale di un fascio di fotoni può essere interpretato come il fatto che la probabilità di un fotone che attraversa un mezzo di profondità ottica  $\tau_\nu$  di essere assorbito è data da  $\exp(-\tau_\nu)$ .

Consideriamo ora un fotone emesso in una regione omogenea ed infinita che subisca scattering. Esso attraverserà una distanza  $r_1$  prima di subire un altro scattering e viaggiare una distanza  $r_2$  prima di subire un altro scattering e viaggiare una distanza  $r_3$ , ecc. Lo spostamento totale del fotone dopo  $N$  cammini sarà

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \cdots + \mathbf{r}_N \quad (4.30)$$

Per trovare una stima della distanza attraversata dal fotone  $|\mathbf{R}|$  non possiamo fare la media di (4.30), dato che questa sarà nulla. Se quadriamo però la (4.30) e poi prendiamo la media otterremo lo spostamento quadratico medio  $l_*^2$

$$\begin{aligned} l_*^2 \equiv \langle \mathbf{R}^2 \rangle &= \langle \mathbf{r}_1^2 \rangle + \langle \mathbf{r}_2^2 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{r}_N^2 \rangle \\ &+ 2\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \rangle + 2\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 \rangle + \cdots \\ &+ \cdots \end{aligned} \quad (4.31)$$

Ogni termine  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$  avrà come valore il quadrato del tipico cammino del fotone, che indicheremo con  $l^2$ , e che corrisponde al quadrato del libero cammino medio. I termini con i prodotti incrociati coinvolgono medie del coseno dell’angolo tra le direzioni prima e dopo lo scattering, e queste devono essere nulle per scattering isotropo. Quindi la (4.31) diventa

$$\begin{aligned} l_*^2 &= Nl^2 \\ l_* &= \sqrt{N} l \end{aligned} \quad (4.32)$$

Questo risultato può essere usato per stimare il numero medio di scattering in un mezzo finito. Supponiamo che un fotone sia generato da qualche parte in un mezzo; allora il fotone subirà

scattering fino a quando non riuscirà ad uscire completamente. Per regioni che hanno una profondità ottica grande allora  $l_* \sim L$ , la dimensione tipica del mezzo. Da Eq. 4.32 abbiamo che  $N \simeq L^2/l^2$ . Dato che  $l$  è dell'ordine del libero cammino medio,  $L/l$  dà una misura dello spessore ottico del mezzo, quindi

$$N \simeq \tau^2 \quad (\tau \gg 1) \quad (4.33)$$

Per regioni di profondità ottica piccola, invece, il numero medio di scattering sarà dell'ordine di  $1 - e^{-\tau} \simeq \tau$ , quindi

$$N \simeq \tau \quad (\tau \ll 1) \quad (4.34)$$

Per stime per ordine di grandezza, è sufficiente usare  $N \simeq \tau^2 + \tau$  o  $N \simeq \max(\tau, \tau^2)$  valide per ogni profondità ottica  $\tau$ .

Riprendendo il caso in cui siano presenti contemporaneamente scattering ed assorbimento, il cammino che un fotone può percorrere è in questo caso determinato dal coefficiente di estinzione  $\mu_\nu + \sigma_\nu$ . Il libero cammino medio prima che un fotone subisca scattering o assorbimento sarà quindi (vedi Eq. 4.2)

$$l_\nu = \frac{1}{\mu_\nu + \sigma_\nu} \quad (4.35)$$

Durante un random walk, la probabilità che un fotone venga assorbito sarà (si veda Eq. 4.29)

$$\epsilon_\nu = \frac{\mu_\nu}{\mu_\nu + \sigma_\nu} \quad (4.36)$$

mentre la corrispondente probabilità che venga scatterato sarà

$$1 - \epsilon_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\mu_\nu + \sigma_\nu} \quad (4.37)$$

La quantità  $1 - \epsilon_\nu$  viene detta *albedo per scattering singolo*. In questo caso la funzione sorgente può essere scritta

$$S_\nu = (1 - \epsilon_\nu)J_\nu + \epsilon_\nu B_\nu \quad (4.38)$$

Vediamo di calcolare ora il numero medio di scattering. Nel caso di un mezzo infinito un random walk inizia con l'emissione termica di un fotone e termina con il suo assorbimento dopo un certo numero di scattering. Dato che il cammino può essere terminato con probabilità  $\epsilon$  alla fine di ogni cammino libero, il numero di cammini liberi sarà  $N = \epsilon^{-1}$ . Da Eq. 4.32 allora abbiamo che

$$l_*^2 = \frac{l^2}{\epsilon} \quad (4.39)$$

$$l_* = \frac{l}{\sqrt{\epsilon}}$$

che, utilizzando (4.35) e (4.36) diventa

$$l_* \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_\nu(\mu_\nu + \sigma_\nu)}} \quad (4.40)$$

La lunghezza  $l_*$  fornisce una stima dello spostamento effettivo netto tra il punto in cui un fotone viene creato ed il punto in cui un fotone viene assorbito, e viene chiamata indifferentemente *lunghezza di diffusione*, lunghezza di termalizzazione o libero cammino effettivo. Si noti come  $l_*$  sia dipendente dalla frequenza.

Nel caso di un mezzo finito, il suo comportamento varierà a seconda che la sua dimensione caratteristica  $L$  sia maggiore o minore del libero cammino effettivo  $l_*$ . Per descrivere quantitativamente queste differenze di comportamento, è conveniente introdurre lo *spessore ottico effettivo*  $\tau_* \equiv L/l_*$ .

Utilizzando Eq. 4.40 avremo che

$$\tau_* \equiv \frac{L}{l_*} \simeq \sqrt{\tau_a(\tau_a + \tau_s)} \quad (4.41)$$

dove gli spessori ottici di assorbimento  $\tau_a$  e di scattering  $\tau_s$  sono definiti

$$\tau_a = \mu_\nu L; \quad \tau_s = \sigma_\nu L \quad (4.42)$$

Quando il cammino libero effettivo è grande rispetto alla dimensione del mezzo avremo che

$$\tau_* \ll 1 \quad (4.43)$$

ed il mezzo è detto *effettivamente sottile (traslucido)*. In questo caso la maggior parte dei fotoni riusciranno a scappare per random walk prima di essere distrutti da assorbimento. Quando il cammino libero effettivo è invece piccolo rispetto alla dimensione del mezzo avremo che

$$\tau_* \gg 1 \quad (4.44)$$

ed il mezzo è detto *effettivamente spesso*.

La maggior parte dei fotoni emessi termicamente a profondità maggiori del libero cammino effettivo verranno distrutti per assorbimento prima di poter uscire dal mezzo. Quindi le condizioni fisiche del mezzo per grandi profondità effettive approssimeranno le condizioni in cui la materia è in equilibrio termico con la radiazione, per cui  $I_\nu \rightarrow B_\nu$  e  $S_\nu \rightarrow B_\nu$ . E' per questa proprietà che  $l_*$  viene detta lunghezza di termalizzazione.

## 4.5 Bremsstrahlung

Particelle che attraversano la materia subiscono scattering e perdono energia per urto. In questi urti le particelle sono soggette ad accelerazioni, quindi emettono a loro volta radiazione elettromagnetica. La radiazione emessa durante urti atomici, cioè dovuta alla accelerazione di una carica in un campo Coulombiano di un'altra carica, è chiamata *bremsstrahlung* od anche *radiazione di frenamento*. Questo nome le deriva dal fatto che fu osservata la prima volta con

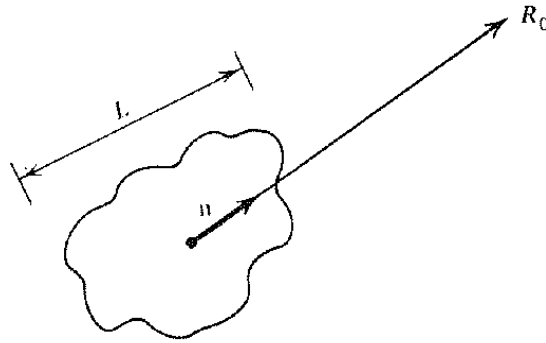


Figura 4.2: Campo di radiazione per un mezzo di dimensione  $L$ .

elettroni di alta energia frenati in una spessa lastra di metallo. Un trattamento rigoroso di questo processo richiede l'uso della meccanica quantistica, dato che possono essere prodotti fotoni con energie dello stesso ordine di grandezza di quelle delle particelle in gioco. Comunque con un trattamento classico del processo si ottiene la corretta dipendenza funzionale per la maggior parte dei parametri fisici. Le correzioni quantistiche verranno incorporate in fattori correttivi (detti fattori di Gaunt) alle formule classiche.

Si può dimostrare che la radiazione di bremsstrahlung dovuta a collisioni di particelle dello stesso tipo (elettrone-elettrone o ione-ione) è zero. Quindi radiazione verrà prodotta da collisioni elettrone-ione, in cui gli elettroni sono la principale fonte di radiazione, dato che le accelerazioni relative sono inversamente proporzionali alle masse.

Inoltre, dato che gli ioni hanno masse molto maggiori di quella dell'elettrone, potremo trattare l'elettrone come in movimento nel campo Coulombiano fisso dello ione.

Per ricavarci lo spettro della radiazione di bremsstrahlung ricordiamo che quando si trattano cariche in movimento il campo elettrico può essere scomposto in due termini: il primo termine, detto *campo di velocità*, che ha andamento  $\propto r^{-2}$ , altro non è che la generalizzazione della legge di Coulomb per cariche in movimento. Il secondo termine, detto *campo di radiazione*, ha andamento  $\propto r^{-1}$  ed è proporzionale alla accelerazione della particella che, nella cosiddetta approssimazione di dipolo, ha espressione

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \ddot{\mathbf{d}})}{c^2 R_0} \quad (4.45)$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore che unisce la particella al punto  $R_0$  dove si calcola il campo, e  $\mathbf{d}$  è il momento di dipolo

$$\mathbf{d} = \sum q_i \mathbf{r}_i \quad (4.46)$$

delle cariche  $q_i$  (vedi Figura 4.2).

In questa approssimazione abbiamo che l'energia emessa per unità di tempo per unità di angolo solido è

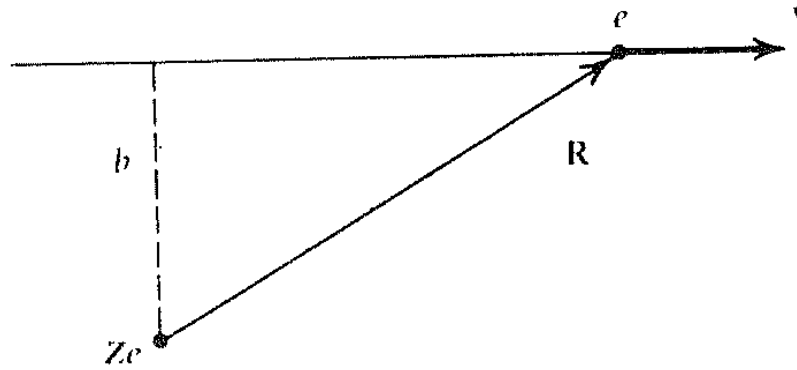


Figura 4.3: Definizione della geometria per un elettrone  $e$  che si muove nel campo di radiazione dello ione di carica  $Ze$ .

$$\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta \quad (4.47)$$

che integrata sull'angolo solido mi dà la potenza emessa

$$P \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{c^3} \quad (4.48)$$

Come abbiamo già visto, sono le collisioni a piccolo angolo di deflessione ed a grande parametro di impatto  $b$  che contribuiscono all'emissione. Se quindi consideriamo un elettrone di carica  $-e$  che collida a grande distanza con uno ione di carica  $Ze$  (vedi Figura 4.3), allora il momento di dipolo sarà  $\mathbf{d} = -e\mathbf{R}$ , e la sua derivata seconda (da porre in Eq. 4.47) è

$$\ddot{\mathbf{d}} = -e \dot{\mathbf{v}} \quad (4.49)$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità dell'elettrone. E' possibile fare vedere come

$$\frac{dE}{d\omega} = \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi c^3} |\Delta \mathbf{v}|^2 & \omega \tau_c \ll 1 \\ 0 & \omega \tau_c \gg 1 \end{cases} \quad (4.50)$$

dove  $\Delta \mathbf{v}$  è la variazione di velocità che avviene nella collisione,  $\tau_c = b/v$  è il tempo di collisione in cui l'elettrone e lo ione sono in interazione, e  $\omega = 2\pi\nu$ .

Dato che consideriamo deflessioni piccole, il cambio di velocità avverrà perpendicolarmente alla direzione di moto, quindi

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{Ze^2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2Ze^2}{mbv}$$

Quindi l'emissione da una singola collisione sarà

$$\frac{dE(b)}{d\omega} = \begin{cases} \frac{8Z^2 e^6}{3\pi c^3 m^2 v^2 b^2} & b \ll v/\omega \\ 0 & b \gg v/\omega \end{cases} \quad (4.51)$$

Possiamo ora ricavarci lo spettro totale per un mezzo composto da  $N_i$  ioni per unità di volume e  $N_e$  elettroni per unità di volume che si muovono a velocità  $v$ . Si noti come il flusso di elettroni (elettroni per unità di tempo per unità di area) incidente su di uno ione non è altro che  $N_e v$ . L'elemento di area attorno ad uno ione è  $2\pi b db$ , quindi l'emissione totale per unità di tempo per unità di volume per unità di frequenza è

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = N_i N_e 2\pi v \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{dE(b)}{d\omega} b db \quad (4.52)$$

dove  $b_{\min}$  e  $b_{\max}$  sono il minimo e massimo valore del parametro di impatto, discussi nel Capitolo 3. Sostituendo (4.51) in (4.52) otteniamo

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = \frac{16e^6}{3c^3 m^2 v} N_i N_e Z^2 \ln \Lambda \quad (4.53)$$

Quando per  $b_{\min}$  è necessario prendere il valore  $b_{\min}(MQ)$  (vedi Eq. 3.22), la trattazione classica non è più valida. Il risultato esatto di Eq. 4.53 viene espresso in termini di un fattore correttivo, detto *fattore di Gaunt*  $g_{ff}$ :

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3 m^2 v} N_i N_e Z^2 g_{ff}(\mathbf{v}, \omega) \quad (4.54)$$

da cui si vede, confrontando (4.53) con (4.54) che

$$g_{ff}(\mathbf{v}, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \Lambda \quad (4.55)$$

Il fattore di Gaunt (4.55) è una certa funzione dell'energia dell'elettrone e della frequenza di emissione. Il suoi valori sono tabulati e reperibili in letteratura.

#### 4.5.1 Bremsstrahlung termico

L'uso più interessante delle formule appena trovate è la loro applicazione al caso in cui la distribuzione delle velocità degli elettroni sia termica. Quello che quindi faremo sarà di mediare le espressioni trovate qui sopra per una singola velocità su di una distribuzione termica di velocità.

La probabilità  $dP$  che una particella abbia una velocità nell'intervallo  $d^3\mathbf{v}$  è

$$dP \propto e^{-E/kT} d^3\mathbf{v} = \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d^3\mathbf{v}$$

Dato però che per una distribuzione isotropa delle velocità abbiamo che  $d^3\mathbf{v} = 4\pi v^2 dv$ , la probabilità che una particella abbia velocità nell'intervallo  $dv$  è

$$dP \propto v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv \quad (4.56)$$

Quello che ora bisogna fare è integrare Eq. 4.54 su questa funzione. Quali sono i limiti di integrazione? A prima vista sembrerebbe  $0 \leq v < \infty$ , ma ad una frequenza  $\nu$  la velocità incidente deve essere almeno tale che

$$h\nu \leq \frac{1}{2}mv^2$$

altrimenti un fotone di energia  $h\nu$  non potrebbe essere creato. Questo limite di integrazione sulle velocità degli elettroni è detto *photon discreteness effect*. L'integrale diventa

$$\frac{dE(T, \omega)}{dV dt d\omega} = \frac{\int_{v_{\min}}^{\infty} \frac{dE(v, \omega)}{d\omega dV dt} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}{\int_0^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}$$

dove  $v_{\min} \equiv \sqrt{2h\nu/m}$ . Dato che  $d\omega = 2\pi d\nu$  otteniamo

$$\frac{dE(T, \omega)}{dV dt d\nu} = \frac{2^5 \pi e^6}{3mc^3} \left(\frac{2\pi}{3km}\right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \bar{g}_{ff} \quad (4.57)$$

Nel caso di emissione abbiamo che il coefficiente di emissione  $j_\nu$  definito in Eq. 2.7 in unità di  $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{Hz}^{-1}$  è dato da

$$4\pi j_\nu \equiv \frac{dE(T, \omega)}{dV dt d\nu} = 6.8 \cdot 10^{-38} Z^2 N_i N_e T^{-1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \bar{g}_{ff} \quad (4.58)$$

Il termine  $\bar{g}_{ff}(T, \nu)$  è chiamato fattore di Gaunt *mediato in velocità*.

Il fattore  $T^{-1/2}$  risulta dal fatto che  $dE/dV dt d\omega \propto v^{-1}$  (vedi Eq. 4.54) e  $\langle v \rangle \propto T^{1/2}$ . Il termine  $\exp(-h\nu/kT)$  viene dal limite di integrazione sulla velocità ed alla forma della distribuzione termica delle velocità.

E' possibile far vedere come  $\bar{g}_{ff} \sim 1$  per  $u = h\nu/kT \sim 1$ , ed è 1-5 per  $10^{-4} < u < 1$ . Quindi una buona stima dell'ordine di grandezza di  $\bar{g}_{ff}$  è l'unità.

Si noti come lo spettro di bremsstrahlung sia abbastanza "piatto" (in un grafico log-log) fino al suo cutoff a circa  $h\nu \sim kT$  (in realtà questo è vero solamente per sorgenti otticamente sottili).

Per ottenere l'espressione per bremsstrahlung *non termico* è necessario conoscere la distribuzione di velocità, e la formula per l'emissione per un elettrone a singola velocità deve essere mediata su quella distribuzione.

Possiamo ora anche ottenere la potenza totale per unità di volume emessa per bremsstrahlung termico. Basta integrare in frequenza Eq. 4.57

$$\frac{dE}{dt dV} = \left(\frac{2\pi kT}{3m}\right)^{1/2} \frac{2^5 \pi e^6}{3hmc^3} Z^2 N_i N_e \bar{g}_B \quad (4.59)$$



che numericamente è uguale a (unità di  $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-3}$ )

$$4\pi j = \frac{dE}{dt dV} = 1.4 \cdot 10^{-27} T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \bar{g}_B \quad (4.60)$$

Il termine  $\bar{g}_B(T)$  è il fattore di Gaunt *mediato in frequenza e mediato in velocità*, il quale è nell'intervallo 1.1–1.5. Prendendo il valore di 1.2 si ottiene una accuratezza di circa il 20%.

## 4.5.2 Assorbimento per bremsstrahlung termico

Dalla legge di Kirchhoff (2.11) abbiamo che

$$j_\nu^{\text{ff}} = \mu_\nu^{\text{ff}} B_\nu(T)$$

dove  $\mu_\nu^{\text{ff}}$  è il coefficiente di assorbimento libero-libero. Usando l'espressione (2.10) per la funzione di Planck abbiamo che

$$\mu_\nu^{\text{ff}} = \frac{4e^6}{3mhc} \left( \frac{2\pi}{3km} \right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-3} (1 - e^{-h\nu/kT}) \bar{g}_{\text{ff}} \quad (4.61a)$$

$$= 3.7 \cdot 10^8 T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-3} (1 - e^{-h\nu/kT}) \bar{g}_{\text{ff}} \text{ cm}^{-1} \quad (4.61b)$$

Per  $u \gg 1$  l'esponenziale è trascurabile, e  $\mu_\nu$  è proporzionale a  $\nu^{-3}$ . Per  $u \ll 1$  siamo nel regime di Rayleigh-Jeans e Eq. 4.61 diventa

$$\mu_\nu^{\text{ff}} = \frac{4e^6}{3mhc} \left( \frac{2\pi}{3km} \right)^{1/2} T^{-3/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-2} \bar{g}_{\text{ff}} \quad (4.62a)$$

$$= 0.018 T^{-3/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-2} \bar{g}_{\text{ff}} \text{ cm}^{-1} \quad (4.62b)$$

## 4.6 Radiazione di sincrotrone

Particelle accelerate da un campo magnetico  $\mathbf{B}$  emetteranno radiazione elettromagnetica. Per velocità non relativistiche la natura della radiazione è molto semplice ed è chiamata *radiazione di ciclotrone*. La frequenza di emissione è semplicemente la frequenza di Larmor nel campo magnetico (si veda Eq. 3.53 e la discussione seguente). Per particelle relativistiche, però, lo spettro è molto più complesso e può estendersi a frequenze molto maggiori della frequenza giro-magnetica. Questa radiazione è detta *radiazione di sincrotrone*.

Le equazioni relativistiche del moto di una particella di massa  $m$  e carica  $q$  immersa in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  sono

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = \frac{q}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (4.63a)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m c^2) = q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (4.63b)$$

dove indichiamo, come al solito,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ .

Da Eq. 4.63b segue che  $\gamma = \text{costante}$  o che  $|\mathbf{v}| = \text{costante}$ . Quindi Eq. 4.63a diventa

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (4.64)$$

Separando le componenti della velocità lungo la direzione del campo magnetico  $\mathbf{v}_{\parallel}$  ed in un piano normale al campo  $\mathbf{v}_{\perp}$ , abbiamo

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = 0 \quad \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{\gamma m c} \mathbf{v}_{\perp} \wedge \mathbf{B} \quad (4.65)$$

Quindi abbiamo che  $\mathbf{v}_{\parallel} = \text{costante}$  e, dato che  $|\mathbf{v}| = \text{costante}$ , allora deve essere anche  $\mathbf{v}_{\perp} = \text{costante}$ . La soluzione a questa equazione è chiaramente un moto circolare uniforme della proiezione del moto sul piano normale, dato che la accelerazione in questo piano è normale alla velocità e costante in modulo. La combinazione di questo moto circolare e del moto uniforme lungo il campo dà luogo ad un *moto elicoidale*, come mostrato in Figura 4.4.

La frequenza di rotazione (girazione) si ricava dalla (4.65)

$$\omega_B = \frac{qB}{\gamma m c} \quad (4.66)$$

L'accelerazione sarà perpendicolare alla velocità, con modulo  $a_{\perp} = \omega_B v_{\perp}$ , quindi la potenza totale emessa è

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 \frac{q^2 B^2}{\gamma^2 m^2 c^2} v_{\perp}^2 \quad (4.67)$$

che può essere scritta in termini del raggio classico dell'elettrone  $r_0 = q^2/mc^2$  (vedi Eq. 1.2)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} r_0^2 c \beta_{\perp}^2 \gamma^2 B^2 \quad (4.68)$$

dove abbiamo definito  $\beta = v/c$ . Per una distribuzione isotropa di velocità è necessario mediare la (4.68) su tutti gli angoli per una data velocità  $\beta$ . Se indichiamo con  $\alpha$  l'angolo tra il campo e la velocità (angolo di *pitch*), abbiamo che

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{\beta^2}{4\pi} \int \sin^2 \alpha d\Omega = \frac{2}{3} \beta^2 \quad (4.69)$$

allora otteniamo

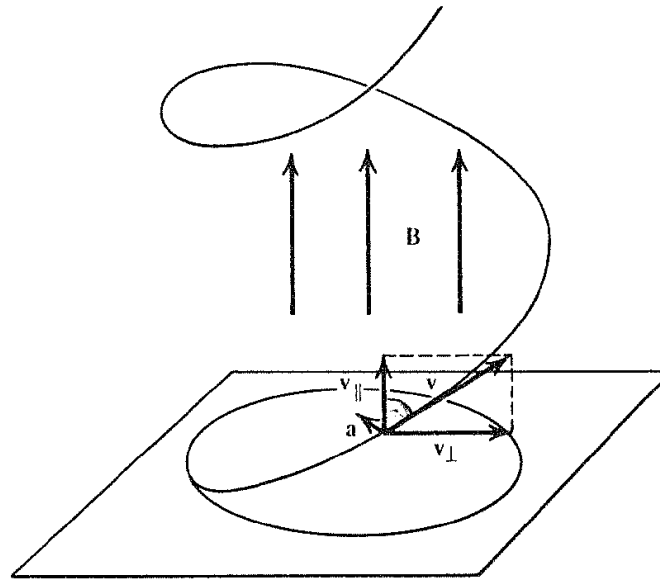


Figura 4.4: Moto elicoidale di una particella immersa in un campo magnetico uniforme.

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 r_0^2 c \beta^2 \gamma^2 B^2 \quad (4.70)$$

che può essere riscritta in termini della sezione d'urto Thomson (vedi Eq. 1.2)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B \simeq 2 \cdot 10^{-3} B^2 E^2 \quad \text{erg sec}^{-1} \quad (4.71)$$

dove  $U_B = B^2/8\pi$  è la densità di energia magnetica (vedi Eq. 3.51).

Una volta determinata la potenza totale emessa per radiazione di sincrotrone, vediamo di studiare il suo spettro. Da un punto di vista qualitativo, lo spettro di sincrotrone deve essere funzione della variazione del campo elettrico come visto da un osservatore.

A causa di effetti di *beaming* il campo elettrico apparirà concentrato in un piccolo insieme di direzioni attorno alla velocità della particella. Dato che l'accelerazione e la velocità sono perpendicolari tra loro, avremo una situazione come quella mostrata in Figura 4.5.

L'osservatore vedrà un impulso di radiazione confinato in un intervallo temporale molto minore del periodo di girazione. Lo spettro sarà quindi allargato su di una regione in frequenza molto maggiore di  $\omega_B/2\pi$ .

Consideriamo come l'osservatore vede l'impulso dai punti 1 e 2 lungo la traiettoria della particella, dove i due punti sono tali che il cono di emissione (di ampiezza  $\sim 1/\gamma$ ) intercetta la linea di vista. La distanza  $\Delta s$  lungo la traiettoria può essere calcolata dal raggio di curvatura  $a = \Delta s/\Delta\theta$ . Dalla geometria del sistema abbiamo che  $\Delta\theta = 2/\gamma$ , così che  $\Delta s = 2a/\gamma$ . Ma il raggio di curvatura della traiettoria segue direttamente dall'equazione del moto (4.64)

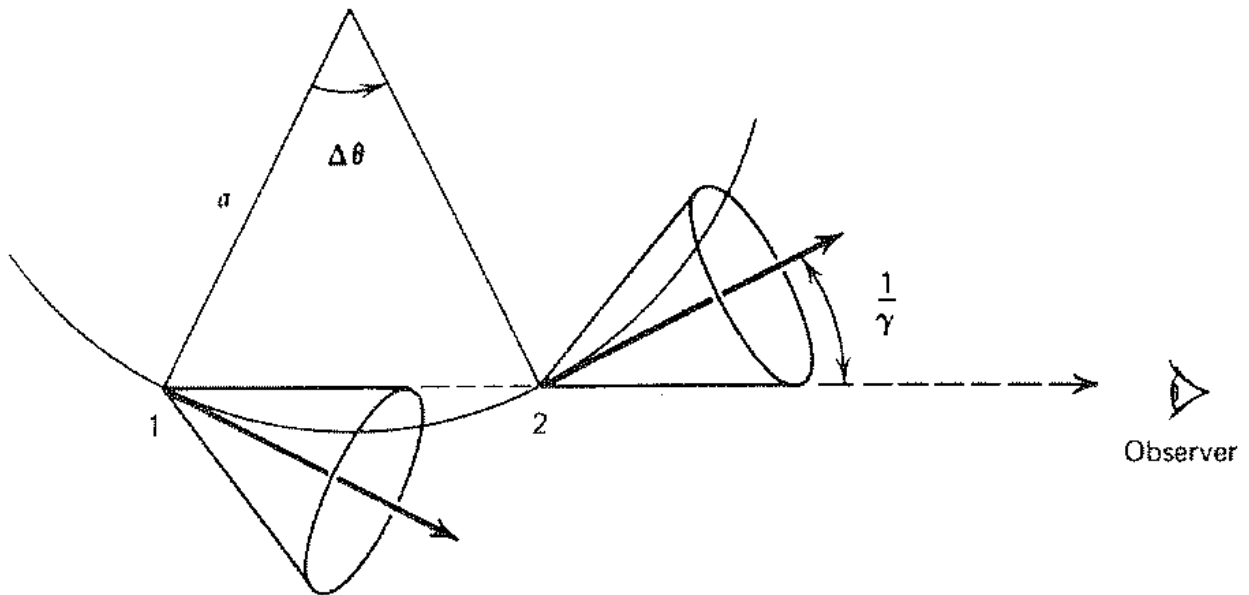


Figura 4.5: Coni di emissioni in vari punti sulla traiettoria di una particella accelerata.

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

Dato che  $|\Delta\mathbf{v}| = v\Delta\theta$  e  $\Delta s = v\Delta t$ , abbiamo

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{qB \sin \alpha}{\gamma m c v} \quad (4.72a)$$

$$a = \frac{v}{\omega_B \sin \alpha} \quad (4.72b)$$

e quindi

$$\Delta s = \frac{2a}{\gamma} = \frac{2v}{\gamma \omega_B \sin \alpha} \quad (4.73)$$

Siano  $t_1^A$  e  $t_2^A$  i tempi di *arrivo* della radiazione dai punti 1 e 2 all'osservatore. La differenza  $t_2^A - t_1^A$  sarà minore di  $t_2 - t_1$  per la quantità  $\Delta s/c$ , che è il tempo necessario alla radiazione a percorrere il tratto  $\Delta s$ . Quindi avremo che

$$\Delta t^A = t_2^A - t_1^A = \frac{2}{\gamma \omega_B \sin \alpha} \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad (4.74)$$

Dato che  $\gamma \gg 1$ , abbiamo che

$$1 - \frac{v}{c} \simeq \frac{1}{2\gamma^2}$$

e quindi Eq. 4.74 diventa

$$\Delta t^A \simeq (\gamma^3 \omega_B \sin \alpha)^{-1} \quad (4.75)$$

Quindi l'ampiezza degli impulsi osservati è minore del periodo di girazione di un fattore  $\gamma^3$ . Ci aspettiamo inoltre che lo spettro sia alquanto allargato, con un cutoff a frequenze dell'ordine di  $1/\Delta t^A$ . Se definiamo una frequenza critica

$$\omega_c \equiv \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_B \sin \alpha \quad (4.76)$$

allora lo spettro mostrerà un cutoff attorno a  $\omega_c$ .

Per derivare la dipendenza dello spettro da  $\omega$  osserviamo che il campo elettrico è una funzione di  $\theta$  attraverso la combinazione  $\gamma\theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo polare lungo la direzione del moto (vedi Figura 4.5). Questa è una manifestazione dell'*effetto di collimazione*. Se la forma dei singoli impulsi osservati quando il cono di emissione attraversa la nostra linea di vista ha forma  $E(t)$ , poniamo

$$E(t) \propto F(\gamma\theta) \quad (4.77)$$

dove  $t$  si riferisce al tempo misurato nel SdR dell'osservatore. Si può dimostrare come la potenza per unità di frequenza, mediata nel tempo, possa essere espressa nella forma

$$\frac{dE}{dt d\omega} \equiv P(\omega) = C_1 F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (4.78)$$

dove  $F$  è una funzione adimensionale e  $C_1$  una costante di proporzionalità, che può essere ottenuta imponendo che la potenza totale calcolata integrando su  $\omega$  sia uguale a quella ottenuta in (4.68).

Dopo un pò di algebra abbiamo che la potenza per unità di frequenza emessa da ogni elettrone nel caso ultrarelativistico ( $\beta \simeq 1$ ) può essere scritta nella forma

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{q^3 B \sin \alpha}{mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (4.79)$$

che ha l'importante proprietà di non dipendere da  $\gamma$  eccetto che nella sua dipendenza in  $\omega_c$  (Eq. 4.76). Da questo è possibile derivare un risultato molto importante riguardante gli spettri di sincrotrone. Spesso lo spettro può essere approssimato da una legge di potenza su di un intervallo di frequenze limitato. In questo caso si definisce *indice spettrale* la costante  $s$  nell'espressione

$$P(\omega) \propto \omega^{-s} \quad (4.80)$$

che mostra una pendenza negativa in un diagramma log-log. Gli spettri di radiazione astronomica hanno spesso questo andamento.

Spesso la densità numerica di particelle con energia comprese tra  $E$  e  $E + dE$  può essere espressa nella forma

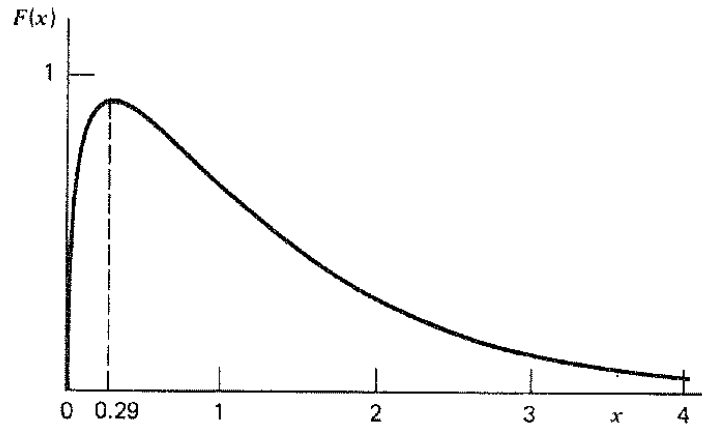


Figura 4.6: Funzione  $F$  descrivente lo spettro totale per emissione di sincrotrone.  $x \equiv \omega/\omega_c$ .

$$N(E) dE = C E^{-p} dE \quad E_1 < E < E_2 \quad (4.81)$$

o, in termini di  $\gamma$

$$N(\gamma) d\gamma = C \gamma^{-p} d\gamma \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2 \quad (4.82)$$

La potenza totale irradiata per unità di volume per unità di frequenza da una tale distribuzione sarà data dall'integrale di  $N(\gamma) d\gamma$  per la formula di radiazione della singola particella integrata su tutte le energie  $\gamma$

$$P_{\text{tot}}(\omega) = C \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} P(\omega) \gamma^{-p} d\gamma \propto \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \gamma^{-p} d\gamma \quad (4.83)$$

Cambiando la variabile di integrazione in  $x \equiv \omega/\omega_c$ , e notando che  $\omega_c \propto \gamma^2$ , abbiamo

$$P_{\text{tot}}(\omega) \propto \omega^{-(p-1)/2} \int_{x_1}^{x_2} F(x) x^{(p-3)/2} dx \quad (4.84)$$

I limiti  $x_1$  e  $x_2$  corrispondono ai limiti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  e dipendono da  $\omega$ . Comunque, se i limiti in energia sono sufficientemente ampi possiamo approssimare  $x_1 \simeq 0$  e  $x_2 \simeq \infty$ , cosicché l'integrale ha un valore costante, da cui

$$P_{\text{tot}}(\omega) \propto \omega^{-(p-1)/2} \quad (4.85)$$

Quindi l'indice spettrale  $s$  relativo ad una distribuzione di particelle di indice  $p$  è dato da

$$s = \frac{p-1}{2} \quad (4.86)$$

La forma della funzione  $F(x)$  è mostrata in Figura 4.6. Le sue forme asintotiche sono

$$F(x) \sim \begin{cases} \frac{4\pi}{\sqrt{3} \Gamma(\frac{1}{3})} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} & x \ll 1 \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-x} x^{1/2} & x \gg 1 \end{cases} \quad (4.87)$$

Per una distribuzione di elettroni a legge di potenza (Eq. 4.82) si può mostrare che la potenza totale per unità di volume per unità di frequenza  $P_{\text{tot}}(\omega)$  è data da

$$P_{\text{tot}}(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{q^3 C B \sin \theta}{m c^2 (p+1)} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{m c \omega}{3 q B \sin \theta}\right)^{-(p-1)/2} \quad (4.88)$$

#### 4.6.1 Sincrotrone auto-assorbito

L'emissione di sincrotrone è accompagnata da assorbimento, in cui un fotone interagisce con una carica immersa nel campo magnetico, viene assorbito e rilascia la sua energia alla carica. Questo processo viene detto *sincrotrone auto-assorbito*. E' possibile fare vedere che il coefficiente di assorbimento per sincrotrone per una distribuzione di elettroni  $N(E)$  e potenza  $P(\nu, E)$  ha la forma

$$\mu_\nu = \frac{c^2}{8\pi h \nu^3} \int dE P(\nu, E) E^2 \left[ \frac{N(E - h\nu)}{(E - h\nu)^2} - \frac{N(E)}{E^2} \right] \quad (4.89)$$

Assumendo  $h\nu \ll E$  ed espandendo al primo ordine in  $h\nu$  abbiamo che

$$\mu_\nu = -\frac{c^2}{8\pi \nu^2} \int dE P(\nu, E) E^2 \frac{\partial}{\partial E} \left[ \frac{N(E)}{E^2} \right] \quad (4.90)$$

Nel caso di una distribuzione termica di elettroni ultrarelativistici avremo che

$$N(E) = K E^2 e^{-E/kT} \quad (4.91)$$

quindi

$$\mu_\nu|_{\text{term}} = \frac{c^2}{8\pi \nu^2 kT} \int N(E) P(\nu, E) dE = \frac{j_\nu c^2}{2\nu^2 kT}$$

che non è altro che la legge di Kirchhoff nel regime di Rayleigh-Jeans. Questa non è una sorpresa, poiché abbiamo assunto che  $h\nu \ll E$ .

Nel caso di una distribuzione a legge di potenza degli elettroni abbiamo che

$$-E^2 \frac{d}{dE} \left[ \frac{N(E)}{E^2} \right] = (p+2) C E^{-(p+1)} = (p+2) \frac{N(E)}{E}$$

e quindi il coefficiente di assorbimento (4.90) diventa

$$\mu_\nu = \frac{(p+2) c^2}{8\pi \nu^2} \int dE P(\nu, E) \frac{N(E)}{E} \quad (4.92)$$

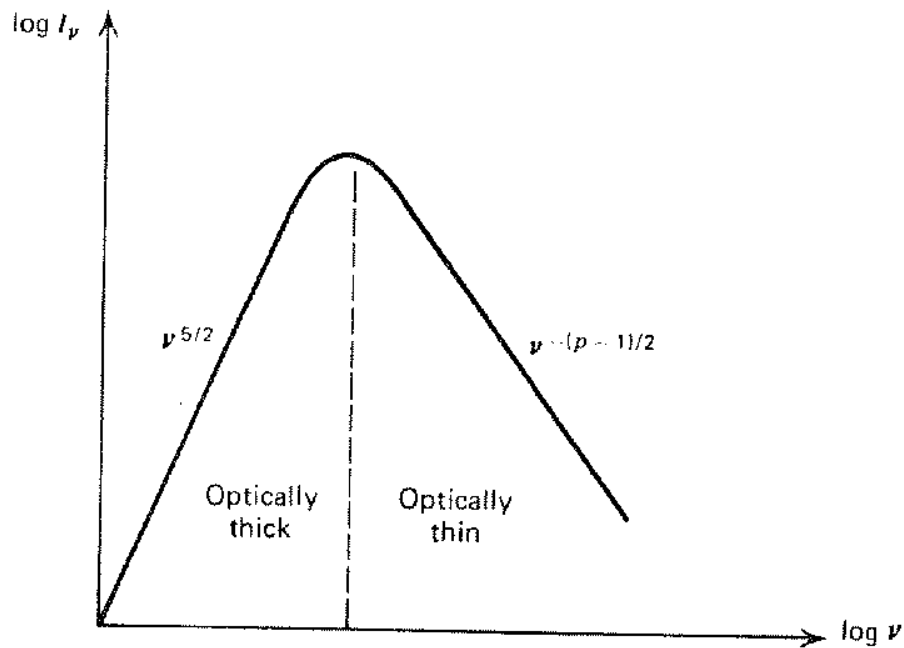


Figura 4.7: Spettro di sincrotrone per una distribuzione a legge di potenza degli elettroni.

Ponendo il valore all'integrale otteniamo

$$\mu_\nu = K \nu^{-(p+4)/2} \quad (4.93)$$

dove la costante  $K$  vale

$$K = \frac{\sqrt{3} q^3}{8\pi m} \left( \frac{3q}{2\pi m^3 c^5} \right)^{p/2} C (B \sin \alpha)^{(p+2)/2} \Gamma \left( \frac{3p+2}{12} \right) \Gamma \left( \frac{3p+22}{12} \right)$$

La funzione sorgente  $S$  avrà la forma

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\mu_\nu} = \frac{P(\nu)}{4\pi \mu_\nu} \propto \nu^{5/2} \quad (4.94)$$

E' interessante notare come la funzione sorgente sia una legge di potenza di indice  $-\frac{5}{2}$ , indipendente dal valore di  $p$ , e diverso dal valore  $-2$  del regime di Rayleigh-Jeans, a causa della natura non termica dell'emissione.

Per emissione di sincrotrone otticamente sottile l'intensità osservata è proporzionale alla funzione di emissione, mentre per emissione di sincrotrone otticamente spessa è proporzionale alla funzione sorgente. Dato che queste due funzioni per una distribuzione di elettroni a legge di potenza sono rispettivamente proporzionali a  $\nu^{-(p-1)/2}$  e  $\nu^{5/2}$ , avremo che regioni otticamente spesse emetteranno a bassa frequenza. Lo spettro mostrerà quindi un cutoff, come mostrato in Figura 4.7.



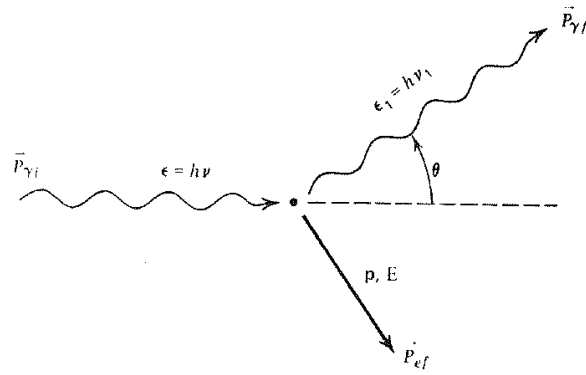


Figura 4.8: Definizione della geometria per uno scattering di un fotone da parte di un elettrone inizialmente a riposo.

## 4.7 Scattering Compton

### 4.7.1 Scattering da elettroni a riposo

Consideriamo il caso di scattering di fotoni da parte di elettroni che si trovino a riposo. Nel caso in cui l'energia del fotone  $h\nu \ll mc^2$ , ci ritroviamo nel caso classico di scattering Thomson, in cui

$$\epsilon = \epsilon_1 \quad (4.95a)$$

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (4.95b)$$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (4.95c)$$

dove  $\epsilon$  e  $\epsilon_1$  sono l'energia del fotone incidente e scatterato,  $d\sigma_T/d\Omega$  è la sezione d'urto Thomson differenziale per radiazione incidente non polarizzata, e  $r_0 = e^2/mc^2$  è il raggio classico dell'elettrone. Quando  $\epsilon = \epsilon_1$  lo scattering è detto *coerente* o *elastico*.

Effetti quantistici hanno due effetti: (i) modificano la cinematica del processo di scattering e (ii) modificano le sezioni d'urto.

Gli effetti cinematici avvengono perché un fotone possiede, oltre la sua energia  $\epsilon = h\nu$ , anche una quantità di moto  $\mathbf{p}$ , con  $|\mathbf{p}| = \epsilon/c$ . Lo scattering quindi non sarà più elastico a causa del rinculo della carica. Consideriamo il sistema in cui un fotone di energia  $\epsilon$  incide su di un elettrone a riposo il quale, dopo l'urto, avrà acquistato una velocità  $\mathbf{v}$  (vedi Figura 4.8).

Dalla legge di conservazione dell'energia prima e dopo l'urto avremo che

$$\epsilon + mc^2 = \epsilon' + c\sqrt{m^2c^2 + p_e^2}$$

mentre dalla conservazione della quantità di moto abbiamo che

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$$

Dalla seconda segue  $\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ , che quadrando e sostituendo nella prima

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{1 + \frac{\epsilon}{mc^2}(1 - \cos \theta)} \quad (4.96)$$

che può essere riscritta in termini della lunghezza d'onda come

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) = \lambda_c(1 - \cos \theta) \quad (4.97)$$

dove  $\lambda_c = 2.4 \cdot 10^{-10}$  cm è detta lunghezza d'onda Compton. Vediamo quindi che compare una variazione in lunghezza d'onda dell'ordine di  $\lambda_c$  durante uno scattering Compton. Per lunghezze d'onda  $\lambda \gg \lambda_c$  (cioè  $h\nu \ll mc^2$ ) lo scattering è elastico, e quindi non c'è variazione nell'energia del fotone nel SdR dell'elettrone.

Diamo ora una descrizione qualitativa degli effetti quantistici sulla sezione d'urto. Si può far vedere che la sezione d'urto differenziale per radiazione non polarizzata in elettrodinamica quantistica è data dalla formula di *Klein-Nishina*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon^2} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon} - \sin^2 \theta \right) \quad (4.98)$$

Si noti che per  $\epsilon_1 \simeq \epsilon$  questa si riduce all'espressione classica (4.95b). Il principale effetto che si può ricavare dall'espressione quantistica (4.98) è che all'aumentare dell'energia del fotone la sezione d'urto si riduce rispetto a quella classica (4.95b). Quindi lo scattering Compton diventa meno efficiente all'aumentare dell'energia. La sezione d'urto totale ha l'espressione

$$\sigma = \sigma_T \frac{3}{4} \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[ \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\} \quad (4.99)$$

dove  $x \equiv h\nu/mc^2$ . Nel regime non relativistico abbiamo che

$$\sigma \simeq \sigma_T \left( 1 - 2x + \frac{26x^2}{5} + \dots \right) \quad x \ll 1 \quad (4.100)$$

mentre nel regime relativistico abbiamo

$$\sigma \simeq \frac{3}{8} \sigma_T x^{-1} \left( \ln 2x + \frac{1}{2} \right) \quad x \gg 1 \quad (4.101)$$

## 4.7.2 Scattering da elettroni in movimento

Nella sezione precedente abbiamo considerato il caso che gli elettroni che fanno da diffusori per la radiazione fossero in quiete. Trattiamo ora il caso in cui gli elettroni posseggono una propria velocità. Assumeremo che nel SdR dell'elettrone i fotoni abbiano  $h\nu \ll mc^2$ , in modo da poter trascurare le correzioni quantistiche nella sezione d'urto di Klein-Nishina.

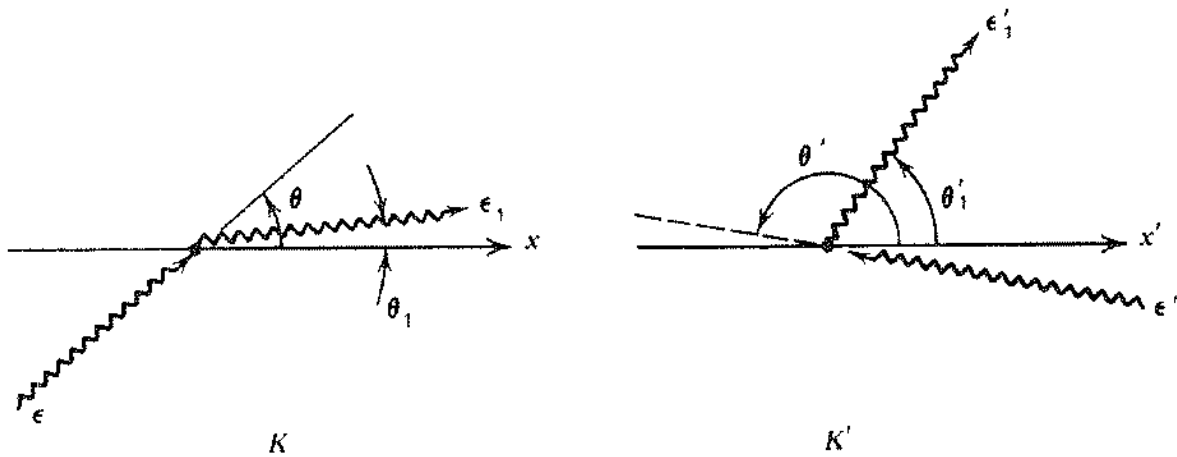


Figura 4.9: Definizione della geometria dello scattering Compton nel SdR  $K$  dell'osservatore e nel SdR  $K'$  dell'elettrone a riposo.

Se l'elettrone in movimento possiede sufficiente energia cinetica rispetto al fotone, è possibile che sia l'elettrone a trasferire energia al fotone. In questo caso si parla di **scattering Compton inverso**.

Siano ora  $K$  il SdR del laboratorio (osservatore) e sia  $K'$  il SdR in cui l'elettrone si trovi a riposo. L'evento di scattering visto nei due SdR è mostrato in Figura 4.9. Si noti che tutte le formule ricavate nella sezione precedente dovrebbero essere riscritte in forma primata, dato che valgono nel SdR in cui l'elettrone è a riposo.

Dalle formule dell'effetto Doppler relativistico abbiamo che

$$\epsilon' = \epsilon\gamma(1 - \beta \cos \theta) \quad (4.102a)$$

$$\epsilon_1 = \epsilon'_1\gamma(1 + \beta \cos \theta'_1) \quad (4.102b)$$

Dall'Eq. 4.96 abbiamo però che

$$\epsilon'_1 \simeq \epsilon' \left[ 1 - \frac{\epsilon'}{mc^2}(1 - \cos \Theta) \right] \quad (4.103a)$$

$$\cos \Theta = \cos \theta'_1 \cos \theta' + \sin \theta' \sin \theta'_1 \cos(\phi' - \phi'_1) \quad (4.103b)$$

dove  $\phi'_1$  e  $\phi'$  sono gli angoli azimutali del fotone scatterato e del fotone incidente nel SdR dell'elettrone a riposo.

Nel caso di elettroni relativistici,  $\gamma^2 - 1 \gg h\nu/mc^2$ , l'energia del fotone prima dello scattering, nel SdR  $K'$  e dopo lo scattering stanno nel rapporto

$$1 : \gamma : \gamma^2$$

sempre che venga soddisfatta la condizione per scattering Thomson nel SdR  $K' \gamma \epsilon \ll mc^2$ . Questo segue direttamente dalle (4.102), dato che  $\theta \simeq \theta'_1 \simeq \pi/2$ .

Questo processo quindi converte un fotone di bassa energia in uno di alta energia moltiplicandone l'energia per un fattore dell'ordine di  $\gamma^2$ . Dato che nel limite di Thomson possiamo avere fotoni fino a 100 keV, si può vedere come in questo modo si possano ottenere fotoni di energie enormi.

Se l'energia intermedia è troppo alta, allora gli effetti quantistici menzionati precedentemente agiscono riducendo l'efficienza del processo (facendo sì che  $\epsilon'_1 < \epsilon$ ) e riducendo la probabilità di scattering (riduzione di  $\sigma$ ).

Da un punto di vista cinematico abbiamo che l'energia massima raggiungibile dal fotone sarà  $\sim \gamma mc^2$ , dato che per conservazione dell'energia dobbiamo avere  $\epsilon_1 < \gamma mc^2 + \epsilon$ .

### 4.7.3 Potenza emessa per Compton inverso per scattering singolo

Finora abbiamo trattato il caso di scattering Compton di un fotone singolo da parte di un elettrone singolo. Vediamo ora di derivare formule per una distribuzione isotropa di fotoni scatterati da una distribuzione isotropa di elettroni. Sia  $v d\epsilon$  la densità di fotoni di energia nell'intervallo  $d\epsilon$ . E' possibile dimostrare che la potenza totale emessa (cioè scatterata) nel SdR dell'osservatore  $K$ , nel limite  $\gamma \epsilon \ll mc^2$  per cui possiamo usare la sezione d'urto Thomson, è data da

$$\frac{dE_1}{dt} = c \sigma_T \gamma^2 \int (1 - \beta \cos \theta)^2 \epsilon v d\epsilon \quad (4.104)$$

Per una distribuzione isotropa di fotoni abbiamo che

$$\langle (1 - \beta \cos \theta)^2 \rangle = 1 + \frac{1}{3} \beta^2$$

dato che  $\langle \cos \theta \rangle = 0$  e  $\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{3}$ . Quindi la potenza emessa (4.104) diventa

$$\frac{dE_1}{dt} = c \sigma_T \gamma^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \beta^2 \right) U_{\text{ph}} \quad (4.105)$$

dove abbiamo definito

$$U_{\text{ph}} \equiv \int \epsilon v d\epsilon \quad (4.106)$$

la densità di energia iniziale dei fotoni. Quindi la potenza netta totale persa dall'elettrone e quindi convertita in radiazione è data da

$$\frac{dE_{\text{rad}}}{dt} = c \sigma_T U_{\text{ph}} \left[ \gamma^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \beta^2 \right) - 1 \right]$$

Dato però che  $\gamma^2 - 1 = \gamma^2 \beta^2$ , abbiamo

$$P_{\text{compt}} = \frac{dE_{\text{rad}}}{dt} = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_{\text{ph}} \quad (4.107)$$

Se ricordiamo la formula per la potenza emessa per sincrotrone (4.71)

$$P_{\text{sync}} = \frac{4}{3} \sigma_{\text{T}} c \gamma^2 \beta^2 U_{\text{B}} \quad (4.108)$$

abbiamo che

$$\frac{P_{\text{sync}}}{P_{\text{compt}}} = \frac{U_{\text{B}}}{U_{\text{ph}}} \quad (4.109)$$

cioè le perdite dovute a radiazione di sincrotrone e a Compton inverso stanno nello stesso rapporto che la densità di energia magnetica e di energia del fotone. Questo risultato vale indipendentemente dalla velocità dell'elettrone (anche per quelli ultrarelativistici), ma dipende dalla approssimazione  $\gamma \epsilon \ll mc^2$ , cioè la possibilità di usare scattering Thomson nel SdR  $K'$ . Una volta determinata la potenza emessa da un singolo elettrone, per determinare quella emessa da una distribuzione  $N(\gamma)d\gamma$  di elettroni per unità di volume con  $\gamma$  nell'intervallo  $\gamma-\gamma + d\gamma$ , basterà calcolarsi

$$P_{\text{tot}}(\text{erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-3}) = \int P_{\text{compt}} N(\gamma) d\gamma \quad (4.110)$$

Se, ad esempio, prendiamo una legge di potenza per la distribuzione degli elettroni

$$N(\gamma) = \begin{cases} C\gamma^{-p} & \gamma_{\text{min}} \leq \gamma \leq \gamma_{\text{max}} \\ 0 & \gamma < \gamma_{\text{min}}, \gamma > \gamma_{\text{max}} \end{cases} \quad (4.111)$$

allora, per  $\beta \sim 1$ , otteniamo

$$P_{\text{tot}}(\text{erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-3}) = \frac{4}{3} \sigma_{\text{T}} c U_{\text{ph}} \frac{C(\gamma_{\text{max}}^{3-p} - \gamma_{\text{min}}^{3-p})}{3-p} \quad (4.112)$$

Nel caso di elettroni non relativistici, di densità  $N_e$ , che abbiano una distribuzione di velocità termica, avremo che  $\gamma \sim 1$ ,  $\langle \beta^2 \rangle = \langle v^2/c^2 \rangle = 3kT/mc^2$ , e quindi dalla (4.107)

$$P_{\text{tot}}(\text{erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-3}) = \left( \frac{4kT}{mc^2} \right) c \sigma_{\text{T}} N_e U_{\text{ph}} \quad (4.113)$$

Vedremo dopo che il termine tra parentesi non è altro che l'energia frazionale che viene guadagnata in ogni scattering dal fotone.

#### 4.7.4 Spettro emesso per Compton inverso per scattering singolo

Lo spettro emesso per Compton inverso dipende sia dalla forma dello spettro della radiazione incidente sia dalla distribuzione degli elettroni. Comunque sarà sufficiente determinare lo spettro per scattering di fotoni di una certa energia  $\epsilon_0$  diffusi da elettroni di energia  $\gamma mc^2$ , dato che lo spettro generale può essere determinato mediando sulle distribuzioni di fotoni ed elettroni. Considereremo il caso in cui sia i fotoni che gli elettroni abbiano una distribuzione isotropa; i fotoni scatterati avranno quindi anche loro una distribuzione isotropa. Resta solo da determinare il loro spettro.

Al solito, per semplificare il trattamento, consideriamo il caso in cui  $\gamma\epsilon_0 \ll mc^2$ , cioè scattering Thomson nel SdR di riposo degli elettroni. Ignoreremo anche la piccola variazione di energia data da Eq. 4.96. Infine, assumiamo che anche lo scattering nel SdR degli elettroni a riposo  $K'$  sia isotropo, che è equivalente ad avere

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \frac{1}{4\pi}\sigma_T = \frac{2}{3}r_0^2$$

invece della relazione esatta (4.95b). Quando si trattano problemi di scattering è conveniente usare una definizione di intensità  $I$  in termini di numero di fotoni invece che in termini di energia. Quindi il numero di fotoni che attraversano l'area  $dA$  nel tempo  $dt$  entro l'angolo solido  $d\Omega$  ed intervallo di energia  $d\epsilon$  è  $I dA dt d\Omega d\epsilon$ . Questa intensità può essere ricavata dalla intensità specifica  $I_\nu$  dividendo per l'energia. Una definizione simile vale per il coefficiente di emissione  $j_\nu$ , che quindi diventerà indipendente da  $\nu$ .

Supponiamo che il campo di fotoni incidente (isotropo) sia monoenergetico:

$$I(\epsilon) = F_0 \delta(\epsilon - \epsilon_0)$$

dove  $F_0$  è il numero di fotoni per unità di area, unità di tempo ed unità di angolo solido. Determiniamo allora come questo fascio incidente di fotoni venga scatterato da un fascio di elettroni di densità  $N$  ed energia  $\gamma mc^2$  che viaggia lungo l'asse  $x$  (vedi Figura 4.9). L'intensità del campo incidente nel SdR  $K'$  sarà

$$I'(\epsilon', \mu') = F_0 \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)^2 \delta(\epsilon - \epsilon_0)$$

dove  $\mu'$  è il coseno dell'angolo tra la direzione del fotone nel SdR  $K'$  e l'asse  $x$ , ed abbiamo un fattore  $\epsilon$  in più a causa della nuova definizione di  $I$ .

Data la nostra definizione di intensità, il coefficiente di emissione  $j'$  nel SdR  $K'$  sarà

$$j'(\epsilon'_1) = N'\sigma_T \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I'(\epsilon'_1, \mu') d\mu'$$

dove  $j'$  è il numero di fotoni emessi per unità di volume per unità di angolo solido. Assumendo scattering elastico, cioè che  $\epsilon'_1 = \epsilon'$ , allora avremo che

$$j'(\epsilon'_1) = \begin{cases} \frac{N'\sigma_T \epsilon'_1 F_0}{2\gamma\beta\epsilon_0^2} & \text{per } \frac{\epsilon_0}{\gamma(1+\beta)} < \epsilon'_1 < \frac{\epsilon_0}{\gamma(1-\beta)} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il coefficiente di emissione  $j(\epsilon_1, \mu_1)$  può essere trovato dalla relazione

$$j(\epsilon_1, \mu_1) = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon'_1}\right) j'(\epsilon'_1) \quad (4.114)$$

Ricordando che  $N = N'\gamma$ , possiamo ottenere il risultato per una distribuzione isotropa di elettroni mediando sull'angolo tra l'elettrone e il fotone emesso

$$j(\epsilon_1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} j(\epsilon_1, \mu_1) d\mu_1$$

Considerando il fatto che  $j(\epsilon_1, \mu_1)$  è non nulla solamente per certi valori di  $\mu_1$  (vedi Eq. 4.114), abbiamo che

$$j(\epsilon_1) = \frac{N\sigma_T F_0}{4\epsilon_0\gamma^2\beta^2} \begin{cases} (1+\beta)\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} - (1-\beta) & \frac{1-\beta}{1+\beta} < \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} < 1 \\ (1+\beta) - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}(1-\beta) & 1 < \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} < \frac{1+\beta}{1-\beta} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (4.115)$$

E' possibile fare vedere che valgono le seguenti relazioni

$$\int_0^\infty j(\epsilon_1) d\epsilon_1 = N\sigma_T F_0$$

$$\int_0^\infty j(\epsilon_1)(\epsilon_1 - \epsilon_0) d\epsilon_1 = N\sigma_T \frac{4}{3}\gamma^2\beta^2\epsilon_0 F_0$$

Dato che  $N\sigma_T F_0$  è il tasso di scattering dei fotoni per unità di volume e per unità di angolo solido, la prima relazione non esprime altro che la conservazione del numero di fotoni durante lo scattering. La seconda relazione esprime l'aumento medio dell'energia del fotone per scattering (si veda Eq. 4.107).

La funzione  $j(\epsilon_1)$  è mostrata in Figura 4.10 per diversi valori di  $\beta$ . Nel caso di  $\beta$  piccolo la curva è simmetrica attorno al valore dell'energia iniziale del fotone  $\epsilon_0$ . All'aumentare di  $\beta$  la parte di curva  $\epsilon \gg \epsilon_0$  diventa sempre più preponderante, esprimendo l'aumento dell'energia media del fotone scatterato.

Per valore di  $\beta \sim 1$  è conveniente riscrivere il grafico usando la variabile

$$x \equiv \frac{\epsilon_1}{4\gamma^2\epsilon_0} \quad (4.116)$$

La funzione di emissione, nella nostra approssimazione isotropa, è dominata dalla seconda espressione di Eq. 4.115, e può essere riscritta nella forma

$$j(\epsilon_1) = \frac{3}{4} \frac{N\sigma_T F_0}{4\gamma^2\epsilon_0} f_{\text{iso}}(x) \quad (4.117)$$

dove abbiamo definito

$$f_{\text{iso}}(x) \equiv \frac{2}{3}(1-x) \quad 0 < x < 1 \quad (4.118)$$

e  $f_{\text{iso}}(x) = 0$  per gli altri valori di  $x$ . Nel caso in cui si usi la dipendenza angolare esatta in  $d\sigma'/d\Omega'$ , la funzione  $f(x)$  nel limite  $\gamma \gg 1$  è data da

$$f(x) = 2x \ln x + x + 1 - 2x^2 \quad 0 < x < 1 \quad (4.119)$$

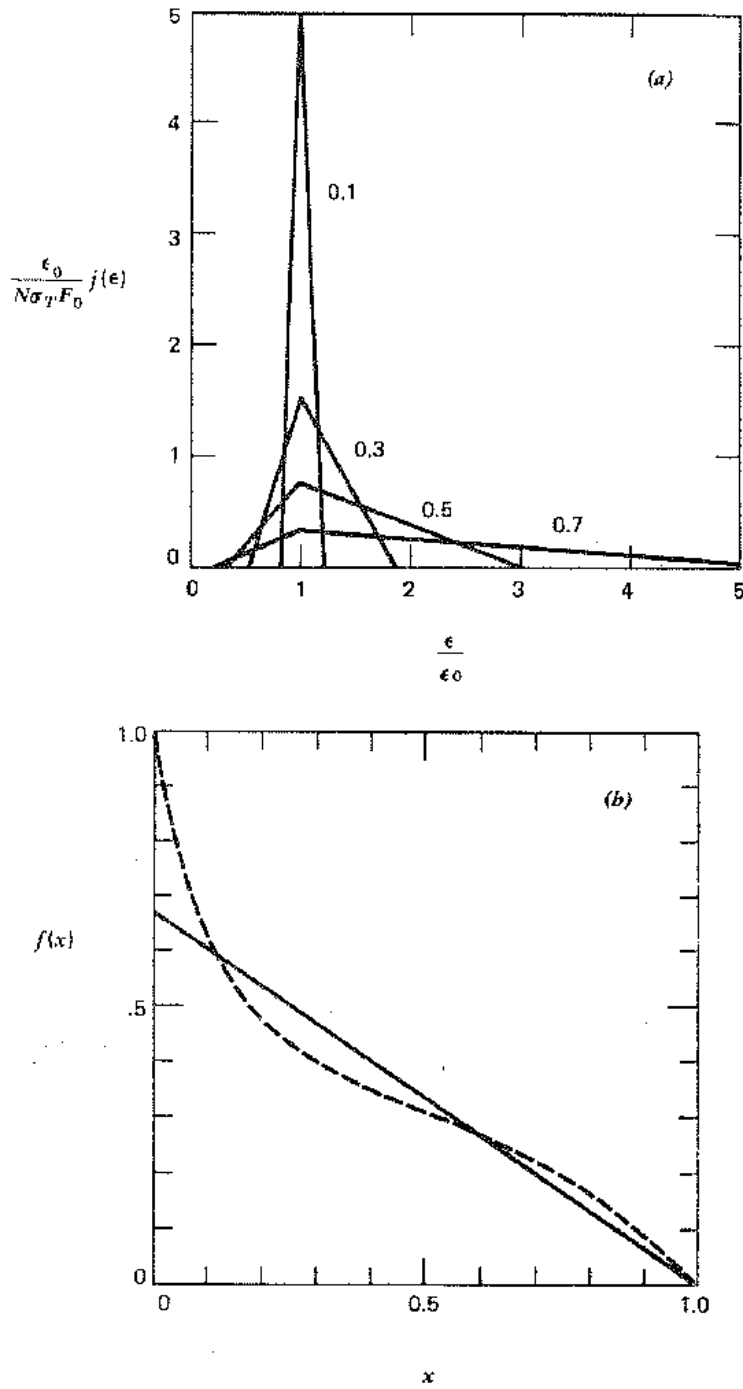


Figura 4.10: Funzioni descrittive lo spettro Compton inverso per scattering singolo. (a) Funzione di emissione  $j$  per vari valori di  $\beta$  nella approssimazione isotropa. (b) Confronto tra l'espressione esatta (tratteggiata) e quella in approssimazione isotropa (linea continua) della funzione  $f(x)$ .



Un confronto di queste due forme di  $f(x)$  è mostrato in Figura 4.10, da cui si vede un buon accordo qualitativo.

Vediamo ora di ricavarci lo spettro per Compton inverso di uno spettro di fotoni iniziale arbitrario su una distribuzione a legge di potenza (Eq. 4.111) di elettroni relativistici. Sia  $v(\epsilon)$  la densità numerica iniziale dei fotoni, funzione della intensità isotropa  $I$

$$v(\epsilon) = \frac{4\pi}{c} I(\epsilon)$$

Allora la potenza totale scatterata per unità di volume per unità di energia sarà

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt dV d\epsilon_1} &= 4\pi\epsilon_1 j(\epsilon_1) \\ &= \frac{3}{4} c \sigma_T C \int d\epsilon \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon}\right) v(\epsilon) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\gamma \gamma^{-p-2} f\left(\frac{\epsilon_1}{4\gamma^2\epsilon}\right) \end{aligned} \quad (4.120)$$

Cambiando la variabile di integrazione nel secondo integrale da  $\gamma$  a  $x$  (vedi la sua definizione (4.116)) otteniamo

$$\frac{dE}{dt dV d\epsilon_1} = 3\sigma_T c C 2^{p-2} \epsilon_1^{-(p-1)/2} \int d\epsilon \epsilon^{(p-1)/2} v(\epsilon) \int_{x_1}^{x_2} dx x^{(p-1)/2} f(x) \quad (4.121)$$

dove abbiamo definito  $x_i \equiv \epsilon_1/(4\gamma_i^2\epsilon)$ . Supponiamo ora che  $\gamma_2 \gg \gamma_1$ , e che  $v(\epsilon)$  sia piccata ad un certo valore  $\bar{\epsilon}$ . Allora il secondo integrale di (4.121) è indipendente da  $\epsilon_1$  e può essere rimosso. Il risultato finale diventa quindi

$$\frac{dE}{dt dV d\epsilon_1} = \pi r_0^2 c C A(p) \epsilon_1^{-(p-1)/2} \int d\epsilon \epsilon^{(p-1)/2} v(\epsilon) \quad (4.122)$$

dove abbiamo definito

$$A(p) \equiv 2^{p+1} \int_0^\infty dx x^{(p-1)/2} f(x) = 2^{p+3} \frac{p^2 + 4p + 11}{(p+3)^2(p+5)(p+1)} \quad (4.123)$$

Bisogna puntualizzare che le espressioni (4.122) e (4.123) sono valide solamente nell'intervallo di energia di  $\epsilon_1$  in cui i limiti di integrazione di (4.121) possono essere estesi a zero e all'infinito. Se  $\bar{\epsilon}$  è l'energia media di un fotone nella distribuzione di fotoni incidenti, allora questo intervallo è dato approssimativamente da

$$4\gamma_1^2 \bar{\epsilon} \ll \epsilon_1 \ll 4\gamma_2^2 \bar{\epsilon}$$

Per inciso, si noti che l'indice spettrale è

$$s = \frac{p-1}{2} \quad (4.124)$$

cioè lo stesso del caso di radiazione di sincrotrone (4.86). Nel caso in cui  $v(\epsilon)$  sia la distribuzione di corpo nero

$$v(\epsilon) = \frac{8\pi\epsilon^2}{h^3c^3} \frac{1}{\exp(\epsilon/kT) - 1}$$

allora abbiamo che

$$\frac{dE}{dt dV d\epsilon_1} = C \frac{8\pi^2 r_0^2}{h^3 c^2} (kT)^{(p+5)/2} F(p) \epsilon_1^{-(p-1)/2} \quad (4.125)$$

dove la funzione  $F(p)$  è definita come

$$F(p) \equiv A(p) \Gamma\left(\frac{p+5}{2}\right) \zeta\left(\frac{p+5}{2}\right)$$

e  $\zeta$  è la funzione zeta di Riemann, definita come

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

#### 4.7.5 Il parametro di Comptonizzazione $y$

Prima di discutere in dettaglio quale sia l'effetto di ripetuti scattering Compton sullo spettro totale e sulla distribuzione di energia dei fotoni, determiniamo quali sono le condizioni per cui il processo di scattering altera in maniera significativa l'energia totale del fotone. Al solito ci poniamo nel limite di Thomson  $\gamma\epsilon \ll mc^2$ .

In un mezzo finito possiamo definire il parametro di Comptonizzazione  $y$  per determinare se un fotone subirà una variazione significativa della sua energia nell'attraversare un mezzo:

$$y \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{variazione di energia frazio-} \\ \text{nale media per scattering} \end{array} \right\} \times \left( \begin{array}{l} \text{numero medio di scat-} \\ \text{tering} \end{array} \right) \quad (4.126)$$

In generale, se  $y > 1$  l'energia totale del fotone, così come il suo spettro, saranno significativamente modificati; nel caso in cui  $y \ll 1$  non avremo variazioni apprezzabili.

Cerchiamo ora di dare una stima per il primo termine di (4.126). Per convenienza supporremo che la distribuzione degli elettroni sia termica. Nel caso di elettroni non relativistici, mediando la (4.103a) sull'angolo abbiamo che

$$\frac{\Delta\epsilon'}{\epsilon'} \equiv \frac{\epsilon'_1 - \epsilon'}{\epsilon'} = -\frac{\epsilon'}{mc^2} \quad (4.127)$$

Nel SdR del laboratorio, al primo ordine nei due parametri (piccoli)  $\epsilon/mc^2$  e  $kT/mc^2$ , dobbiamo avere

$$\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} = -\frac{\epsilon}{mc^2} + \alpha \frac{kT}{mc^2} \quad (4.128)$$

dove  $\alpha$  è un certo parametro da determinare. Per calcolarlo, immaginiamo che fotoni ed elettroni siano in completo equilibrio ma che interagiscano solamente per scattering. Assumiamo

inoltre che la densità dei fotoni sia sufficientemente piccola che processi di emissione stimolata possano essere trascurati. In questo caso i fotoni devono seguire una funzione di distribuzione di Bose-Einstein con un certo potenziale chimico. Infatti, dato che per scattering non si possono né creare né distruggere fotoni, una distribuzione di Planck non può essere valida.

Per una distribuzione termica degli elettroni abbiamo che (vedi Eq. 4.91)

$$N(\epsilon) = K\epsilon^2 e^{-\epsilon/kT}$$

e quindi

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\int \epsilon \frac{dN}{d\epsilon} d\epsilon}{\int \frac{dN}{d\epsilon} d\epsilon} = 3kT \quad (4.129a)$$

$$\langle \epsilon^2 \rangle = 12(kT)^2 \quad (4.129b)$$

In questo caso specifico abbiamo che non ci può essere scambio di energia tra i fotoni e gli elettroni, quindi

$$\begin{aligned} \langle \Delta \epsilon \rangle &= 0 = \alpha \frac{kT}{mc^2} - \frac{\langle \epsilon^2 \rangle}{mc^2} \\ &= \frac{3kT}{mc^2} (\alpha - 4)kT \end{aligned}$$

da cui segue che  $\alpha = 4$ . Quindi per elettroni non relativistici in equilibrio termico, l'espressione per il trasferimento di energia per scattering è

$$\Delta \epsilon|_{NR} = \frac{\epsilon}{mc^2} (4kT - \epsilon) \quad (4.130)$$

Si noti che se gli elettroni hanno una temperatura maggiore dell'energia dei fotoni incidenti, i fotoni acquistano energia. Se invece  $\epsilon > 4kT$  allora energia viene trasferita dai fotoni agli elettroni.

Nel limite ultrarelativistico  $\gamma \gg 1$ , dalle relazioni (4.102) abbiamo che

$$\Delta \epsilon|_R \simeq \frac{4}{3} \gamma^2 \epsilon \quad (4.131)$$

dove il fattore  $\frac{4}{3}$  deriva dalla mediazione sugli angoli. Con argomenti analoghi a quelli utilizzati per ricavare le relazioni (4.129) abbiamo che

$$\langle \gamma^2 \rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{(mc^2)^2} = 12 \left( \frac{kT}{mc^2} \right)^2$$

quindi Eq. 4.131 diventa

$$\Delta\epsilon|_R \simeq 16\epsilon \left( \frac{kT}{mc^2} \right)^2 \quad (4.132)$$

Ora, il secondo termine della relazione (4.126), ricordando la discussione fatta sul random walk, (relazioni (4.33) e (4.34)), sarà dato da

$$\left( \begin{array}{c} \text{numero medio di scat-} \\ \text{tering} \end{array} \right) \simeq \max(\tau_{\text{es}}, \tau_{\text{es}}^2) \quad (4.133)$$

dove abbiamo definito la profondità ottica per scattering elettronico

$$\tau_{\text{es}} \sim \rho\kappa_{\text{es}}R \quad (4.134)$$

$\kappa_{\text{es}}$  è l'opacità per scattering elettronico, che per un gas composto da Idrogeno ionizzato vale

$$\kappa_{\text{es}} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{m_{\text{p}}} = 0.40 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (4.135)$$

mentre  $R$  è la dimensione del mezzo. Ricapitolando, l'espressione per il parametro di Comptonizzazione  $y$  per elettroni termici relativistici e non relativistici è

$$y = \max(\tau_{\text{es}}, \tau_{\text{es}}^2) \begin{cases} \left( \frac{4kT}{mc^2} \right) & \text{Non Relativistico} \\ 16 \left( \frac{kT}{mc^2} \right)^2 & \text{Relativistico} \end{cases} \quad (4.136)$$

Nel ricavare queste espressioni abbiamo trascurato il trasferimento di energia nel SdR dell'elettrone a riposo, cioè  $4kT \gg \epsilon$  nel caso non relativistico.

In situazioni in cui l'assorbimento sia un effetto importante, è conveniente definire il parametro di Comptonizzazione  $y(\nu)$  dipendente dalla frequenza. In questo caso  $\tau_{\text{es}}$  deve essere valutato a partire dalla profondità ottica effettiva  $\tau_*(\nu)$ , dell'ordine dell'unità. Quindi  $\tau_{\text{es}}(\nu) = \rho\kappa_{\text{es}}l_*(\nu)$  da cui, usando (4.39),

$$\tau_{\text{es}}(\nu) \simeq \left( \frac{\kappa_{\text{es}}/\kappa_a(\nu)}{1 + \kappa_a(\nu)/\kappa_{\text{es}}} \right)^{1/2} \quad (4.137)$$

dove  $\kappa_a(\nu)$  è l'opacità per assorbimento. Questa equazione fornisce la profondità ottica per scattering dal punto di vista di emissione di un fotone di frequenza  $\nu$ . Le definizioni del parametro di Comptonizzazione rimangono le stesse con  $\tau_{\text{es}}$  sostituito da  $\tau_{\text{es}}(\nu)$ .

#### 4.7.6 Significato fisico del parametro di Comptonizzazione $y$

L'importanza del parametro di Comptonizzazione  $y$  risiede nel fatto che esso rappresenta il fattore di amplificazione di energia nel caso di scattering Compton. Quello che ora dimostreremo è che se un fotone di energia iniziale  $\epsilon_i$  incide su di una nube composta da elettroni termici

non relativistici ad una temperatura  $T$ , allora dopo scattering Compton esso emergerà con una energia  $\epsilon_f \simeq \epsilon_i e^y$  (se ovviamente  $\epsilon_f \ll 4kT$ ).

Consideriamo quindi una nube di elettroni non relativistici mantenuta ad una temperatura  $T$ . La nube è otticamente spessa per scattering elettronico, cioè  $\tau_{es} \gg 1$ , ma nello stesso tempo è otticamente sottile per assorbimento, cioè  $\tau_*(h\nu = kT) \ll 1$ . Una grossa quantità di elettroni “soffici”, ognuno di energia caratteristica  $\epsilon_i \ll kT$  viene iniettata nella nube.

Come risultato di scattering Compton inverso, questi fotoni “soffici” emergeranno dalla nube con energia caratteristica  $\epsilon_f$ . Il trasferimento di energia in uno scattering singolo, come abbiamo visto in (4.130) è dato da

$$\Delta\epsilon = \epsilon \left( \frac{4kT}{mc^2} - \frac{\epsilon}{mc^2} \right)$$

Per fotoni di energia  $\epsilon \ll 4kT$  il trasferimento di energia può essere messo in forma differenziale

$$\frac{d\epsilon}{dN} \sim \epsilon \frac{4kT}{mc^2}$$

dove  $dN$  è il numero differenziale di scattering. Dopo  $N$  scattering, l'energia iniziale  $\epsilon_i$  di un fotone sarà

$$\epsilon_N \sim \epsilon_i \exp \left( \frac{4kT}{mc^2} N \right) \quad (4.138)$$

per  $\epsilon_N \ll 4kT$ . In un mezzo di profondità ottica  $\tau_{es} \gg 1$ , il numero di scattering prima che il fotone riesca ad uscire dalla nube è, come abbiamo visto  $\sim \tau_{es}^2$ , quindi la (4.138) diventa

$$\epsilon_f \sim \epsilon_i e^y \quad y \equiv \frac{4kT}{mc^2} \tau_{es}^2 \quad (4.139)$$

Dalla definizione del parametro di Comptonizzazione abbiamo che  $\epsilon_f$  aumenta rapidamente all'aumentare di  $\tau_{es}$ . Ad un certo punto però la profondità ottica raggiungerà un valore critico  $\tau_{crit}$  oltre il quale il processo di Comptonizzazione satura. Questo ovviamente avviene quando  $\epsilon_f \sim 4kT$ . Se poniamo questo valore nell'Eq. 4.139 otteniamo

$$\tau_{crit} = \left[ \frac{mc^2}{4kT} \ln \left( \frac{4kT}{\epsilon_i} \right) \right]^{1/2} \quad (4.140)$$

### 4.7.7 Spettro emesso per Compton inverso per scattering multipli

Abbiamo visto che si ottiene uno spettro di potenza da scattering Compton inverso di fotoni su elettroni relativistici distribuiti con legge di potenza. Questo non è una sorpresa, dato che ogni quantità scalata per un fattore che segue una legge di distribuzione di potenza avrà essa stessa una legge di distribuzione di potenza. Quello che ora faremo vedere è che possiamo ottenere uno spettro a legge di potenza anche da scattering *multipli* su elettroni **non** distribuiti a legge di potenza, ma con piccola profondità ottica per scattering.

Iniziamo con il caso più semplice in cui gli elettroni siano relativistici. Indichiamo con  $A$  il fattore di amplificazione dell'energia del fotone per scattering, cioè

$$A \equiv \frac{\epsilon_1}{\epsilon} \sim \frac{4}{3} \langle \gamma^2 \rangle = 16 \left( \frac{kT}{mc^2} \right)^2 \quad (4.141)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il risultato (4.131) valido nel caso di distribuzione termica degli elettroni. Consideriamo ora una distribuzione iniziale di fotoni di energia media  $\epsilon_i$  tale per cui  $\epsilon_i \ll mc^2 / \sqrt{\langle \gamma^2 \rangle}$ , ed intensità  $I(\epsilon_i)$  ad energia  $\epsilon_i$ . Dopo  $k$  scattering l'energia media del fotone sarà

$$\epsilon_k \sim \epsilon_i A^k \quad (4.142)$$

Se il mezzo ha una piccola profondità ottica per scattering (ed una ancora più piccola profondità ottica per assorbimento), allora la probabilità  $p_k(\tau_{\text{es}})$  che un fotone che ha subito  $k$  scattering riesca ad uscire dal mezzo è  $\sim \tau_{\text{es}}^k$ . Quindi l'intensità della radiazione emergente all'energia  $\epsilon_k$  avrà una legge di potenze della forma

$$I(\epsilon_k) \sim I(\epsilon_i) \tau_{\text{es}}^k \sim I(\epsilon_i) \left( \frac{\epsilon_k}{\epsilon_i} \right)^{-\alpha} \quad (4.143)$$

dove abbiamo definito

$$\alpha \equiv \frac{-\ln \tau_{\text{es}}}{\ln A} \quad (4.144)$$

Una analisi dettagliata dell'evoluzione dello spettro in presenza di scattering ripetuti su elettroni relativistici è molto difficile perché il trasferimento di energia per scattering è grande, dello stesso ordine di grandezza delle energie in gioco nel processo. Se però gli elettroni sono non relativistici il trasferimento di energia frazionale per scattering è in questo caso piccolo. In particolare, l'equazione di Boltzmann (che regola il comportamento della densità  $n$  dei fotoni nello spazio delle fasi dovuta a scattering di elettroni) può essere espansa al secondo ordine in questa piccola quantità dando luogo alla cosiddetta equazione di Fokker-Planck. Per fotoni scatterati da elettroni termici non relativistici l'equazione di Fokker-Planck è nota con il nome di *equazione di Kompaneets*

$$\frac{\partial n}{\partial t_c} = \left( \frac{kT}{mc^2} \right) \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 (n' + n + n^2) \right] \quad (4.145)$$

dove  $n$  è la funzione di distribuzione dei fotoni che subiscono ripetuti scattering Compton inverso non relativistici,  $n' = \partial n / \partial x$ ,  $x = h\nu / kT$ , e  $t_c = (N_e \sigma_T c) t$  è il tempo in unità di tempo medio tra scattering. In generale, Eq. 4.145 deve essere risolta numericamente.

#### 4.7.8 Regimi spettrali per scattering multipli

Una analisi dettagliata degli spettri dovuti a scattering Compton richiede la soluzione dell'equazione di Kompaneets (4.145), data una espressione per  $n$ , la sorgente dei fotoni. E' però

possibile considerare casi limite ( $y \ll 1 \rightarrow$  corpo nero modificato;  $y \gg 1 \rightarrow$  Comptonizzazione saturata), in cui una analisi approssimata è sufficiente. Per i casi intermedi (Comptonizzazione non saturata) bisognerà ritornare ad un trattamento più dettagliato.

Per poter meglio delineare i regimi di validità delle nostre approssimazioni, introduciamo delle frequenze (energie) caratteristiche. In astrofisica abbiamo a che fare con mezzi termici in cui i fenomeni di assorbimento ed emissione sono dovuti a processi di bremsstrahlung. In questo caso abbiamo visto che il peso dell'assorbimento è maggiore a bassa energia (si vedano le espressioni (4.61) e (4.62) per il coefficiente di assorbimento per scattering libero-libero). Se indichiamo con  $\nu_0$  la frequenza a cui i coefficienti di assorbimento e di scattering sono uguali, allora dalla definizione di opacità e dalle equazioni (4.135) e (4.61) abbiamo che

$$\kappa_{\text{es}} = \kappa_{\text{ff}}(\nu_0) \quad (4.146a)$$

$$\frac{x_0^3}{1 - e^{-x_0}} \sim 4 \cdot 10^{25} T^{-7/2} \rho \bar{g}_{\text{ff}}(x_0) \quad (4.146b)$$

dove abbiamo definito  $x_0 \equiv h\nu_0/kT$  e  $\bar{g}_{\text{ff}}(x)$  è il fattore di Gaunt libero-libero. Nel nostro intervallo di interesse  $\bar{g}_{\text{ff}}(x)$  è approssimato dalla espressione

$$\bar{g}_{\text{ff}}(x) \sim \frac{3}{\pi} \ln \left( \frac{2.25}{x} \right)$$

Se  $x < x_0$  allora lo scattering sarà trascurabile, mentre per  $x > x_0$  lo scattering modificherà lo spettro. Si noti che se  $x_0 \gtrsim 1$  allora lo scattering può essere trascurato lungo la maggior parte dello spettro. Nella discussione che seguirà assumeremo che  $x_0 \ll 1$ .

Consideriamo ora la frequenza  $\nu_t$  a cui il mezzo diventa effettivamente sottile (traslucido). Dalle equazioni (4.61) e (4.40) abbiamo che

$$\kappa_{\text{es}} = \kappa_{\text{ff}}(\nu_t) \tau_{\text{es}}^2 \quad (4.147a)$$

$$\frac{x_t^3}{1 - e^{-x_t}} \sim 4 \cdot 10^{25} T^{-7/2} \rho \bar{g}_{\text{ff}}(x_t) \tau_{\text{es}}^2 \quad (4.147b)$$

dove  $x_t \equiv h\nu_t/kT$  e  $\tau_{\text{es}}$  è la profondità ottica totale per scattering elettronico definita in (4.134). Per  $x > x_t$  l'assorbimento è trascurabile. Nell'intervallo  $x_0 < x < x_t$  sia lo scattering che l'assorbimento sono importanti.

Infine introduciamo la frequenza  $\nu_{\text{coe}}$  a cui lo scattering incoerente (inelastico, cioè effetti dovuti a Compton inverso) diventa importante.

Questa energia è definita in modo che il parametro di Comptonizzazione  $y(\nu_{\text{coe}}) = 1$ . Cioè per  $\nu > \nu_{\text{coe}}$  il processo di scattering Compton inverso diventa importante tra l'emissione e l'uscita dal mezzo. Si noti che questa frequenza è definita soltanto se il parametro  $y > 1$  (altrimenti Compton inverso è trascurabile ad ogni frequenza). Dalle equazioni (4.136), (4.137) e (4.61), per  $x_{\text{coe}} \ll 1$

$$\kappa_{\text{es}} = \left( \frac{mc^2}{4kT} \right) \kappa_{\text{ff}}(\nu_{\text{coe}}) \quad (4.148a)$$

$$x_{\text{coe}} \sim 2.4 \cdot 10^{17} \rho^{1/2} T^{-9/4} [\bar{g}_{\text{ff}}(x_{\text{coe}})]^{1/2} \quad (4.148b)$$

Dalle equazioni (4.147b) e (4.148b) segue che scattering Compton inverso è importante e  $x_{\text{coe}}$  è definito solamente quando  $x_{\text{coe}} < x_t$ .

Una volta definite queste energie, vediamo di studiare diversi casi limite per gli spettri di Comptonizzazione.

□ **Corpo nero modificato:**  $y \ll 1$

Nel caso in cui  $y \ll 1$  allora solo scattering coerente è importante. In questo caso è possibile dimostrare che l'intensità della radiazione emergente in un mezzo semi-infinito in cui siano presente sia scattering che assorbimento ha la forma

$$I_\nu = \frac{2B_\nu}{1 + \sqrt{\frac{\kappa_{\text{ff}} + \kappa_{\text{es}}}{\kappa_{\text{ff}}}}} \quad (4.149)$$

Nel limite  $x \ll x_0$  abbiamo che la (4.149) si riduce all'intensità di corpo nero, mentre per  $x \gg x_0$  la (4.149) diventa un corpo nero "modificato"

$$\begin{aligned} I_\nu^{\text{MB}} &\equiv 2B_\nu \sqrt{\frac{\kappa_{\text{ff}}}{\kappa_{\text{es}}}} \\ &= 8.4 \cdot 10^{-4} T^{5/4} \rho^{1/2} \bar{g}_{\text{ff}}^{-1/2} x^{3/2} e^{-x/2} (e^x - 1)^{-1/2} \end{aligned} \quad (4.150)$$

dove  $I_\nu^{\text{MB}}$  è misurata in  $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{Ster}^{-1}$ . Per  $x_0 \ll 1$  Eq. 4.146b ci fornisce una equazione approssimata per  $x_0$ :

$$x_0 \sim 6.3 \cdot 10^{12} T^{-7/4} \rho^{1/2} [\bar{g}_{\text{ff}}(x_0)]^{1/2} \quad (4.151)$$

Si noti che nell'intervallo  $x_0 \ll x \ll 1$   $I_\nu^{\text{MB}} \propto \nu$  invece della legge di Rayleigh-Jeans  $I_\nu^{\text{RJ}} \propto \nu^2$ .

L'Equazione 4.149 vale solamente per un mezzo semi-infinito. Nel caso di un mezzo finito bisogna determinare il valore di  $x_t$ . Se  $x_t < x_0$  l'emissione è di corpo nero per  $x < x_t$  ed un bremsstrahlung otticamente sottile per  $x > x_t$  (lo scattering non è mai importante). Per  $x_0 < x_t < 1$  l'emissione è correttamente descritta da (4.149) per  $x < x_t$  e poi diventa bremsstrahlung otticamente sottile per  $x > x_t$ . Per  $x_t > 1$  il mezzo si comporta come se fosse infinito, e (4.149) può essere usata per l'intero spettro.



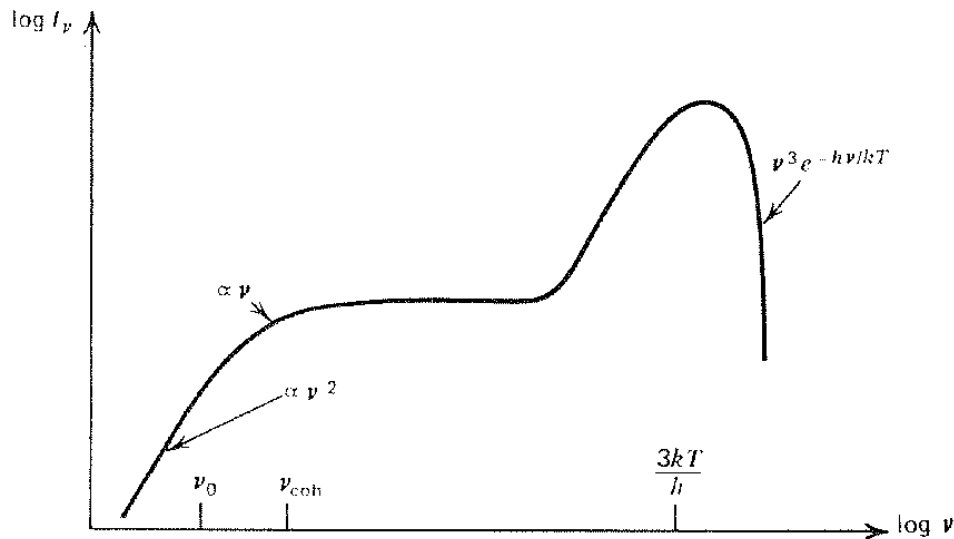


Figura 4.11: Spettro emergente da un mezzo termico, non relativistico caratterizzato da emissione ed assorbimento libero-libero e da scattering Compton inverso saturato. A basse frequenze lo spettro è un corpo nero, poi diventa un corpo nero modificato e ad alte frequenze diventa uno spettro di Wien.

□ **Spettro di Wien:**  $y \gg 1$

Quando  $y \gg 1$ , Compton inverso può essere importante, a seconda che  $x_{\text{coe}} \ll 1$  o  $x_{\text{coe}} \gg 1$ . Nell'ultimo caso Compton inverso può essere trascurato, dato che la maggior parte dei fotoni subisce scattering coerente. Lo spettro avrà in questo caso la forma di un corpo nero modificato. Per  $x_{\text{coe}} \ll 1$ , dalle relazioni (4.146b) e (4.148b), abbiamo

$$x_{\text{coe}} = \left( \frac{mc^2}{4kT} \right)^{1/2} x_0 \quad (4.152)$$

Lo spettro è descritto correttamente dalla (4.149) per  $x \ll x_{\text{coe}}$ , ma per  $x \gtrsim x_{\text{coe}}$  dobbiamo considerare effetti di scattering Compton inverso (si veda Figura 4.11). In questa regione dello spettro, se  $x_{\text{coe}} \ll 1$ , Compton inverso sarà saturato producendo uno spettro di Wien

$$I_\nu^W = \frac{2h\nu^3}{c^2} n = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\alpha} e^{-h\nu/kT} \quad (4.153)$$

dove il fattore  $e^{-\alpha}$  è funzione del tasso di produzione dei fotoni.

Il flusso totale emesso nello spettro (4.153) è

$$F^W(\text{erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-2}) = \pi \int I_\nu^W d\nu = \frac{12\pi e^{-\alpha} (kT)^4}{c^2 h^3} \quad (4.154)$$

mentre l'energia media del fotone è  $\bar{h\nu} = 3kT$ .

#### □ Comptonizzazione non saturata

Consideriamo infine il caso in cui  $y \gg 1$  ma in cui  $x_{\text{coe}} \sim 1$ , cioè mezzi in cui il processo di Compton inverso è importante ma in cui lo spettro non satura allo spettro di Wien. In questo caso è necessaria una analisi dell'equazione di Kompaneets (4.145). Senza entrare nei dettagli è possibile fare vedere come una soluzione di (4.145) in cui abbiamo un input di fotoni "soffici" ha la forma di una legge di potenza

$$\begin{aligned} n &\propto x^m \\ m(m+3) &= \frac{4}{y} \\ m &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4}{y}} \end{aligned} \quad (4.155)$$

e dove  $y$  è il parametro di Comptonizzazione definito in (4.136). La radice positiva è appropriata se  $y \gg 1$ ; per  $y \ll 1$  è invece appropriata la radice negativa. Per  $y \sim 1$  bisogna prendere una combinazione lineare delle due soluzioni e non esiste una soluzione a legge di potenza.

Dalla misura della pendenza dello spettro di Comptonizzazione non saturata con fotoni "soffici" si possono determinare sia la temperatura degli elettroni che la profondità ottica di scattering della sorgente.

Lo spettro da Comptonizzazione non saturata è mostrato in Figura 4.12. L'intensità emergente nel regime di legge di potenza soddisfa la

$$I_\nu \sim I_{\nu_s} \left( \frac{\nu}{\nu_s} \right)^{3+m} \quad (4.156)$$

Lo spettro è molto sensibile alle variazioni in  $y$ . L'energia iniziale dei fotoni è significativamente amplificata per  $m \geq -4$ , cioè se  $y \geq 1$ , analogamente a quanto abbiamo visto nel caso relativistico.

## 4.8 Spettro di ricombinazione ed emissione di righe

Come abbiamo visto nella Sezione 4.5, quando avviene un processo di bremsstrahlung un elettrone libero di energia  $E_i$  incontra uno ione di carica  $Ze$  ed emette un fotone di energia  $E$ .

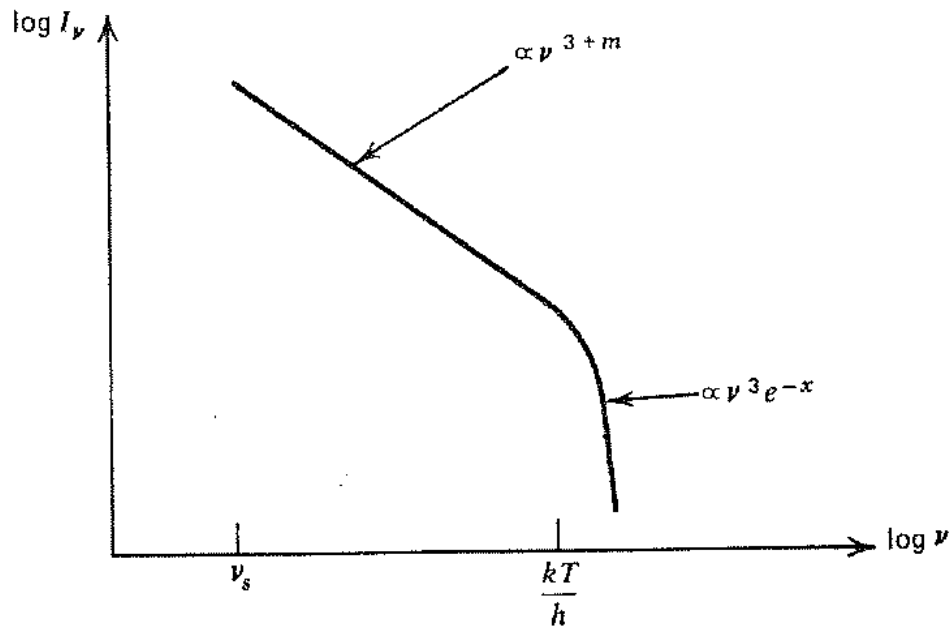


Figura 4.12: Spettro prodotto da Comptonizzazione non saturata di fotoni di bassa energia su elettroni termici.

L'elettrone si troverà allora in uno stato finale  $E_f$  e, per conservazione dell'energia, il fotone emesso avrà energia  $E = E_i - E_f$ . Se invece l'elettrone viene catturato dallo ione in uno stato legato (*bound*) di energia  $-I_{Z-1,n}$ , si dice che l'elettrone si è *ricombinato* con lo ione. Sempre per conservazione dell'energia avremo che verrà emesso un fotone di energia

$$E = E_i + I_{Z-1,n} \quad (4.157)$$

Dato che  $E_i$  è una variabile continua e positiva, l'energia del fotone può assumere qualsiasi valore maggiore di  $-I_{Z-1,n}$ , quindi lo spettro di ricombinazione sarà uno spettro continuo, con delle discontinuità (*edges*) per  $E = I_{Z-1,n}$ .

Per calcolare lo spettro sarà quindi necessario calcolare la ricombinazione ai singoli livelli  $I_{Z-1,n}$ .

Nel limite in cui  $E_f$  e  $I_{Z-1,n} \rightarrow 0$ , le sezioni d'urto per bremsstrahlung e per ricombinazione tendono ad essere uguali. Possiamo usare questa proprietà per calcolare una espressione per la sezione d'urto per ricombinazione in ioni idrogenoidi che risulterà accurata anche per catture allo stato fondamentale. Poniamo quindi

$$\Delta\sigma_B = \left( \frac{d\sigma_B}{dE} \right) \Delta E = \Delta\sigma_R \quad (4.158)$$

dove  $\sigma_B$  è la sezione d'urto per bremsstrahlung e  $\sigma_R$  quella per ricombinazione. La variazione di energia dell'elettrone sarà

$$\Delta E = \Delta I_{Z-1,n} = 2 Z^2 I_H \left( \frac{\Delta n}{n^3} \right) \quad (4.159)$$

dove  $I_H$  è il potenziale di ionizzazione dell'idrogeno e  $n$  è il livello atomico dello ione di carica  $Z - 1$  dove si va a collocare il nostro elettrone.

Utilizzando queste due espressioni possiamo scrivere

$$\frac{\Delta \sigma_R}{\Delta n} = \sigma_R(n) = \frac{2^5 \pi}{3\sqrt{3}} Z^2 \alpha^3 \lambda_e^2 \left( \frac{Z^2 I_H}{E} \right) \frac{g_R(n)}{n^3} \quad (4.160)$$

dove  $g_R(n)$  è il fattore di Gaunt per ricombinazione, dell'ordine dell'unità entro il 10%,  $\alpha = e^2/\hbar c$  è la costante di struttura fine, e  $\lambda_e = h/mv$  è la lunghezza d'onda di de Broglie per l'elettrone. Per una distribuzione di velocità Maxwelliana degli elettroni, lo spettro di ricombinazione dovuto a cattura nel livello  $n$  dello ione  $Z - 1$ , ricordando la (4.57), diventa

$$\frac{dP_{R,Z,n}}{dV dE} = 2.8 \cdot 10^{-6} T^{-3/2} n^{-3} N_e N_Z Z^4 \exp\left(-\frac{E - I_{Z-1,n}}{kT}\right) \text{ erg cm}^{-3} \text{ sec erg} \quad (4.161)$$

Per ioni non idrogenoidi l'energia di ionizzazione sarà  $I_{Z,z,n}$  dove  $Z$  è la carica nucleare e  $z$  è la carica totale dello ione. Lo spettro di ricombinazione in ioni non idrogenoidi può essere approssimato ponendo  $Z^2 I_H/n^2 = I_{Z,z-1,n}$  e moltiplicando Eq. 4.161 per un fattore  $s/2n^2$  che rappresenta la frazione incompleta della shell  $n$ .

Per ottenere lo spettro di un plasma composto da una miscela di ioni  $Z$  e stati di ionizzazione  $z$  basta sommare l'Equazione 4.161 su tutti gli ioni e tutti i livelli  $n$  per cui  $I_{Z,z-1,n} > E$ , ottenendo

$$\frac{dP_R}{dV dE} = 2.8 \cdot 10^{-6} T^{-3/2} N_e N_H e^{-E/kT} X \text{ erg cm}^{-3} \text{ sec erg} \quad (4.162)$$

dove abbiamo definito

$$X = \sum_{Z,z,n} \left( \frac{N_{Z,z+1}}{N_Z} \right) \left( \frac{N_Z}{N_H} \right) \left( \frac{s}{2n^2} \right) \left( \frac{I_{Z,z,n}}{I_H} \right)^2 n \exp\left(\frac{I_{Z,z,n}}{kT}\right) \quad (4.163)$$

e  $N_{Z,z}$  è la densità degli ioni di carica nucleare  $Z$  e carica ionica totale  $z$ . La somma va ovviamente compiuta su tutti gli ioni e su tutti i livelli  $n$  per cui  $I_{Z,z,n} > E$ . Per ogni data temperatura soltanto una decina di termini contribuiscono alla sommatoria.

Un confronto tra la potenza emessa per bremsstrahlung (Eq. 4.57) e la (4.162) mostra che il loro rapporto è dato da

$$\frac{dP_R/dV dE}{dP_B/dV dE} = \frac{2X}{S} \frac{I_H}{kT} \simeq \frac{10^{-1} X}{T_6} \quad (4.164)$$

dove  $S$  è una sommatoria che tiene conto del contributo di tutti gli ioni

$$S = \sum N_e N_Z Z^2 \quad (4.165)$$

e  $T_6$  è la temperatura in unità di  $10^6$  K. Per abbondanze cosmiche degli elementi ( $\sim 90\%$  Idrogeno,  $\sim 10\%$  Elio,  $\sim 1\%$  elementi pesanti) il contributo alla somma viene dato dall'Idrogeno e dall'Elio, che sono completamente ionizzati a queste temperature. Per questo una buona approssimazione della (4.165) è  $S \simeq 1.4 N_e$ . Dall'Eq. 4.164, vediamo che per una data temperatura  $T_6$  abbiamo che la ricombinazione domina bremsstrahlung a lunghezze d'onda al di sotto di circa  $30/T_6$  Å. Per lunghezze d'onda maggiori di questo valore il processo dominante diventa bremsstrahlung.

Al contrario del processo di ricombinazione, in cui un elettrone libero viene catturato da uno ione con emissione di energia, il processo di emissione di riga corrisponde alla transizione radiativa da uno stato che si trova eccitato o per collisione o per ricombinazione. Se la transizione coinvolge la shell più interna di un atomo di carica nucleare  $Z \geq 8$  il fotone di transizione avrà una energia nella banda del keV.

Partiamo dal caso in cui il plasma sia termico e ad alta temperatura (tratteremo il caso non termico in seguito). In questo caso righe di emissione sono prodotte principalmente come risultato di eccitazioni collisionali di elettroni. La sezione d'urto di questo processo può essere stimata combinando il risultato classico per l'energia trasferita in una collisione Coulombiana tra due elettroni con il risultato quantistico che il trasferimento può avvenire solamente in quantità discrete.

La sezione d'urto per un trasferimento di energia  $\Delta E$  è

$$\sigma(\Delta E_Z) \sim \pi b^2 \sim \frac{2\pi e^4}{mv^2 \Delta E_Z} = \frac{4\pi a_0^2 I_H^2}{E \Delta E_Z} \quad (4.166)$$

dove  $b$  è il parametro di impatto della collisione, definito in Sezione 3.3, e  $a_0 = h^2/4\pi^2 m e^2$  è il raggio della prima orbita di Bohr. Il risultato esatto ottenuto con l'applicazione della meccanica quantistica può essere espresso nella stessa forma della (4.166)

$$\sigma(\Delta E_{Z,nn'}) = \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}} \frac{a_0^2 I_H^2}{E \Delta E_{Z,nn'}} f(Z, nn') \bar{g}(Z, nn', E) \quad (4.167)$$

dove  $\Delta E_{Z,nn'}$  è l'energia di eccitazione,  $f(Z, nn')$  la forza di oscillatore di dipolo per la transizione, e  $\bar{g}(Z, nn', E)$  il fattore di Gaunt effettivo il cui valore, per ioni idrogenoidi, è dell'ordine di 0.2.

Per una distribuzione di velocità degli elettroni Maxwelliana, la potenza emessa per unità di volume dovuta ad eccitazioni del livello  $n'$  dello ione  $Z$  allo stato fondamentale  $n$  a causa di collisioni Coulombiane è

$$\begin{aligned} \frac{dP_L}{dV} &= N_e N_Z \Delta E \int \sigma(v) v f(v) dv \\ &= 2.7 \cdot 10^{-15} T^{-1/2} N_e N_Z f \bar{g} e^{-\Delta E/kT} \text{ erg cm}^{-3} \text{ sec}^{-1} \end{aligned} \quad (4.168)$$

In alcuni casi la riga è prodotta da un decadimento non allo stato fondamentale ma ad uno stato intermedio. In questo caso l'energia di eccitazione non sarà uguale all'energia della riga e bisognerà introdurre in (4.168) la frazione dei decadimenti che danno origine allo stato di

Tabella 4.1: Dati atomici usati per il calcolo dell'intensità delle righe

Ione	Transizione	Lunghezza d'onda (Å)	Energia Eccitazione (eV)	Forza Collisionale Effettiva
C <sub>VI</sub>	1s-3p	28.5	435	0.006
	1s-2p	33.7	368	0.042
C <sub>V</sub>	1s <sup>2</sup> -1s3p	35.0-35.1	353	0.014
	1s <sup>2</sup> -1s2p( <sup>1</sup> P)	40.3	308	0.084
	1s <sup>2</sup> -1s2p( <sup>3</sup> P)	40.7	306	0.008
	1s <sup>2</sup> -1s2s( <sup>3</sup> S)	41.5	300	0.089
N <sub>VII</sub>	1s-3p	20.9	593	0.005
	1s-2p	24.8	500	0.031
N <sub>VI</sub>	1s <sup>2</sup> -1s3p	24.9-25.0	496	0.010
	1s <sup>2</sup> -1s2p( <sup>1</sup> P)	28.8	430	0.056
	1s <sup>2</sup> -1s2p( <sup>3</sup> P)	29.1	425	0.010
	1s <sup>2</sup> -1s2s( <sup>3</sup> S)	29.5	420	0.063
O <sub>VIII</sub>	1s-3p	16.0	775	0.005
	1s-2p	19.0	653	0.023
O <sub>VII</sub>	1s <sup>2</sup> -1s3p	18.7	663	0.009
	1s <sup>2</sup> -1s2p( <sup>1</sup> P)	21.6	575	0.056
	1s <sup>2</sup> -1s2p( <sup>3</sup> P)	21.8	570	0.010
	1s <sup>2</sup> -1s2s( <sup>3</sup> S)	22.1	560	0.063

interesse (il cosiddetto *branching ratio*). Comunque per le transizioni 1s-2p in ioni idrogenoidi ed elio-idi, che sono le più importanti per le nostre considerazioni, questa fattore è trascurabile. Per calcolare la intensità della riga in funzione della temperatura è necessario conoscere la densità, le abbondanze degli elementi  $N_Z$ , l'equilibrio di ionizzazione che mi fornisce la frazione dell'elemento  $N_Z$  nello stato di ionizzazione di interesse, la forza dell'oscillatore (o equivalentemente la forza di collisione), e le energie delle righe. Questo problema implica la raccolta di una quantità enorme di dati atomici, alcuni dei quali non sono molto ben conosciuti. Comunque, per ioni idrogenoidi e elio-idi questi numeri sono disponibili in letteratura. Le energie di eccitazione e i branching ratios per alcune transizioni sono mostrate in Tabella 4.1 mentre le intensità di alcune delle righe più intense in funzione della temperatura sono mostrate in Figura 4.13.

In Figura 4.14 mostriamo l'energia per radiazione dovuta a bremsstrahlung (B), ricombinazione (R) ed emissione di righe (L) per un gas termico, da cui si vede come lo spettro passi gradualmente da uno spettro di righe a piccole lunghezze d'onda ad uno spettro continuo. Si noti come l'energia rimanga quasi costante  $\sim 2 \cdot 10^{-23}$  erg sec<sup>-1</sup> cm<sup>-3</sup> per  $T$  nell'intervallo  $10^6-10^8$  K.

Accenniamo brevemente al fatto che possono esserci situazioni in cui il plasma che emette righe nella banda X non sia termico: ad esempio, il processo di interazione tra un nucleo di un raggio cosmico ed un atomo di idrogeno. Se il nucleo ha carica  $Z \geq 8$  allora l'elettrone catturato si dis-ecciterà emettendo una riga nella banda X. La sezione d'urto per questo processo decade rapidamente con l'energia ( $\propto E^{-1}$ ) per energie maggiori di 2 MeV. Al di sotto di 2 MeV il processo diventa meno efficiente, quindi la maggior parte del contributo viene da nuclei di

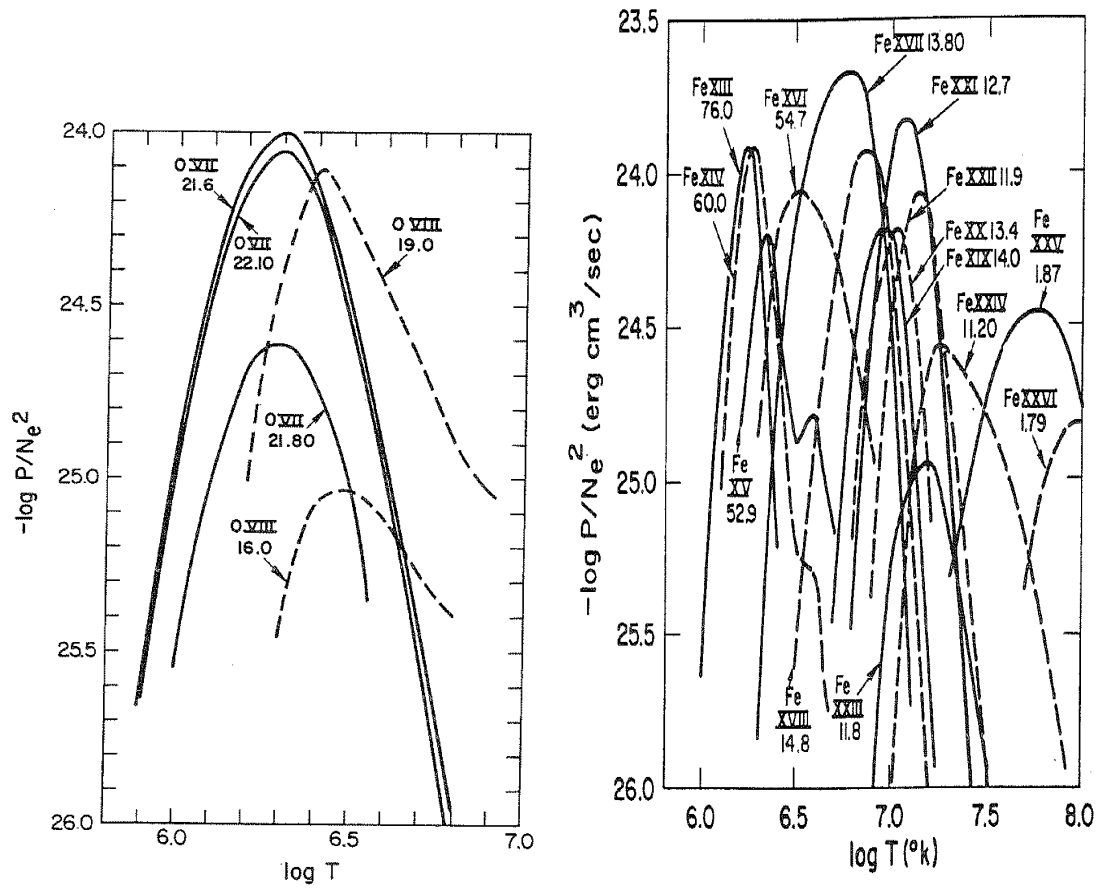


Figura 4.13: Intensità delle righe in funzione della temperatura per gli atomi di Carbonio e Ferro in diversi stati di ionizzazione.

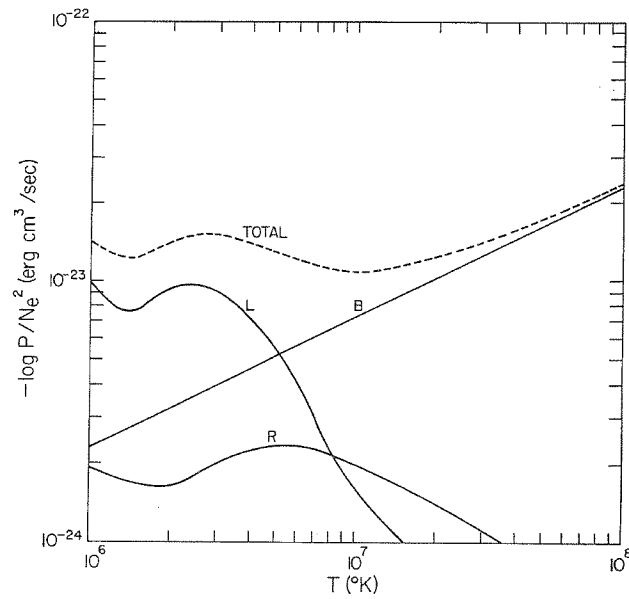


Figura 4.14: Emissione totale ( $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-3}$ ) per un plasma termico, con abbondanze coronali, a causa di emissione per bremsstrahlung (B), ricombinazione (R) e in righe (L) in funzione della temperatura.

$\sim 2$  MeV, con efficienza  $\sim 10^{-5}$ .



# Capitolo 5

## Tecniche di Osservazione

### 5.1 Introduzione

Gli esperimenti per lo studio dell'emissione nella banda X da parte di oggetti celesti devono confrontarsi con due realtà: (i) a causa dell'effetto di schermo della nostra atmosfera, gli strumenti devono essere portati a grandi altezze (vedi Figura 5.1); (ii) i fotoni X possiedono una tale energia che la loro interazione con la materia produce un effetto osservabile.

In generale i dati dell'astronomia X saranno nella forma di numero di eventi (conteggi) misurati in un certo intervallo temporale, o il tempo di arrivo per un certo evento. Questi conteggi sono molto piccoli: ad esempio, il flusso della sorgente più brillante del cielo X, Sco X-1, è circa 100 fotoni  $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ . La seconda sorgente più brillante, la Nebulosa del Granchio, è soltanto un decimo di questa.

Il fatto che i rivelatori debbono essere portati al di sopra dell'atmosfera, fa sì che vi siano un certo numero di eventi significativi che non appartengono all'emissione della sorgente, ma che fanno da *fondo* e debbono essere discriminati dall'emissione di sorgente: ad esempio raggi X e  $\gamma$  dovuti alla interazione dei raggi cosmici con la nostra atmosfera.

Per cercare di limitare questa sorgente di fondo sono stati studiati dispositivi di collimazione meccanica, in modo da limitare il campo di vista del rivelatore, o tecniche di anti-coincidenza. Per basse energie sono inoltre a disposizione anche sistemi di focalizzazione, in modo da aumentare il rapporto segnale/rumore.

### 5.2 Rivelatori per astronomia X

Il principio di funzionamento di una classe di rivelatori di raggi X utilizzati in astronomia si basa sull'assorbimento (scattering) di fotoni incidenti provenienti dalle sorgenti celesti con il materiale del rivelatore. Questi raggi X generano un elettrone che trasporta una qualche frazione dell'energia del fotone. Questo elettrone produce elettroni secondari che possono essere rivelati come una corrente, oppure luce visibile che può essere rivelata in un fotomoltiplicatore.

I contatori proporzionali sono usati principalmente per rivelare energia al di sotto dei 20 keV,

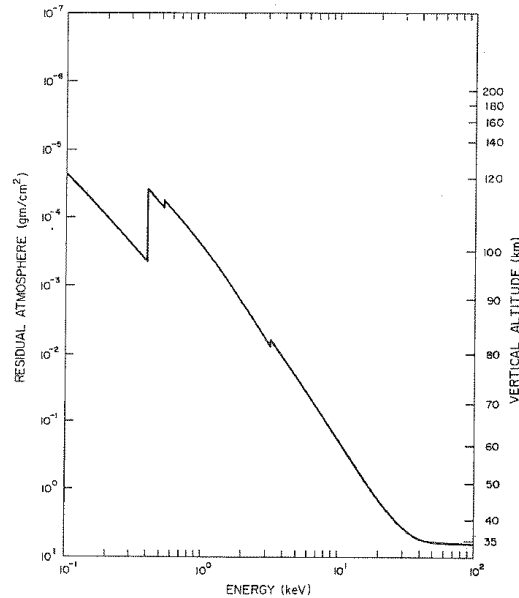


Figura 5.1: L'atmosfera terrestre attenua raggi X incidenti per assorbimento fotoelettrico e, al di sopra dei 30 keV, per scattering Compton. Questa curva rappresenta una profondità ottica unitaria in funzione dell'energia. La scala sulla sinistra indica la densità colonnare atmosferica sulla verticale che produce l'attenuazione di una profondità ottica, mentre sulla destra la scala indica l'altezza minima richiesta per produrre almeno questa attenuazione. Le discontinuità sono dovute agli *edges* di Azoto, Ossigeno ed Argon.

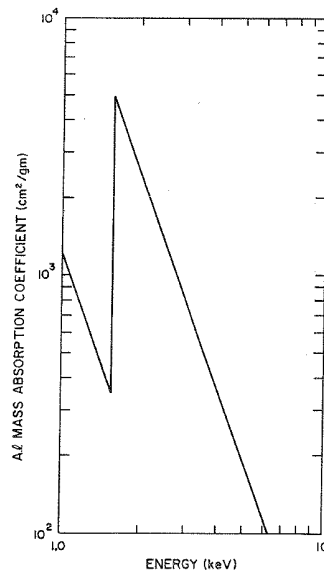


Figura 5.2: Coefficiente di assorbimento per unità di massa per l'Alluminio. Nell'intervallo di energia mostrato, tutto l'assorbimento è dovuto ad effetto fotoelettrico. L'assorbimento mostra una discontinuità a 1.56 keV perché un fotone X di maggiore energia può espellere un elettrone della shell  $K$ .

mentre contatori a scintillazione vengono usati al di sopra dei 10 keV. Possono inoltre essere utilizzati rivelatori a semiconduttore.

Vediamo ora di descrivere in dettaglio l'interazione tra i raggi X incidenti ed il materiale che compone il rivelatore. Fino ad una certa energia e a seconda del numero atomico  $Z$  del materiale avremo che il processo principale per cui il fotone X viene assorbito è *assorbimento fotoelettrico*. In questo processo si ha l'espulsione dell'elettrone più interno che è energeticamente permesso.

L'energia dell'elettrone sarà  $E_x - E_s$  dove  $E_x$  è l'energia del fotone X incidente ed  $E_s$  l'energia della shell. Ad esempio, nell'Alluminio  $E_s = 1.56$  keV per elettroni della shell  $K$ . Ovviamente la transizione avverrà solamente se  $E_x \geq E_s$ . Se il fotone X possiede una energia leggermente inferiore non riuscirà ad estrarre l'elettrone dalla shell  $K$ , ma uno dalla shell  $L$  e quindi vi sarà una discontinuità (*edge*) nella sezione d'urto di assorbimento, come mostrato in Figura 5.2. Il salto è di circa un fattore 10. A parte queste discontinuità, la sezione d'urto ha un andamento  $\propto E^{-3} Z^4$ .

A seguito dell'emissione dell'elettrone, l'atomo si trova in uno stato eccitato e può liberare l'eccesso di energia  $E_s$  in due modi: può rilasciare una cascata di fotoni, uno dei quali potrebbe essere nella banda X con una energia vicina a  $E_s$ . In questo caso si parla di fluorescenza. Alternativamente, può emettere un secondo elettrone di energia prossima a  $E_s$  dovuto alla redistribuzione degli elettroni nei livelli atomici (effetto Auger). Il rapporto delle probabilità dei due tipi di processi (fluorescenza e Auger) va come  $Z^{-4}$ , quindi per elementi leggeri prevarrà l'effetto Auger mentre per quelli pesanti prevarrà la fluorescenza. Nel caso dell'Alluminio, la

probabilità che venga emesso un elettrone di Auger a causa dell'assorbimento di un fotone X di energia maggiore di 1.56 keV è il 96%.

Esiste però una probabilità significativa che il fotone X venga scatterato dagli elettroni atomici piuttosto che essere assorbito. Come abbiamo visto, per fotoni di bassa energia questo non è altro che scattering Thomson, la cui sezione d'urto (vedi Eq. 1.2) è  $6.7 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ , indipendente dall'energia. Ad alta energia lo scattering risulta in una variazione della frequenza del fotone (effetto Compton) e trasferimento di energia all'elettrone che funge da diffusore. Come abbiamo visto, la condizione affinché vi sia scattering Compton è che l'energia del fotone sia minore di  $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ . Per un atomo contenente  $Z$  elettroni, la sezione d'urto sarà  $Z$  volte maggiore. In riferimento alla Figura 5.1, scattering Compton è responsabile dell'assorbimento al di sopra dei 40 keV.

Il terzo processo di assorbimento di raggi X è la creazione di coppie, che non può avvenire al di sotto di 1.02 MeV, due volte l'energia a riposo dell'elettrone, ed è per questo che non ce ne occuperemo.

Per descrivere l'assorbimento dei fotoni X nel materiale si utilizza la relazione (vedi Eq. 2.13)

$$I = I_0 \exp(-\mu x) \quad (5.1)$$

dove  $I_0$  è il flusso incidente,  $I$  è il flusso rimanente dopo l'attraversamento di una quantità di materiale di densità colonnare  $x \text{ g cm}^{-2}$  (si veda la discussione prima di Eq. 3.37) e  $\mu$  è il coefficiente di assorbimento per unità di massa, in unità di  $\text{cm}^2 \text{ g}^{-1}$ .

La quantità  $\mu$  è legata alla sezione d'urto attraverso la relazione

$$\mu \equiv \frac{\sigma N_0}{A_x} \quad \text{cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (5.2)$$

dove  $N_0$  è il numero di Avogadro<sup>1</sup> e  $A_x$  è il peso atomico del materiale. Si noti come sotto certe condizioni la (5.1) possa dare risultati non corretti dato che fotoni non sono necessariamente rimossi dal fascio dalle interazioni con il materiale.

### 5.2.1 Contatori proporzionali

Un contatore proporzionale consiste essenzialmente di un gas e da elettrodi che sono sistemati in maniera tale per cui viene creato un forte gradiente di campo elettrico vicino agli elettrodi positivi che generalmente hanno la forma di fili. Il catodo può anche essere utilizzato come contenitore del gas e struttura principale del rivelatore, e contiene una sottile finestra di entrata per i fotoni X. In Figura 5.3 viene mostrata una configurazione tipica.

Un fotone X che è assorbito nel gas ionizza un atomo, che reagisce espellendo un foto-elettrone, seguito dall'espulsione di un elettrone Auger ed il rilascio di fotoni di fluorescenza. Il foto-elettrone interagirà con il gas dando luogo ad una ulteriore coppia elettrone-ione. Alla fine la sua energia verrà dissipata ed una nube di coppie elettrone-ione si formerà lungo il suo percorso. Anche gli elettroni Auger interagiranno con il gas ed anche loro formeranno coppie

<sup>1</sup>Numero di atomi contenuti in un grammo-atomo, che è la quantità di sostanza chimicamente semplice la cui massa è uguale al suo peso atomico.  $N_0 = 6.023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

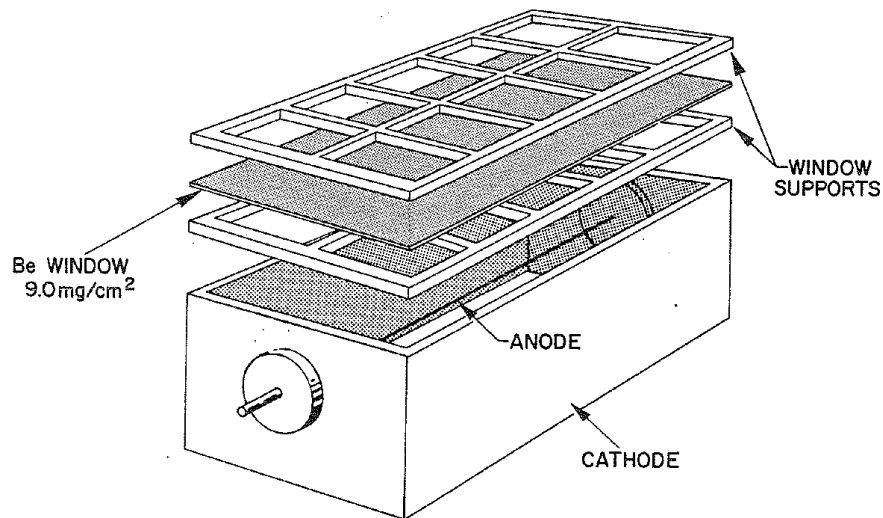


Figura 5.3: Configurazione tipica di un contatore proporzionale. La finestra di Berillio viene cementata in una struttura di supporto a *sandwich* che viene a sua volta saldata ermeticamente sul catodo per preservare l'integrità del gas. L'anodo viene tenuto in tensione da una molla. Un preamplificatore ed un generatore di alta tensione vengono montati il più vicino possibile all'ingresso dell'anodo.

elettrone-ione. Se i fotoni di fluorescenza non possono uscire dal contatore, allora il numero totale di coppie elettrone-ione sarà in media proporzionale all'energia del fotone incidente.

Gli elettroni secondari, sotto l'influenza del forte campo elettrico, si sposteranno verso l'anodo nelle cui vicinanze vi sarà una ulteriore ionizzazione del gas, con la conseguente formazione di ulteriori elettroni secondari. Il numero di elettroni continua perciò ad aumentare fino a quando non sono raccolti sull'anodo. Il moto degli elettroni verso il filo centrale produce, per induzione, il segnale misurato sul catodo. In questo modo si riesce ad ottenere un guadagno tra  $10^3$  a  $10^5$ . Per avere il massimo guadagno si utilizzano gas nobili, in modo da ridurre al massimo meccanismi di perdita di energia non dovuti a ionizzazione, quali eccitazione di stati rotazionali o vibrazionali molecolari. Un gas nobile *puro* è però un contatore instabile, dato che piccolissime tracce di impurità possono dominare il comportamento del gas. Inoltre un gas nobile è trasparente alla radiazione ultravioletta emessa dagli atomi eccitati del gas nobile che hanno energia sufficiente per espellere elettroni dal catodo ed iniziare una nuova sequenza di moltiplicazione. Nel processo di moltiplicazione degli elettroni gli atomi di un gas nobile potrebbero essere eccitati in stati metastabili di lunga vita media, i quali si dis-eccitano con collisioni con le pareti del contatore. Per assorbire questa radiazione ultravioletta e dis-eccitare gli stati metastabili viene aggiunto al gas nobile un gas poliatomico, come metano, propano, alcol. Questo gas viene chiamato *quenching gas* (*smorzatore*). L'introduzione del quenching gas non introduce cascate di elettroni, dato che il libero cammino medio per questi eventi è piccolo.

L'efficienza di rivelazione di un contatore è la probabilità che un fotone non venga assorbito nella finestra e sia così assorbito nel gas. Dato che la sezione d'urto per effetto fotoelettrico,

nella banda al di sotto del 20 keV, è proporzionale a  $Z^4 E^{-8/3}$ , è importante avere **una finestra sottile di basso  $Z$  ed un gas spesso di alto  $Z$** . Per energie nella banda 1–10 keV viene utilizzato il Berillio come elemento costituente la finestra. Per energie più basse bisogna usare altri materiali, per poter rendere le finestre più sottili, come formvar, polipropilene. Il problema è però che questi film sottili non sono in grado di trattenere il gas, quindi in questi casi è necessaria una riserva di gas.

L'efficienza di un contatore proporzionale nella rivelazione di un fotone X di energia  $E$  è

$$\epsilon(E) = \exp\left(-\frac{t_w}{\lambda_w}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\lambda_g}\right)\right] \quad (5.3)$$

dove  $t_w$  e  $t_g$  sono lo spessore della finestra e del gas, e  $\lambda_w$  e  $\lambda_g$  sono il libero cammino medio di assorbimento nella finestra e nel gas all'energia  $E$ .

La carica che viene raccolta all'anodo è proporzionale al numero iniziale di elettroni secondari ed al guadagno, e può essere usata per misurare l'energia del fotone incidente. A causa però della possibile fuga della radiazione di fluorescenza può esserci una diminuzione della carica.

### 5.2.2 Contatori proporzionali a scintillazione

In questo tipo di rivelatori la rivelazione avviene misurando la radiazione ultravioletta prodotta dalla nube di elettroni nel suo spostamento verso l'anodo. In questo caso **non** viene utilizzato un quenching gas ma solamente un gas nobile. I fotoni UV vengono rivelati da fotomoltiplicatori. La quantità di luce non è solo proporzionale all'energia del fotone incidente, ma anche alla profondità che il fotone X è riuscito a raggiungere prima di essere foto-assorbito. Questo spessore viene determinato misurando la durata della luce di scintillazione e prende il nome di *burstlength*.

I contatori proporzionali a bordo di BeppoSAX erano di questo tipo: tre avevano una finestra di Berillio dello spessore di  $50\mu\text{m}$  (MECS) ed un intervallo operativo tra 2 e 10 keV. Il quarto rivelatore, LECS, aveva una finestra sottile la cui composizione è mostrata in Figura 5.4 e che permetteva l'allargamento dell'intervallo operativo a 0.1 keV. Tutti e quattro i rivelatori usavano lo Xenon come gas di rivelazione.

### 5.2.3 Tecniche di reiezione del fondo

Esiste un numero sostanziale di eventi di fondo non dovuti a raggi X che limitano la sensibilità delle osservazioni di sorgenti cosmiche. La maggior parte di questo fondo è dovuto a raggi cosmici che incidono la parte alta della nostra atmosfera ad un tasso di 0.2–0.5 particelle per  $\text{cm}^2$  per secondo, a seconda della latitudine geomagnetica. Ogni raggio cosmico che penetra attraverso il contatore X può essere eliminato con una tecnica di anti-coincidenza. Purtroppo però questo non elimina il fondo dovuto a raggi  $\gamma$  prodotti dai raggi cosmici sia nell'atmosfera che nel veicolo che trasporta l'esperimento. L'efficienza di conversione di questi fotoni  $\gamma$  nel gas del contatore è molto piccola, dato che la loro energia è tale che lo scattering Compton è l'effetto dominante. Nel caso di un contatore riempito di Argon ( $\sigma_C = 0.05 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$  ad 1 MeV)

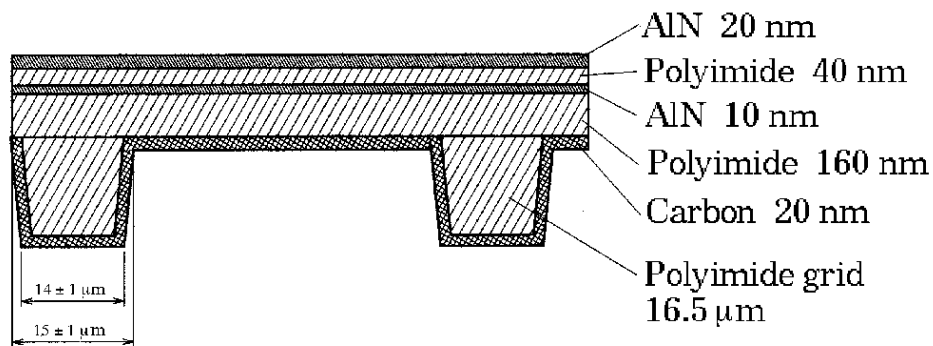


Figura 5.4: Sezione della finestra di ingresso del rivelatore LECS a bordo del satellite BeppoSAX.

e di spessore  $t_g = 6 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-2}$  la probabilità di conversione è di solo  $3 \cdot 10^{-4}$ . Però verranno prodotti un gran numero di elettroni nelle pareti e nella struttura di supporto del contatore, e questi elettroni avranno una energia tale da essere rivelati.

Un'altra fonte importante di radiazione di fondo è la presenza di particelle di bassa energia, principalmente elettroni, che provengono dal vento solare e sono intappolati nel campo magnetico terrestre (le cosiddette fasce di radiazione). Vi sono inoltre zone particolari in cui particelle vengono intrappolate: le zone aurorali ai poli magnetici e l'anomalia sud atlantica (SAA) al largo delle coste orientali del sudamerica.

Una tecnica, a parte l'uso di anti-coincidenze, che è molto efficiente nel reiettare eventi di fondo è la *discriminazione di forma*, il cui principio di funzionamento è il seguente: un fotone X convertito nel gas è essenzialmente un evento puntiforme; gli elettroni secondari prodotti in quel punto si muovono verso l'anodo senza una dispersione significativa e quindi il tempo di salita del segnale sarà molto breve, dell'ordine di 10–100 ns a seconda del gas utilizzato. Un elettrone che invece proviene da raggi cosmici o fotoni  $\gamma$  secondari lascerà nel contatore una traccia lunga. Gli elettroni secondari si muoveranno verso l'anodo da tutti i punti lungo la traccia così che il tempo di transito dalla traccia all'anodo non è unico ed il corrispondente tempo di salita del segnale sarà molto più lungo di quello di un evento X reale. Questa differenza in tempi di salita viene determinata dall'elettronica.

#### 5.2.4 Rivelatori a scintillazione

Cristalli scintillatori sono dei sali alcalini che hanno la proprietà di emettere luce visibile quando sono colpiti da fotoni X. I processi di assorbimento fotoelettrico e scattering Compton convertono l'energia trasportata dal fotone X in energia cinetica di uno o più elettroni, come nel caso dei contatori proporzionali. Nel cristallo però ogni elettrone di alta energia eccita molti elettroni dalla banda di valenza alla banda di conduzione. Per fare in modo che la transizione avvenga nella banda della luce visibile si introducono delle impurità (dette anche attivatori) che catturano alcuni di questi elettroni.

Affinché un cristallo sia di qualche uso pratico è necessario che sia trasparente alla sua stessa radiazione. Il cristallo che ha avuta la massima applicazione in campo astronomico è lo Ioduro di Sodio in cui l'attivatore sono tracce di Tallio, NaI(Tl), in cui circa 8% della energia dell'elettrone originale è convertita in fotoni con lunghezze d'onda tra 4200 e 4350 Å.

Una faccia del cristallo deve essere accoppiata otticamente ad un tubo fotomoltiplicatore o direttamente, o attraverso una guida di luce. Il resto della superficie viene ricoperta con una vernice riflettente per ottimizzare la collezione di luce al fototubo. Il guadagno nella parte di moltiplicazione elettronica varia da  $10^5$  a  $10^8$ . L'importanza dei rivelatori a scintillazione è la loro maggiore efficienza rispetto a quella dei contatori proporzionali al di sopra di 10 keV. Ad esempio, 50 mm di NaI hanno una efficienza praticamente unitaria fino a 100 keV, mentre per avere la stessa efficienza in un contatore proporzionale sarebbero necessari 4 m di Xenon o 200 m di Argon (ad 1 atm). Questo è dovuto alla maggiore numero e densità del cristallo rispetto al gas.

Dato che l'efficienza di conversione dell'energia cinetica in luce,  $\sim 1$  fotone per 400–500 eV, è molto minore dei  $\sim 30$  eV per ione dei contatori proporzionali, la risoluzione energetica (definita come  $R(E) = \Delta E/E$ , dove  $\Delta E$  è la Full Width at Half Maximum (FWHM) di una riga rivelata all'energia  $E$ ) degli scintillatori è minore di quella dei proporzionali: per il PDS, lo strumento di alta energia (15–100 keV) a bordo del satellite BeppoSAX, essa è  $R(E) = 0.15 \sqrt{60/E}$  dove  $E$  è espressa in keV.

Il limite pratico di utilizzo per ogni rivelatore è definito dall'energia a cui la sezione d'urto per effetto fotoelettrico diventa minore di quello per scattering Compton (a causa della complessità dello studio delle perdite di energia parziali. Nel caso dei cristalli di NaI e CsI questo limite è  $\sim 300$  keV (Si veda Tabella 6.1). Il limite di utilizzo a bassa energia è invece determinato dal rumore nel fotomoltiplicatore, che diventa importante nell'intervallo 5–10 keV.

La più importante sorgente di fondo per gli scintillatori proviene dai raggi  $\gamma$  prodotti localmente o dall'atmosfera. Circondare il rivelatore con uno schermo **passivo** di materiale pesante, come ad esempio Piombo, ha il risultato opposto di **umentare** il fondo, a causa dell'interazione dei raggi  $\gamma$  con lo schermo. La soluzione è quella di circondare il rivelatore con schermi **attivi**. A questo scopo viene utilizzato CsI che è più denso del NaI e può essere lavorato più facilmente.

Infine, una sorgente di fondo sono i protoni che si trovano nella SAA. L'interazione di questi protoni con il materiale del rivelatore provoca l'espulsione di neutroni di energia  $\sim$  MeV, che vengono catturati dai cristalli producendo nuclei radioattivi, quali  $I^{128}$  e  $Cs^{134}$ , i cui elettroni di decadimento vengono interpretati come prodotti da assorbimento fotoelettrico.

In Figura 5.5 viene mostrato la geometria di una delle quattro unità PHOSWICH (acronimo di PHOSphor sandWICH) dell'esperimento di alta energia PDS a bordo di BeppoSAX. Gli eventi rivelati in ogni phoswich possono essere suddivisi in tre classi: (i) eventi che depositano energia solamente nel cristallo NaI (eventi "buoni"); (ii) eventi che depositano energia solamente nel cristallo CsI; (iii) eventi che depositano energia sia in NaI che in CsI. Gli eventi nella prima classe vengono accettati, mentre quelli delle altre due sono rigettati. La reiezione viene compiuta usando i diversi tempi di decadimento delle scintillazioni prodotte nei due materiali (0.25  $\mu$ s in NaI e 0.6  $\mu$ s in CsI).



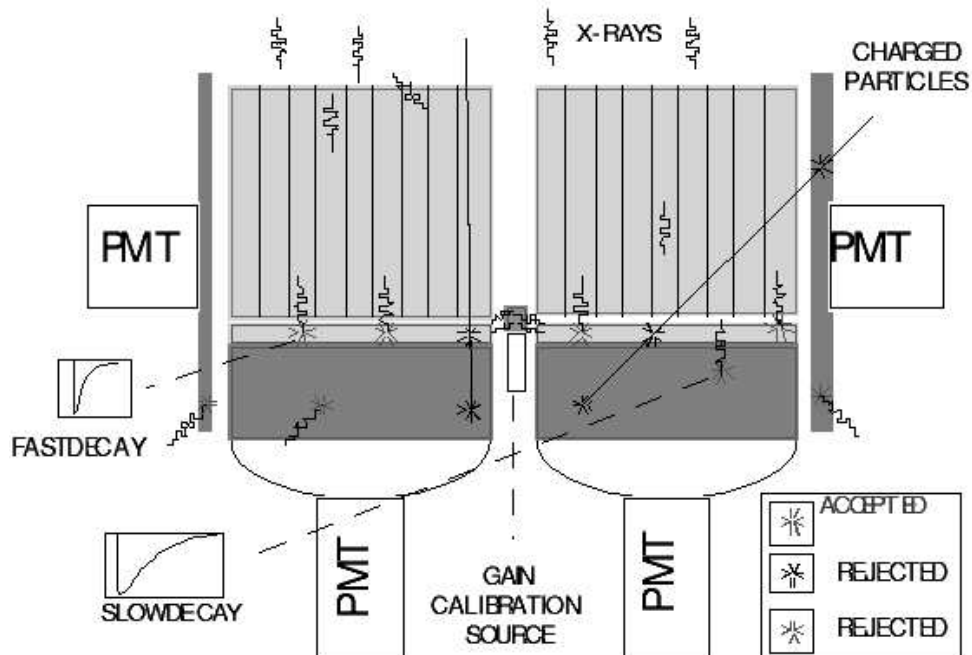


Figura 5.5: Funzionamento dell'anticoincidenza del rivelatore PDS a bordo di BeppoSAX. Il rivelatore è formato da un phoswich di due cristalli: 3 mm di NaI(Tl) che funge da rivelatore vero e proprio, e 50 mm di CsI(Na) che funge da schermo attivo.

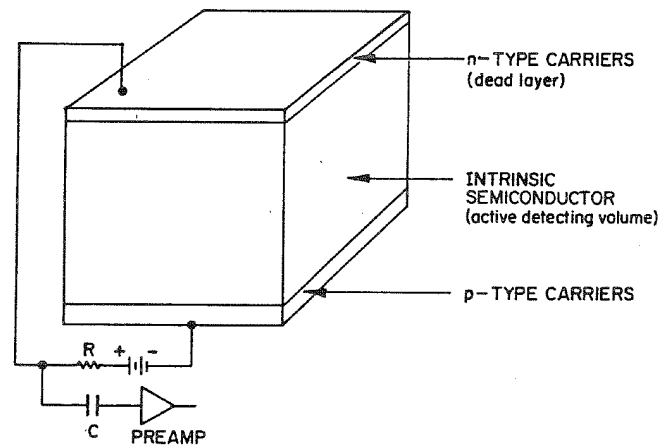


Figura 5.6: Diagramma di funzionamento di un rivelatore a semiconduttore.

### 5.2.5 Rivelatori a semiconduttore

Rivelatori a stato solido di Silicio o Germanio possono dare risoluzione energetiche molto migliori di quelle di contatori proporzionali o a scintillazione. Il loro principio di funzionamento è il seguente (vedi Figura 5.6): il cristallo viene drogato per controllare la densità dei portatori di carica. I contatti vengono effettuati con due strati sottili di portatori di carica negativa (tipo- $n$ ) e di buche (tipo- $p$ ). La regione possiede densità di carica positiva e negativa uguale e quindi riesce a sostenere il campo elettrico attraverso di essa. Interazioni nel cristallo, dovute al fotone X incidente, producono elettroni che possono essere raccolti come impulsi di carica che, a differenza dei contatori proporzionali o dei fototubi, **non sono amplificati**.

La risoluzione energetica di questo tipo di rivelatore è la migliore attualmente possibile (2.3 keV a 1.3 MeV per lo strumento SPI a bordo del satellite INTEGRAL). Lo svantaggio da un punto di vista sperimentale è che questo tipo di rivelatore deve essere raffreddato per evitare l'eccitazione termica degli elettroni nella banda di conduzione.

### 5.2.6 Microcalorimetri

In un microcalorimetro, la determinazione dell'energia del fotone X incidente avviene misurando la variazione di temperatura associata al suo assorbimento.

Schematicamente il suo funzionamento è illustrato nella Figura 5.7: esso consiste in un assorbitore (HgTe o Si), di capacità termica  $C$  che viene collegato ad una temperatura di riferimento (*heat sink*), dell'ordine di qualche centesimo di grado K, attraverso un collegamento termico di conduttanza  $G$ . L'assorbimento di un fotone di energia  $E$  nell'assorbitore crea una variazione di temperatura  $\Delta T$  data da

$$\Delta T = \frac{E}{C} \quad (5.4)$$

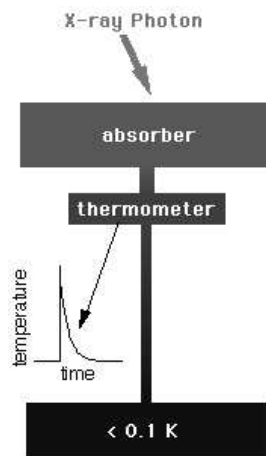


Figura 5.7: Principio operativo di un microcalorimetro.

misurata con un termistore<sup>2</sup> impiantato nell'assorbitore.

L'assorbitore ritornerà alla temperatura di riferimento del *heat sink* con un decadimento esponenziale con costante di tempo data da

$$\tau = \frac{C}{G} \quad (5.5)$$

Il limite sulla risoluzione energetica del rivelatore è determinato dal trasporto caotico di fononi tra il rivelatore ed il bagno termico nella giunzione. Si può fare vedere che il  $\Delta E$  limite che si può ottenere con un microcalorimetro è

$$\Delta E = 2.35 \eta \sqrt{C kT^2} \quad (5.6)$$

e la variabile  $\eta$  dipende dal termometro utilizzato. Nel caso del rivelatore XRS che volerà a bordo del satellite giapponese ASTRO-E2 si ha  $\eta = 2$ .

### 5.3 Collimatori meccanici

La funzione di un collimatore in astronomia X è quella di limitare l'angolo solido di cielo visto dal rivelatore. Il più semplice tipo di collimatore consiste semplicemente da una scatola o un tubo aperto da entrambe le parti e posizionato sopra il rivelatore (si veda Figura 5.8). L'angolo solido di cielo che sarà osservabile sarà circa  $a \times b/h^2$ ; fotoni che provengono da regioni al di fuori del campo di vista colpiranno le pareti del collimatore e verranno assorbiti. Il collimatore è caratterizzato da un asse centrale e, nel caso mostrato in Figura 5.8 la radiazione verrà trasmessa all'interno degli angoli  $\pm a/h$  e  $\pm b/h$  attorno all'asse centrale. La funzione di trasmissione  $f(\theta - \theta_0)$  (e equivalentemente la  $f(\phi - \phi_0)$ ) del collimatore avrà una forma triangolare

<sup>2</sup>Un termistore è un dispositivo che cambia significativamente la sua resistenza con piccole variazioni di temperatura.

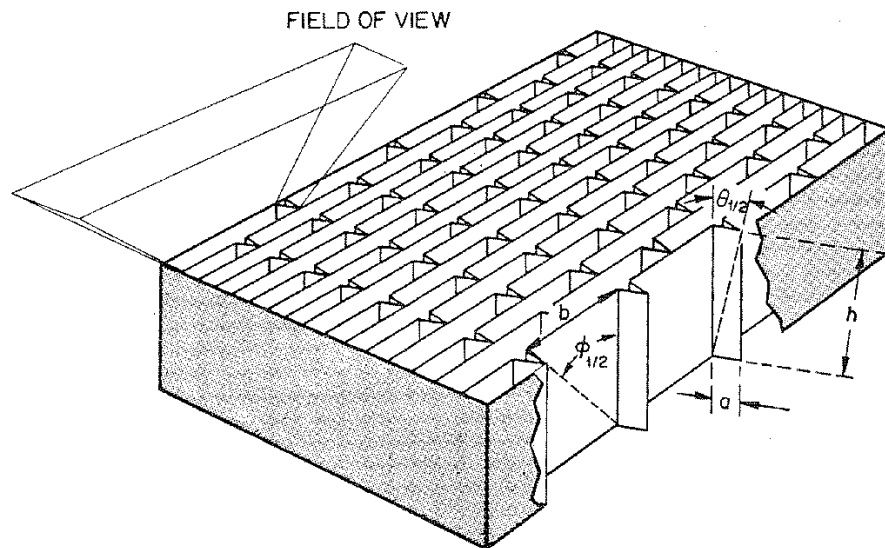


Figura 5.8: Un semplice collimatore formato da tubi rettangolari di altezza  $h$  e sezione  $a \times b$ . I raggi X che colpiscono le pareti dei tubi non possono raggiungere il rivelatore. La risposta all'interno il campo di vista avrà una forma triangolare in ognuna delle due direzioni ortogonali. Gli angoli per cui si ha solamente metà intensità trasmessa sono determinati dalla geometria:  $\tan \theta_{1/2} = a/h$  e  $\tan \phi_{1/2} = b/h$ .

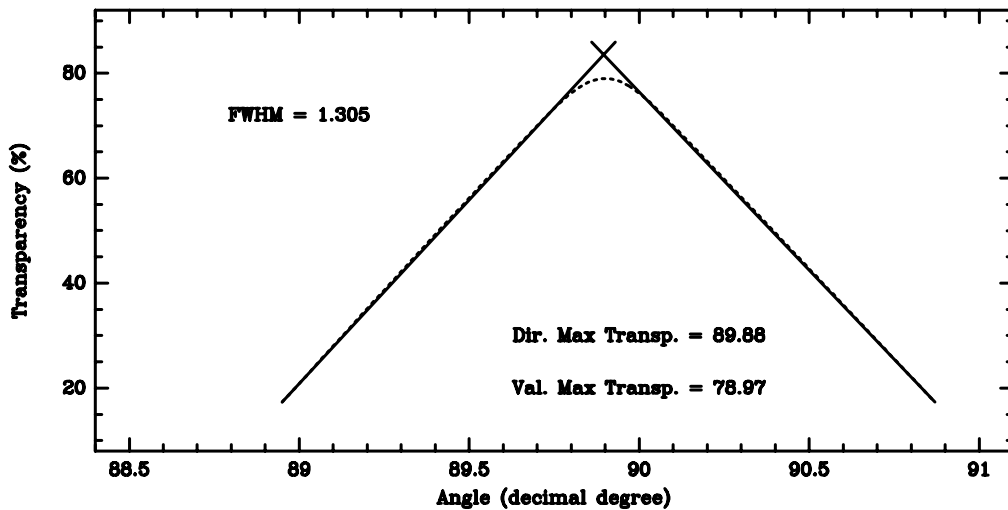


Figura 5.9: Funzione di trasmissione dei collimatori dell'esperimento di alta energia (15–200 keV) PDS a bordo del satellite BeppoSAX. Questi collimatori definiscono un campo di vista esagonale di  $1.3^\circ$  (FWHM).

$$f(\theta - \theta_0) = \begin{cases} 1 - \frac{|\theta - \theta_0|}{\theta_{1/2}} & \text{per } |\theta - \theta_0| < \theta_{1/2} \\ 0 & \text{per } |\theta - \theta_0| > \theta_{1/2} \end{cases} \quad (5.7)$$

dove  $\theta_{1/2}$  (e  $\phi_{1/2}$ ) rappresenta l'angolo per cui la risposta del collimatore diminuisce del 50%. Nel nostro caso saranno  $a/h$  e  $b/h$  nelle due direzioni. In Figura 5.9 mostriamo la funzione di trasmissione dei collimatori dell'esperimento PDS a bordo di BeppoSAX.

I collimatori meccanici sono stati costruiti con varie tecniche, ma i requisiti importanti che devono essere soddisfatti sono (i) minimo spessore possibile delle pareti in modo da ottenere la massima apertura possibile; (ii) adeguato spessore delle pareti in modo da poter fermare fotoni X della massima energia possibile. Dato che questi due requisiti sono in contraddizione tra loro è necessario trovare il giusto compromesso.

Non entreremo nei dettagli costruttivi, ma vogliamo evidenziare come la scelta del materiale che costituisce un collimatore è importante. Infatti bisogna evitare che i fotoni X interagiscano con questo materiale e si venga a produrre radiazione che può essere rivelata dallo strumento. Nel caso dei collimatori dell'esperimento PDS (si veda Figura 5.10) essi erano costituiti da tubi in Tantalio, a sezione esagonale, della lunghezza di 20 cm e dello spessore di  $50 \mu\text{m}$ . La parte interna dei tubi, nei primi 4 cm a partire dalla base, era ricoperta da un bi-strato di Stagno ( $100 \mu\text{m}$ ) e Rame ( $50 \mu\text{m}$ ). Lo strato di Stagno aveva lo scopo di attenuare l'emissione di fluorescenza dalla shell  $K$  del Tantalio ( $K_\alpha = 57.07 \text{ keV}$ ;  $K_\beta = 65.56 \text{ keV}$ ), mentre lo strato di Rame doveva attenuare l'emissione di fluorescenza dallo Stagno ( $K_\alpha = 25.1 \text{ keV}$ ;  $K_\beta = 28.5 \text{ keV}$ ). Questa configurazione viene detta *schermatura graduale (grading shielding)*, ed ha permesso la perdita di solo il 20% dell'area efficace del rivelatore.

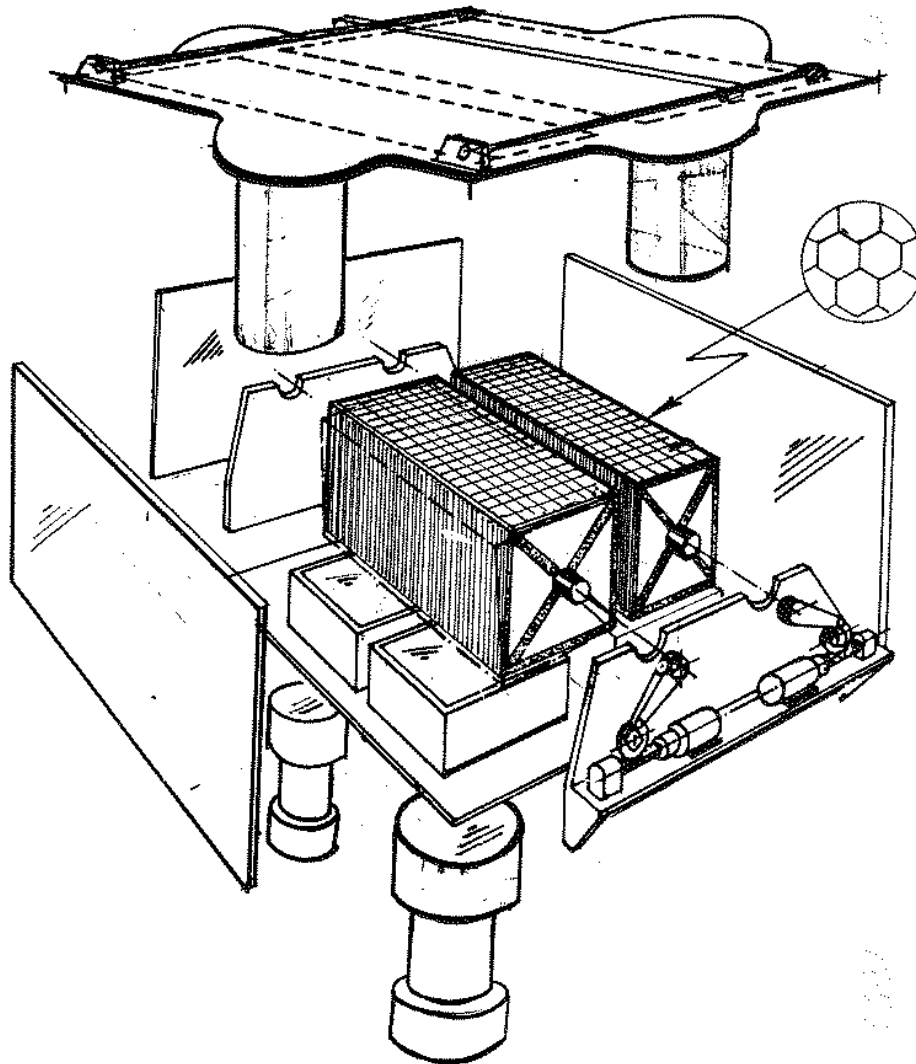


Figura 5.10: Visione esplosa dell'esperimento di alta (15–200 keV) energia PDS a bordo di BeppoSAX. Lo schermo frontale è formato da materiale scintillatore organico (BC-434) dello spessore di 1 mm ed ha lo scopo di intercettare particelle cariche. I fotoni sono rivelati da due fotomoltiplicatori indipendenti. Gli schermi laterali, quattro lastre di CsI(Na) delle dimensioni di  $275 \times 402$  mm e dello spessore di 1 cm, sono viste ognuna da quattro fotomoltiplicatori (nel loro insieme formano il Gamma Ray Burst Monitor GRBM). I due banchi di collimatori meccanici basculanti limitano il campo di vista di quattro unità phoswich. Sono formati da tubi di forma esagonale (per ottimizzare la tassellatura del piano) di Tantalio la cui base è stata ricoperta di un bi-strato di  $100 \mu\text{m}$  di Stagno e  $50 \mu\text{m}$  di Rame per assorbire fotoni di fluorescenza generati dall'interazione con i fotoni X incidenti.

## 5.4 Ottiche di focalizzazione di raggi X

L'uso di specchi per raggi X che focalizzano un fascio incidente offre due vantaggi significativi rispetto all'uso di collimatori meccanici:

- ① Gli specchi permettono la costruzione di strumenti con risoluzione angolare dell'ordine del second d'arco, con conseguente localizzazione di sorgenti puntiformi con precisione paragonabile;
- ② Dato che l'area di rivelazione è una piccola frazione dell'area di raccolta, il rapporto segnale/rumore è significativamente migliore di quello di uno strumento a collimazione meccanica, in cui il rivelatore è più grande dell'area di raccolta.

Questi vantaggi permettono un sensibile miglioramento della risoluzione e della sensibilità dello strumento.

Vediamo ora di ricavarci le condizioni affinché un fotone X venga riflesso. Innanzi tutto i fotoni X vengono riflessi da delle superfici per lo stesso motivo per cui la luce visibile viene riflessa. Nel passaggio attraverso la materia, che possiamo rappresentare come un gran numero di punti, lo scattering dei fotoni X da parte di questi punti si somma in maniera coerente lungo direzioni specifiche. Dato che i fotoni X hanno energie molto maggiori dell'energia di legame degli elettroni atomici, l'indice di rifrazione è leggermente minore dell'unità (a parte vicino alle edge di assorbimento). Allora, applicando la legge di Snell, si ha riflessione solamente fino ad un certo angolo critico di incidenza  $\theta_c$  dato da

$$\cos \theta_c = n \quad (5.8)$$

dove  $\theta_c$  è definito come il complemento dell'angolo fatto con la normale. Se definiamo  $\delta$  tale per cui  $n = 1 - \delta$ , allora

$$\theta_c \simeq \sqrt{2\delta} \quad (5.9)$$

Per energie diverse da quelle degli edge di assorbimento abbiamo che

$$\delta = 2\pi r_0 \lambda^2 N_e \quad (5.10)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della radiazione incidente,  $r_0 = e^2/mc^2$  è il raggio classico dell'elettrone e  $N_e$  è la densità elettronica nel materiale. Dalle (5.9) e (5.10) vediamo che l'angolo critico è direttamente proporzionale alla lunghezza d'onda della radiazione incidente, o inversamente proporzionale alla sua energia. Quindi per riflettere fotoni di alta energia servono angoli di incidenza radente sempre più piccoli. Inoltre, l'angolo critico dipende dalla densità elettronica, che è approssimativamente il numero atomico del materiale che compone la superficie: quindi per avere migliore riflessione saranno preferibili materiali ad alto  $Z$ .

In Figura 5.11 mostriamo le curve (teoriche) di riflessione in funzione dell'energia del fotone incidente per vari materiali. Gli specchi reali sono meno efficienti a causa del livello di politura delle superfici. Come si vede, le curve presentano delle discontinuità vicino alle energie degli

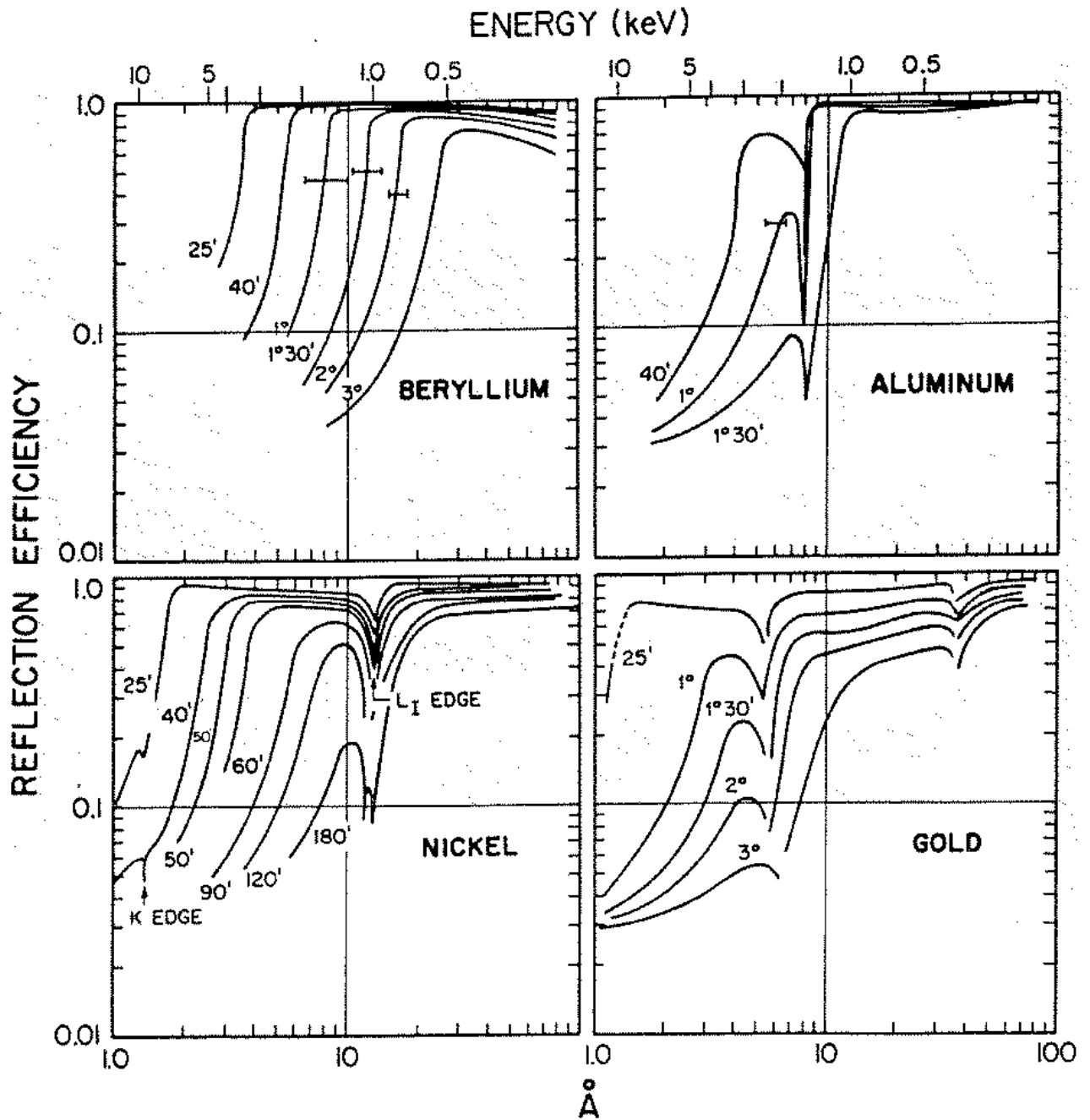


Figura 5.11: Efficienze di riflessione teoriche superficiali in funzione dell'energia (scala superiore) o della lunghezza d'onda (scala inferiore) per diversi angoli di incidenza radente e per diversi materiali: Be ( $Z = 4$ ), Al ( $Z = 13$ ), Ni ( $Z = 28$ ) e Au ( $Z = 79$ ). L'angolo critico per ogni energia può essere definito come quell'angolo a cui la riflettività diminuisce di un certo valore, per esempio 10%. La complessità delle curve è dovuta ad effetti negli edge di assorbimento.



edge di assorbimento. Inoltre possiamo vedere come la transizione all'angolo critico non sia netta. Ricapitolando abbiamo che

- ❑ La riflettività è molto alta fino all'angolo critico  $\theta_c$ ;
- ❑ L'angolo critico  $\theta_c$  diminuisce all'aumentare dell'energia;
- ❑ E' preferibile usare materiali ad alto  $Z$  per le superfici;
- ❑ A causa della presenza di edge di assorbimento, la riflettività è una funzione complessa dell'energia del fotone incidente.

I primi tre punti hanno importanti conseguenze nella costruzione di specchi per raggi X, mentre l'ultimo punto è importante per l'interpretazione di dati spettrali ottenuti dagli strumenti sul piano focale degli specchi.

Per quello che riguarda la forma degli specchi, l'elemento base per focalizzare radiazione parallela è una parabola, come mostrato in Figura 5.12.

Se indichiamo con  $\alpha$  l'angolo medio tra la sezione della parabola e la direzione del fascio incidente, e se questo angolo varia poco lungo la sezione, allora  $\alpha$  definisce l'energia massima che può essere riflessa. La lunghezza focale è data da  $F = R/2\alpha$ , dove  $R$  è la distanza dello specchio dall'asse centrale della parabola. Nel caso di doppia riflessione, ottenuta con due superfici, una parabolica e l'altra iperbolica, la lunghezza focale sarà  $F = R/4\alpha$ .

Per quello che riguarda la risoluzione angolare  $\sigma$  per questo tipo di specchi, da studi effettuati si ha che

$$\sigma = \frac{(\zeta + 1)}{10} \frac{\tan^2 \theta}{\tan \alpha} \left( \frac{L}{F} \right) + 4 \tan \theta \tan^2 \alpha \quad \text{radianti} \quad (5.11)$$

dove  $\zeta$  è il rapporto tra gli angoli di incidenza nel paraboloido e nell'iperboloido,  $L$  è la lunghezza dello specchio e  $\theta$  è l'angolo di incidenza rispetto all'asse ottico. In un caso tipico  $\sigma$  aumenta monotonamente da 0 a  $10''$  per  $\theta$  che varia da 0 a  $30''$ .

In Figura 5.13 viene mostrato il principio costruttivo degli specchi per raggi X (si ringrazia il Prof. Citterio, INAF–Osservatorio Astronomico di Brera).

## 5.5 Rivelazione di raggi X da sorgenti cosmiche: Considerazioni statistiche

Un rivelatore collimato registrerà (conterà) eventi che provengono da un piccolo angolo solido del cielo. A questi si aggiungeranno eventi di fondo. Possiamo quindi considerare tre differenti tipi di conteggi:

- ① il flusso di fotoni  $j_s$ , proveniente dalla sorgente all'interno del campo di vista;
- ② il flusso di fotoni  $dj_d/d\Omega$ , proveniente dal fondo diffuso che cade all'interno dell'angolo solido del collimatore;

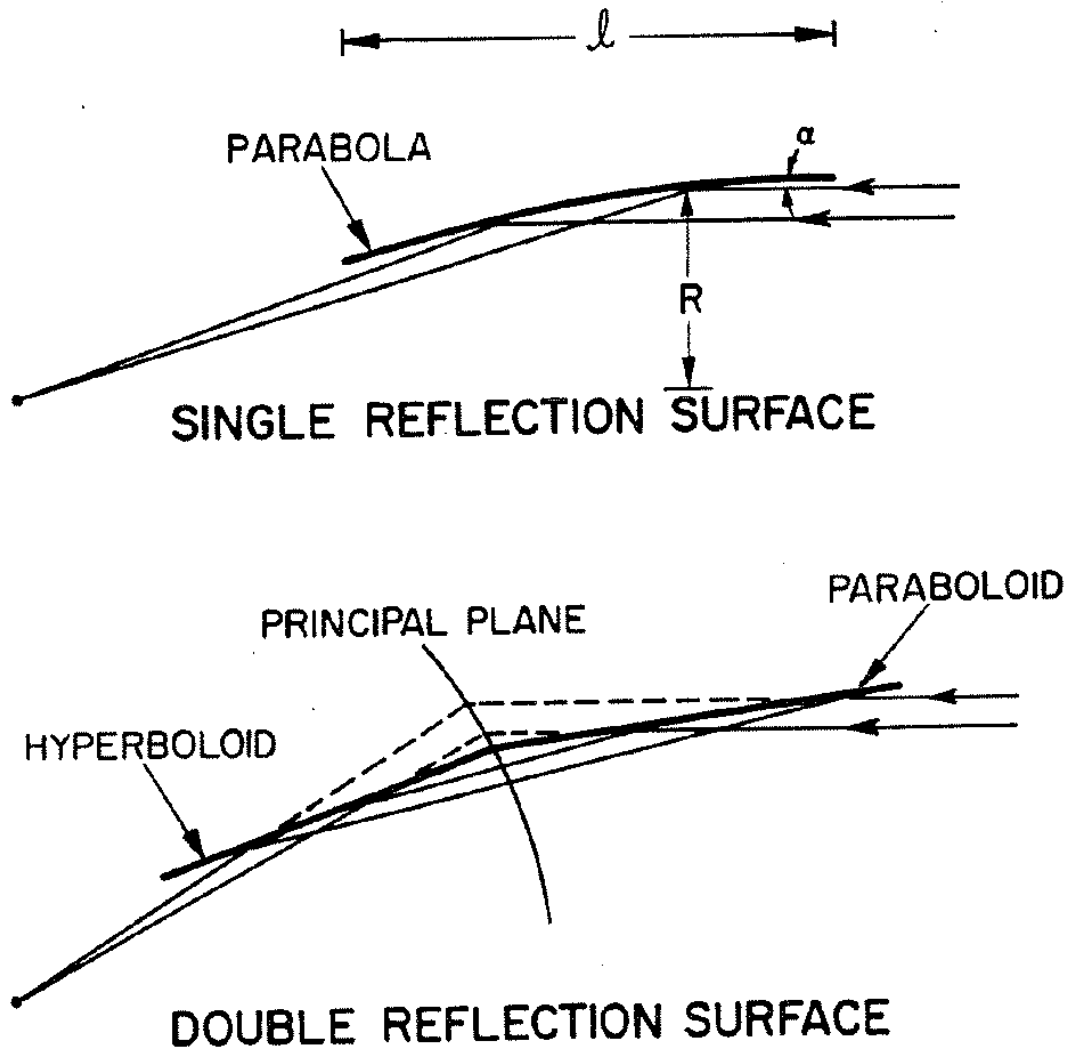


Figura 5.12: Sezioni di superfici riflettenti per specchi di raggi X. Nel caso di sezione parabolica il fotone viene riflesso una sola volta prima di essere focalizzato, mentre nella figura inferiore viene mostrato un profilo formato da un segmento di parabola ed uno di iperbole. In questo caso avvengono due riflessioni.

## PROCESSO DI ELETTROFORMATURA

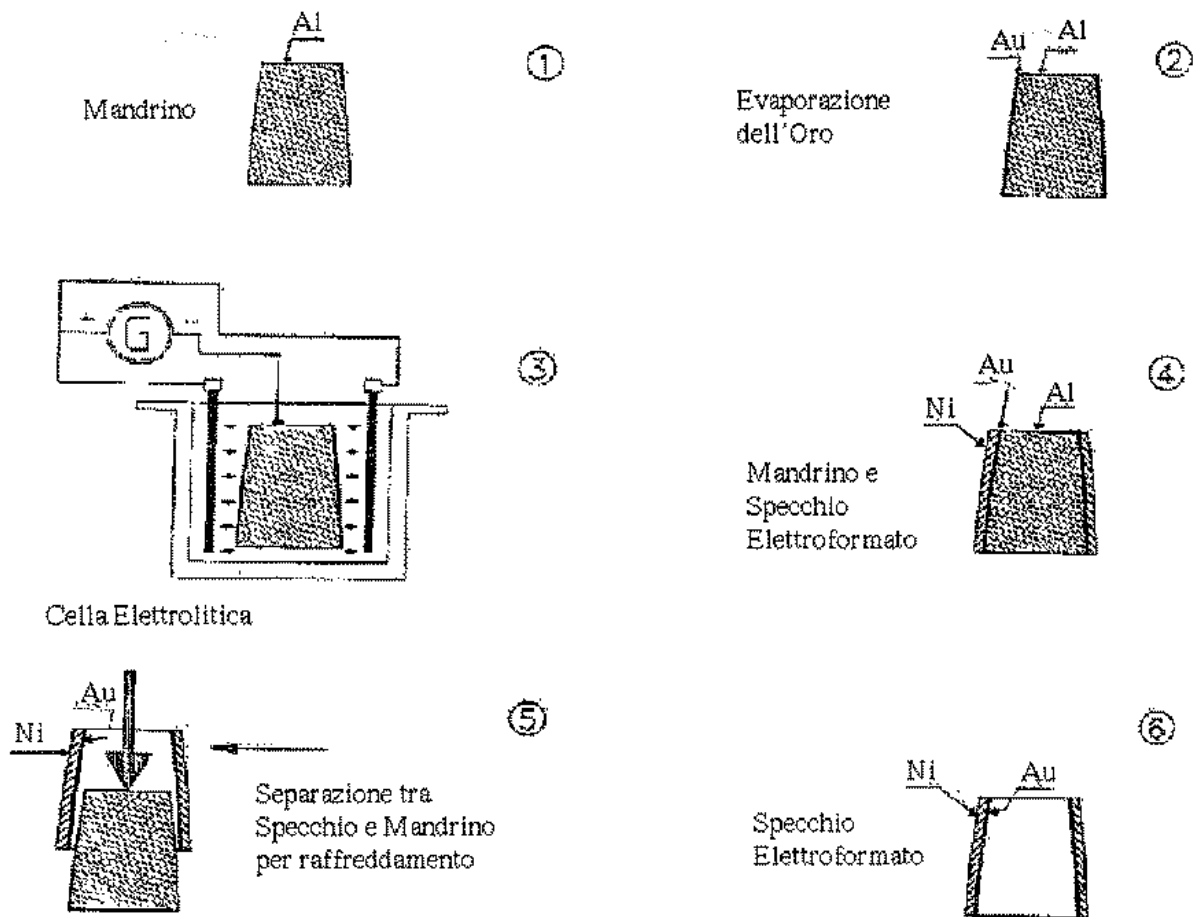


Figura 5.13: Processo costruttivo di uno specchio per raggi X per elettroformatura. ① Un mandrino di Alluminio rivestito di uno strato di Nichel viene sagomato con il profilo parabolico-iperbolico e sottoposto a politura per raggiungere una microrugosità minore di  $0.05 \mu\text{m}$ . ② Il mandrino viene posto in un crogiolo con dell'Oro. Per bombardamento elettronico l'Oro viene fatto evaporare. L'Oro si deposita sul mandrino formando uno strato di circa  $0.1 \mu\text{m}$ . ③ Lo strato di Oro viene rivestito di un ulteriore strato di Nichel ( $0.1-1.0 \text{ mm}$ ) per bagno elettrolitico. ④ La superficie riflettente dello specchio è formata dallo strato di Oro, mentre lo strato di Nichel funge da supporto meccanico. ⑤ La separazione tra lo specchio ed il mandrino avviene per raffreddamento: il coefficiente di espansione termica del Nichel è circa la metà di quello dell'Alluminio. Inoltre l'adesione tra l'Oro e l'Alluminio è molto piccola, facilitando la separazione. ⑥ Diversi specchi vengono innestati tra loro in modo da aumentare l'area di raccolta.

- ③ il flusso  $j_b$  di fondo non dovuto all'emissione diffusa, assunto omnidirezionale e non collimato (cioè è di energia così elevata che penetra il rivelatore indipendentemente dalla direzione).

Quindi il tasso di conteggi *netto* osservato ad un certo istante sarà

$$R = \left[ j_s f(\theta - \theta_0) + \frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b \right] \epsilon A \quad \text{cts sec}^{-1} \quad (5.12)$$

dove  $f(\theta - \theta_0)$  è la funzione di trasmissione del collimatore,  $\theta - \theta_0$  è la distanza angolare tra l'asse centrale del collimatore e la direzione della sorgente,  $\delta\Omega$  è l'angolo solido del collimatore,  $\epsilon$  è l'efficienza del rivelatore, e  $A$  è la sua area.

Nel caso di collimatori meccanici,  $f(\theta - \theta_0)$  ha la forma triangolare già descritta (Eq. 5.7)

$$f(\theta - \theta_0) = \begin{cases} 1 - \frac{|\theta - \theta_0|}{\theta_{1/2}} & \text{per } |\theta - \theta_0| < \theta_{1/2} \\ 0 & \text{per } |\theta - \theta_0| > \theta_{1/2} \end{cases}$$

dove  $\theta_{1/2}$  è una caratteristica del collimatore.

Per le sorgenti più intense  $j_s$  è dell'ordine di 100 fotoni  $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ , mentre per le sorgenti più deboli arriva a  $\sim 10^{-4}$  fotoni  $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ . Il flusso al di sopra di 1 keV dovuto ad emissione diffusa è circa 10 fotoni  $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ , mentre quello non diffuso,  $\epsilon j_b$ , è dell'ordine di 0.01 cts  $\text{sec}^{-1}$  in 1–10 keV, ma dipende in modo significativo dalle tecniche di discriminazione usate per eliminarlo (che discuteremo dopo).

Vediamo ora di studiare l'accumulo di dati: nel caso più semplice una sorgente sarà visibile nel campo di vista del collimatore per un certo tempo  $t_1$ , dando luogo ad un conteggio netto di  $N_1 = R_1 t_1$  conteggi. Il fondo verrà quindi accumulato durante un periodo  $t_2$ , producendo un conteggio  $N_2 = R_2 t_2$ . Il tasso di conteggio netto dalla sorgente sarà quindi

$$R_1 - R_2 = j_s f(\theta - \theta_0) \epsilon A = N_1/t_1 - N_2/t_2 \quad (5.13)$$

L'errore statistico associato a  $j_s$  è semplicemente

$$\frac{\delta j_s}{j_s} = \frac{\sqrt{N_1 t_2^2 + N_2 t_1^2}}{N_1 t_2 - N_2 t_1} \quad (5.14)$$

dato che  $N_1$  e  $N_2$  hanno distribuzioni normali con deviazione standard  $\sqrt{N_1}$  e  $\sqrt{N_2}$ . Se il numero di conteggi è minore di circa 10 è necessario utilizzare la statistica di Poisson per ottenere la deviazione più probabile.

Nel caso di osservazione *scanning*, quella in cui l'asse dello strumento è ruotato sopra la sorgente di un angolo maggiore del campo di vista, il conteggio netto accumulato sarà

$$N_s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} j_s \epsilon A \frac{f(\theta - \theta_0)}{\omega} d\omega \quad (5.15)$$

dove  $\omega$  è la velocità di rotazione. Utilizzando la forma triangolare (5.7) per  $f(\theta - \theta_0)$  l'integrazione della (5.15) fornisce

$$N_s = j_s \epsilon A \frac{\theta_{1/2}}{\omega} \quad \text{cts} \quad (5.16)$$

La quantità  $\theta_{1/2}/\omega$  non è altro che il tempo di transito della sorgente nel campo di vista del collimatore.

Vediamo ora di determinare l'errore associato alla misura del conteggio da una sorgente, in modo di estrarre il rapporto segnale rumore. Trattiamo due casi limite:  $j_s$  maggiore del fondo e  $j_s$  minore del fondo. Nel primo caso avremo che

$$\delta N_s = \sqrt{N_s} = \sqrt{j_s \epsilon A \frac{\theta_{1/2}}{\omega}} \quad (5.17)$$

mentre nel secondo

$$\delta N_s = \sqrt{N_B} = \sqrt{\left(\frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b\right) \epsilon A t} \quad (5.18)$$

dove  $t$  è il tempo durante cui è stata osservata la sorgente. Per osservazioni *scanning*  $t = 2\theta_{1/2}/\omega$ . Il rapporto segnale/rumore è allora dato da

$$S/N = \frac{N_s}{\delta N_s} = \frac{N_s}{\sqrt{N_B}} = j_s \sqrt{\frac{\epsilon A t}{\left(\frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b\right)}} \quad (5.19)$$

La quantità  $S/N$  è formalmente il numero di deviazioni standard ( $\sigma$ ) per cui i conteggi dalla sorgente sono maggiori del fondo. Le due espressioni (5.17) e (5.19) determinano il modo in cui i parametri dell'esperimento influenzano i risultati delle osservazioni, come la sensibilità e gli errori.

Data la dipendenza dalla radice quadrata, per raddoppiare la sensibilità sarà necessario quadruplicare il tempo di osservazione o l'area dello strumento.

Si definisce sensibilità di uno strumento il flusso più debole (il più piccolo  $j_s$ ) che produce una certo numero di deviazioni standard al di sopra del fondo. Tradizionalmente questo numero è tre, quindi

$$j_{\min} = 3 \sqrt{\frac{\left(\frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b\right)}{\epsilon A t}} \quad (5.20)$$

## 5.6 Il rocking come tecnica per la determinazione del fondo

Come abbiamo visto (si veda Eq. 5.7) il segnale netto da una sorgente è dato dalla differenza tra uno spettro accumulato puntando sulla sorgente ed uno spettro di fondo. Una possibilità è quella di accumulare lo spettro di fondo prima e/o dopo l'osservazione sulla sorgente in regioni

“vicine”, ma questa tecnica ha lo svantaggio che se il fondo mostra variabilità (ad esempio a causa di flussi variabili di particelle dovuti alla SAA o a cicli solari) allora non siamo sicuri che il fondo accumulato ad istanti diversi sia lo stesso di quello accumulato durante l’osservazione puntata. Ovviamente questo vale per sorgenti il cui conteggio sia dominato dal fondo.

Per ovviare a questo problema, e per essere sicuri di avere un monitoraggio del fondo contemporaneo alla osservazione puntata è stata messa a punto una tecnica, detta di *rocking*, che permette di misurare contemporaneamente i conteggi dalla sorgente ed i conteggi da una regione vicina a quella del puntamento spostando il collimatore sopra il rivelatore (come nel caso del PDS a bordo di BeppoSAX, o l’intero blocco collimatore+rivelatore, come nel caso dell’esperimento HEXTE a bordo di RXTE) alternativamente da una parte all’altra della direzione di puntamento. I collimatori a bordo del PDS avevano la possibilità di basculare su cinque posizioni simmetriche rispetto alla posizione neutra di puntamento, a  $\pm 30'$ ,  $\pm 60'$ ,  $\pm 90'$ ,  $\pm 150'$  e  $\pm 210'$ . In Figura 5.14 viene mostrato il tasso di conteggio accumulato dai rivelatori sotto i due diversi blocchi di collimatori (si veda Figura 5.10), e come questi vengano poi fusi insieme per ottenere il tasso di conteggio della sorgente+fondo e del fondo. A causa della particolare orbita di BeppoSAX (a bassa inclinazione rispetto all’equatore, in modo da evitare i passaggi attraverso la SAA) il fondo è molto stabile e non mostra alcuna modulazione.

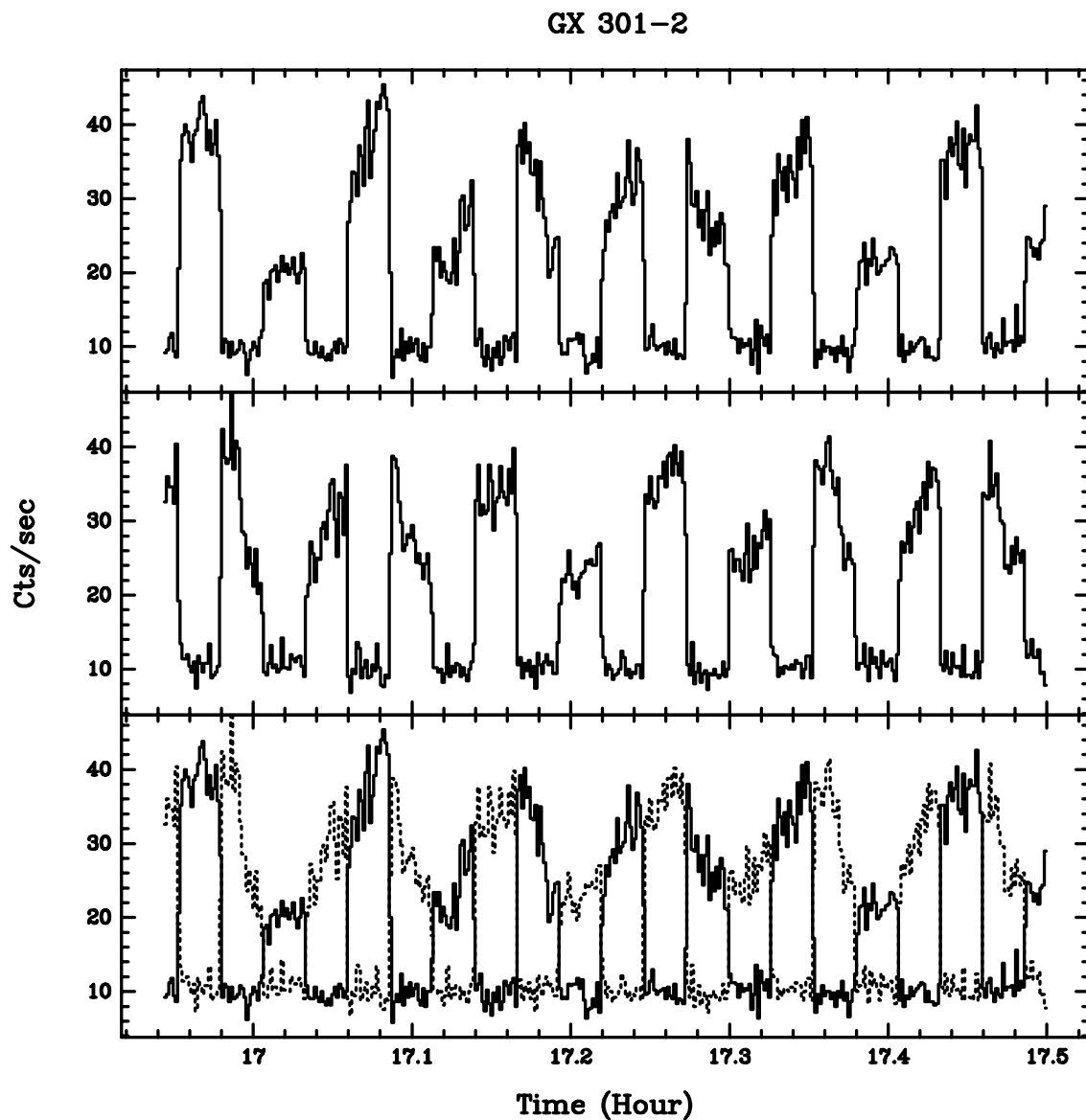


Figura 5.14: Serie temporale della pulsar X GX301-2 (periodo di pulsazione di  $\sim 700$  sec) accumulata dallo strumento PDS. La sorgente viene puntata per 96 sec, poi per altri 96 sec il collimatore si sposta di  $3.5^\circ$  da una parte, poi ritorna sulla sorgente ed ancora  $3.5^\circ$  dalla parte opposta, per poi ricominciare il ciclo. Nei primi due pannelli sono mostrate le serie temporali relative a rivelatori sottostanti collimatori diversi. Nel momento che le due serie temporali vengono "fuse" (terzo pannello) si ottengono due serie temporali complete: una con il flusso di sorgente e l'altra con il flusso del fondo. In maniera analoga si ottengono gli spettri della sorgente+fondo e del fondo.





# Capitolo 6

## Fit Spettrale e XSPEC

### 6.1 Introduzione

Ci occuperemo ora di tecniche che permettono il confronto tra i modelli teorici che abbiamo incontrato nella prima parte del corso (e che ci forniscono i conteggi aspettati se l'emissione fosse dovuta al processo di cui stiamo valutando l'emissione) con le misure sperimentali (cioè i conteggi misurati) ottenibili con le classi di strumenti che abbiamo brevemente descritto nel Capitolo precedente. Purtroppo, come vedremo in dettaglio, non è possibile ricavarci in maniera univoca la forma dello spettro dai conteggi osservati, quindi è necessaria una tecnica statistica che mi permetta di decidere, tra tutti i possibili modelli, quale sia quello che meglio descrive le osservazioni.

### 6.2 Fondamenti di fitting spettrale

La procedura standard per l'analisi di dati spettrali è quella di assumere una certa forma dello spettro avente un certo numero di parametri liberi, calcolare la risposta del rivelatore per valori prestabiliti dei parametri, e testare la bontà con dei test di verosimiglianza, il più usato dei quali è quello del  $\chi^2$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(N_i - C_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (6.1)$$

dove  $C_i$  sono i conteggi previsti e  $N_i$  sono quelli misurati dalla sorgente in un insieme di  $M$  bin in energia indipendenti. Le varianze predette in ogni bin saranno  $\sigma_i^2 = C_i$  se consideriamo solamente la statistica di conteggio dei fotoni. Se però il conteggio del fondo non è trascurabile allora i  $C_i$  devono essere interpretati come la differenza tra il vero conteggio totale  $T_i$  ed il vero conteggio dovuto al fondo  $B_i$  e quindi dovremo usare la stima  $\sigma_i^2 = T_i + B_i$ . Inoltre bisognerà aggiungere a  $\sigma_i$  ogni errore sistematico, quali ad esempio le incertezze nella misura dell'area del rivelatore ed incertezze nella determinazione dell'efficienza (si ricordino le (5.17) e (5.18)). La probabilità di ottenere un valore del  $\chi^2$  maggiore o uguale a quello osservato è dato da

$$P(> \chi^2) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_{\chi^2}^{\infty} e^{-\mu/2} \mu^{(n/2-1)} d\mu \quad (6.2)$$

dove la quantità  $n$  è il *numero dei gradi di libertà*, uguale a  $M$  meno il numero dei parametri utilizzati nel modello spettrale. Se  $P$  è sufficientemente piccolo, diciamo dell'ordine del 5%, l'ipotesi usata per calcolare i  $C_i$  può essere scartata. Generalmente i parametri che danno la probabilità più grande vengono indicati come la rappresentazione spettrale migliore (*best fit*). Se vogliamo, questo è l'equivalente di un fit ai minimi quadrati.

E' però necessario a questo punto una chiarificazione importante. Il test del  $\chi^2$  ci dice che alcuni modelli **non possono** rappresentare correttamente i nostri dati e che invece altri modelli **potrebbero** rappresentarli correttamente; quello che però il test del  $\chi^2$  **non può** dirci è quale, tra tutti i modelli (diversi) che sono permessi per il test, sia quello "migliore tra i migliori". Ad esempio, la sotto-stima delle varianze  $\sigma_i$  (ottenuta trascurando gli errori sistematici) condurrà ad un alto valore del  $\chi^2$  e quindi alla possibile reiezione, sbagliata, di certi modelli.

Per cercare di dare una risposta a questo problema si utilizza un altro test, il cosiddetto F-test, il quale misura se le varianze ottenute da due collezioni di dati (nel nostro caso due modelli) sono statisticamente differenti. Se lo sono, allora non potremmo dire nulla su quale delle due sia "migliore" rispetto all'altra, ma se le loro varianze sono statisticamente uguali, allora potremmo dire che i due modelli sono equivalenti. In altre parole, andremo a calcolare quale è la probabilità che la differenza dei  $\chi^2$  misurati con modelli **differenti** sia casuale. Da un punto di vista computazionale, l'F-test testa l'ipotesi che due campioni abbiano varianza differente cercando di rigettare l'ipotesi che le loro varianze siano consistenti, ed utilizza come variabile il rapporto dei  $\chi^2$  normalizzati (cioè il  $\chi^2$  diviso per il numero di gradi di libertà).

I conteggi previsti  $C_i$  vengono calcolati secondo la

$$C_i = \int_0^{\infty} \frac{dN}{dE_0} P_i(E_0) dE_0 \quad (6.3)$$

dove  $dN/dE_0$  è lo spettro incidente che viene assunto, e  $P_i(E_0)$  è la probabilità che un fotone incidente di energia  $E_0$  risulti in un conteggio in un canale del rivelatore  $i$  che è tarato in una banda di energia nominale tra  $E_{i|\min}$  e  $E_{i|\max}$ , cioè

$$P_i(E_0) = \int_{E_{i|\min}}^{E_{i|\max}} P(E, E_0) dE \quad (6.4)$$

Veniamo quindi ridotti al problema di determinare la funzione densità di probabilità che un fotone incidente di energia  $E_0$  risulti in un segnale (impulso) corrispondente ad un'energia tra  $E$  e  $E + dE$ . Separiamo questa densità di probabilità in due parti: la prima,  $P_L(E', E_0)$ , che un fotone incidente di energia  $E_0$  depositi un'energia compresa tra  $E'$  e  $E' + dE'$  nel rivelatore (con  $E' \leq E_0$ ) e la seconda,  $P_R(E, E')$ , densità di probabilità di risoluzione, che una perdita di energia  $E'$  risulti in un impulso equivalente nell'intervallo tra  $E$  e  $E + dE$ . Allora avremo che

$$P(E, E_0) = \int_0^{E_0} P_R(E, E') P_L(E', E_0) dE' \quad (6.5)$$

In generale, la risoluzione può essere considerata una funzione gaussiana

$$P_R(E, E') = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(E')} \exp \left[ -\frac{(E - E')^2}{2\sigma^2(E')} \right] \quad (6.6)$$

dove la varianza  $\sigma(E')$  è legata alla FWHM dalla relazione  $\sigma = 0.42$  (FWHM).

Descriviamo ora brevemente i vari contributi alla funzione  $P_L$ , che sono (i) la probabilità che un fotone riesca a penetrare nel volume del rivelatore, (ii) la probabilità che avvenga un certo tipo di interazione tra il fotone ed il rivelatore e (iii) la distribuzione di perdita di energia per quel particolare processo. Vediamo quindi che  $P_L$  può essere determinato da una combinazione di calcoli analitici, simulazione Monte Carlo e misure sperimentali. Nel caso di un contatore a scintillazione (ma il principio si può estendere anche ad apparecchi a gas e a semiconduttore) possiamo scrivere

$$P_L(E', E_0) = \exp[-\mu_w(E_0) t_w] \times \left\{ \frac{\mu_p(E_0)}{\mu(E_0)} P_L(E', E_0)|_{\text{photo}} + \frac{\mu_c(E_0)}{\mu(E_0)} P_L(E', E_0)|_{\text{Comp}} \right\} \quad (6.7)$$

La frazione  $\mu_p/\mu$  corrisponderà ad interazioni via effetto fotoelettrico, la frazione  $\mu_c/\mu$  ad interazioni via effetto Compton, dove  $\mu_p$  è il coefficiente di assorbimento dovuto ad assorbimento via fotoelettrico e  $\mu_c$  quello dovuto ad assorbimento via effetto Compton.  $\mu_w$  e  $t_w$  sono il coefficiente di assorbimento e lo spessore della finestra.

Una interazione via effetto fotoelettrico può depositare nel rivelatore tutta la sua energia, od una parte di essa corrispondente alla fuga dal rivelatore dei raggi X della shell  $K$  o  $L$  che risultano dalla diseccitazione dell'atomo originale che aveva assorbito il fotone. Diventa allora importante determinare il numero relativo di raggi X che vengono assorbiti via effetto fotoelettrico nel rivelatore. Per semplicità assumeremo che il fascio incida perpendicolarmente il rivelatore e che questi sia di grandi dimensioni.

Di queste interazioni una certa frazione  $\delta_k$  avverrà nella shell  $K$ , e di questa frazione il guadagno di fluorescenza  $\omega_k$  è la probabilità che l'atomo si disecciti emettendo un raggio X dalla shell  $K$  (si vedano i valori di  $\omega_k$  per alcuni materiali usati in astronomia X in Tabella 6.1). Assumendo emissione isotropa, si può integrare la probabilità di penetrazione di un raggio X proveniente dalla shell  $K$  sul percorso di fuga dal rivelatore in funzione dell'angolo solido. La frazione di tutte le interazioni che hanno come risultato la fuga dalla finestra frontale e quella posteriore del rivelatore sono

$$f_1(E_0) = \frac{1}{2} \frac{\omega_k \delta_k}{P_I} \left\{ 1 - \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_0)} \ln \left( 1 + \frac{\mu(E_0)}{\mu(E_k)} \right) \right\} \quad (6.8a)$$

$$f_2(E_0) = \frac{1}{2} \frac{\omega_k \delta_k}{P_I} \exp[-\mu(E_0) t] \left\{ \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_0)} \ln \left( \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_k) - \mu(E_0)} \right) - 1 \right\} \quad (6.8b)$$

Tabella 6.1: Proprietà di materiali utilizzati in sistemi di rivelazione per astronomia X

	Numero Atomico $Z$	Densità $\rho$ (g cm <sup>-3</sup> )	Energia Shell $E_s$ (keV)	Energia Riga X (keV)	Guadagno Fluoresc. $\omega_s$	Frazione Interaz. $\delta_s$	Energia ( $\mu_c = \mu_p$ ) (keV)
<i>Gas Contatori Proporzionali</i>							
Metano	6	$0.713 \cdot 10^{-3}$	0.284	0.277		0.96	20
Ne	10	$0.901 \cdot 10^{-3}$	0.867	0.849, 0.858	0.01	0.94	38
Ar	18	$1.780 \cdot 10^{-3}$	3.203	2.96	0.105	0.90	72
			0.285, 0.246, 0.244				
Kr	36	$3.740 \cdot 10^{-3}$	14.32	12.64, 14.12	0.625	0.88	170
			1.92, 1.73, 1.67		0.04		
Xe	54	$5.850 \cdot 10^{-3}$	34.56	29.67, 33.78	0.875	0.86	300
			5.45, 5.10, 4.78	4.10, 4.49, 5.30	0.14		
<i>Cristalli Scintillatori</i>							
Nal	53	3.61	33.16	28.47, 32.30	0.865	0.84	260
			5.19, 4.86, 4.56	3.93, 4.22, 4.80	0.13		
CsI	55	4.54	35.97	30.81, 34.99	0.885	0.68	300
				4.28, 4.62, 5.28	0.15		
Si	14	2.33	1.84	1.74, 1.83	0.04	0.92	53
Ge	32	5.36	11.10	9.88, 10.98	0.49	0.91	145
			1.42, 1.41, 1.21	1.19, 1.22	0.01		
<i>Finestre</i>							
Be	4	1.82	0.111	0.109		0.97	14
Mylar	8	1.4	0.532	0.525		0.65	
Formvar	8	1.2	0.532	0.525		0.65	
Poliprop.	6	0.95	0.284	0.277		0.92	
Aria <sup>a</sup>	18	$1.29 \cdot 10^{-3}$	3.20	2.96	0.105	0.54	27
Aria <sup>b</sup>	8		0.532	0.525			
Aria <sup>c</sup>	7		0.400	0.392			
<i>Collimatori</i>							
Mg	12	1.74	1.30	1.25, 1.30	0.02	0.93	46
Al	13	2.7	1.56	1.49, 1.55	0.03	0.93	50
Fe	26	7.87	7.11	6.40, 7.06	0.31	0.90	135
			0.849, 0.722, 0.709				
Ni	28	8.9	8.33	7.47, 8.27	0.38	0.89	140
			1.01, 0.877, 0.858				
Cu	29	8.96	8.99	8.04, 8.91	0.40	0.89	145
			1.10, 0.954, 0.935				

<sup>a</sup> 1.3% Ar;    <sup>b</sup> 23.2% O;    <sup>c</sup> 75.5% N

Il contributo a  $P_L$  diventa quindi

$$P_L(E', E_0)|_{\text{photo}} = \left\{ [1 - f(E_0)] \delta(E' - E_0) + \sum_k f_k(E_0) \delta(E' - (E_0 - E_k)) \right\} \quad (6.9)$$

dove abbiamo definito  $f = \sum_k f_k = \sum_k (f_1 + f_2)_k$  e la somma su  $k$  considera tutti i raggi X che devono essere considerati individualmente.

Per calcolare la perdita di energia per scattering Compton bisogna “seguire” il fotone scatterato per vedere se esso subisce ulteriori interazione nel rivelatore.

In un trattamento rigoroso si dovrebbero seguire (attraverso un Monte Carlo) tutti i fotoni ed elettroni secondari prodotti da ogni processo iniziale per determinare la perdita totale di energia. Nel regime di interesse per l'astronomia X, per contatori a gas l'energia di utilizzo è tale per cui il termine  $\mu_c/\mu$  è trascurabile, mentre per i cristalli scintillatori possiamo usare l'approssimazione

$$P_L(E', E_0)|_{\text{Comp}} = a_1(E_0) \delta(E' - E_0) + a_2(E_0) \delta(E' - (E_0 - E_k)) + \frac{a_3(E_0)}{E_C} H(E_C - E') \quad (6.10)$$

dove  $H(x)$  è la funzione scalino definita come

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

I coefficienti  $a_1(E_0)$  rappresentano la frazione di fotoni Compton che alla fine depositeranno tutta la loro energia; i coefficienti  $a_2(E_0)$  la frazione di fotoni Compton che terminano con un assorbimento fotoelettrico che porterà ad una fuga di un fotone X dalla shell  $K$ . Ciò che rimane, cioè

$$a_3(E_0) = 1 - a_1(E_0) - a_2(E_0) \quad (6.11)$$

viene approssimato con un deposito di energia a spettro costante da zero fino ad una energia massima  $E_C$  che può essere perduta in uno scattering singolo.

E' bene mettere in evidenza che finora abbiamo sempre considerato fotoni che incidono sulla finestra del rivelatore. Vi sono altri affetti di cui bisogna tenere conto, quali fotoni che vengono scatterati via Compton dal collimatore, e fotoni che penetrano il rivelatore senza subire interazioni e sono poi scatterati indietro. Per sorgenti puntiformi si tiene conto di questi effetti nella determinazione del fondo, ma possono diventare importanti nello studio del fondo cosmico diffuso.

### 6.3 Fitting spettrale e XSPEC

XSPEC è il programma che viene utilizzato dalla maggior parte degli studiosi che si occupano di studi spettrali nella banda X. E' stato sviluppato al Goddard Space Flight Center della NASA

da Keith Arnaud, ed ora il suo sviluppo viene portato avanti da una squadra di programmatori e/o astrofisici sia al Goddard che in altre parti del mondo. Per una trattazione particolareggiata rimandiamo al suo manuale, disponibile sia on-line che come aiuto a linea di comando. Quello che tratteremo qui sarà solamente la “filosofia” che sta alla base del programma e che, alla luce di quanto abbiamo detto nella sezione precedente, ci sarà del tutto naturale.

Da un punto di vista operativo, un qualsiasi spettrometro non ci fornisce lo spettro di una sorgente ma conteggi  $C$  per canale strumentale  $I$ . Questo spettro osservato è in relazione con lo spettro vero della sorgente  $f(E)$  attraverso la relazione (vedi la (6.3))

$$C(I) = \int_0^{\infty} f(E) R(I, E) dE \quad (6.12)$$

La funzione  $R(I, E)$  viene detta *risposta del rivelatore* e, come abbiamo visto, è proporzionale alla probabilità che un fotone incidente di energia  $E$  venga rivelato nel canale  $I$ .

Da un punto di vista teorico, si dovrebbe essere in grado di determinare lo spettro della sorgente  $f(E)$  invertendo Eq. 6.12. Sfortunatamente questo non è in generale possibile perché queste inversioni non sono univoche e sono instabili a piccole variazioni in  $C(I)$ .

La maniera alternativa è quindi quella di scegliere un modello spettrale  $f(E)$  che possa essere descritto da un (piccolo) numero di parametri e “concordarlo” (*fit*) ai dati (conteggi) ottenuti dallo spettrometro. Si calcola quindi una statistica di fit che ci permetta di giudicare se il modello “concorda” con i dati sperimentali.

I parametri del modello sono poi variati per trovare l'insieme dei parametri che fornisca la migliore statistica di fit. Questi valori diventeranno i *parametri del fit migliore (best fit parameters)* e lo spettro ottenuto con questi parametri verrà detto il *best fit model*  $f_b(E)$ .

Abbiamo già visto che la statistica di fit più comunemente utilizzata per determinare il *best fit* è quella del  $\chi^2$ , definita dall'Eq. 6.1 Una volta ottenuto un modello di *best fit* abbiamo visto che un test utile per determinare, tra tutti i possibili diversi modelli di *best fit* possibili quello “migliore” è attraverso il F-test.

Un altro importante argomento da considerare è la determinazione dell'intervallo di valori di un parametro di *best fit* all'interno del quale si possa essere confidenti che giaccia il vero valore del parametro. Questo intervallo viene detto *intervallo di confidenza* e viene calcolato variando il valore del parametro fino a quando il  $\chi^2$  aumenta di una certa quantità al di sopra del valore minimo o di *best fit*.

La quantità di cui il  $\chi^2$  viene aumentato (detto  $\Delta\chi^2$  critico) dipende dal livello di confidenza che viene richiesto e dal numero di parametri su cui lo si vuole calcolare. Il  $\Delta\chi^2$  critico per alcune situazioni standard è mostrato in Tabella 6.2

Riassumendo abbiamo che per effettuare un fit spettrale abbiamo bisogno di (i) uno spettro osservato  $C(I)$ ; (ii) una risposta del rivelatore  $R(I, E)$ ; (iii) un modello spettrale  $f(E)$ . Con queste tre componenti la procedura per ottenere il modello di *best fit* sarà:

- Si crea un modello spettrale parametrizzato che ci si aspetta rappresenti lo spettro vero della sorgente.
- Vengono dati dei valori iniziali ai parametri del modello.

Tabella 6.2: Intervalli di confidenza vs  $\Delta\chi^2$ 

Intervallo	Nr Parametri		
	1	2	3
Confidenza (%)			
68	1.00	2.30	3.50
90	2.71	4.61	6.25
99	6.63	9.21	11.3

- ❑ In base ai valori dei parametri assegnati, si predice quale sia lo spettro in conteggi in ogni canale che sarebbe rilevato dal nostro spettrometro per il modello dato.
- ❑ Si confronta lo spettro predetto con quello osservato dallo strumento.
- ❑ I valori dei parametri del modello vengono variati fino a quando non si ottiene il *best fit* tra il modello teorico ed i dati osservati.
- ❑ Si calcola la bontà del fit per determinare come il nostro modello descrive bene i dati osservati, e si calcolano gli intervalli di confidenza per i parametri del modello.

Vediamo ora di dettagliare le tre componenti di cui sopra.

#### ❑ **C(I): Lo spettro osservato**

Per ottenere lo spettro osservato  $C(I)$  per una data osservazione XSPEC utilizza due files: un file di dati (*data file*) ed un file di fondo (*background file*). Entrambi i files sono scritti in un formato binario denominato FITS<sup>1</sup>. Il file di dati contiene, tra le altre cose, la lista dei conteggi rivelati in ogni canale. XSPEC usa il file di fondo per determinare un tasso di conteggio (*count rate*) netto a fondo sottratto in unità di conteggi al secondo. Il fondo viene scalato ai dati per il rapporto delle keyword BACKSCAL contenute nei files dati e fondo. Inoltre il file di dati viene scalato per il tempo di esposizione (keyword EXPOSURE). Quindi il tasso di conteggio netto a fondo sottratto è dato da

$$C(I) = \frac{D(I)}{t_D} - \frac{b_D}{b_B} \frac{B(I)}{t_B} \quad (6.13)$$

dove  $D(I)$  e  $B(I)$  sono i conteggi nei due files di dati e fondo, e  $t_D$  e  $t_B$  sono i tempi di esposizione nei due files di dati e fondo.  $b_D$  e  $b_B$  sono i valori di BACKSCAL nei due files.

#### ❑ **R(I, E): La risposta dello strumento**

<sup>1</sup>La loro manipolazione può essere effettuata con i programmi contenuti nel pacchetto FTOOLS.

Prima che XSPEC possa prendere un insieme di valori dei parametri e predire lo spettro che sarebbe rivelato dallo strumento, è necessario che il programma conosca le caratteristiche specifiche dello strumento. Questa informazione è nota come *risposta del rivelatore*. Come abbiamo già visto,  $R(I, E)$  è proporzionale alla probabilità che un fotone incidente di energia  $E$  venga rivelato nel canale  $I$  del rivelatore. Con questa definizione  $R(I, E)$  è una funzione continua di  $E$ . Questa funzione continua viene convertita in una funzione a valori discreti dal programma che genera la cosiddetta **matrice di risposta**, che definisce gli intervalli di energia  $E_J$  tali che

$$R_D(I, J) = \int_{E_{J-1}}^{E_J} R(I, E) dE \quad (6.14)$$

XSPEC quindi legge gli intervalli di energia  $E_J$  e la matrice di risposta  $R_D(I, J)$  da un file di risposta (*response file*) che è scritto in un formato compresso che contiene solamente gli elementi non nulli della matrice. Con XSPEC è inoltre possibile utilizzare un file di risposta ausiliario (*auxiliary response file*) che contiene un vettore  $A_D(J)$  che XSPEC moltiplica con  $R_D(I, J)$  nel seguente modo

$$R_D(I, J) \rightarrow R_D(I, J) * A_D(J) \quad (6.15)$$

Per convenzione, la matrice di risposta è in unità di  $\text{cm}^2$ .

#### □ **f(E): Il modello di spettro**

Il modello di spettro  $f(E)$  viene calcolato all'interno di XSPEC utilizzando gli intervalli di energia definiti nella matrice di risposta

$$f_D(J) = \int_{E_{J-1}}^{E_J} f(E) dE \quad (6.16)$$

ed è in unità di fotoni  $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ . XSPEC permette la costruzione di modelli composti composti di componenti additive (ad esempio leggi di potenza, corpi neri, ecc) e componenti moltiplicative che modificano le componenti additive moltiplicandole per un fattore dipendente dall'energia (ad esempio assorbimento fotoelettrico, edges, ecc). I modelli possono essere definiti con una notazione algebrica. Ad esempio, la seguente espressione

$$\text{phabs(power + phabs(bbody))}$$

definisce un corpo nero assorbito (phabs(bbody)) aggiunto ad una legge di potenza. Il risultato è poi modificato da un'altra componente di assorbimento.



### □ Fit e intervalli di confidenza

Una volta che i dati sono stati letti ed il modello è stato definito, XSPEC usa un algoritmo di Levenberg-Marquard modificato (basato sulla routine CURFIT di Bevington) per trovare i valori di *best fit* dei parametri del modello. L'algoritmo usato, lavorando su di un intervallo ristretto nello spazio dei parametri, potrebbe ancorarsi in un minimo locale e non trovare il *best fit* globale. Ovviamente il processo di convergenza è molto più veloce se vengono dati dei valori iniziali ai parametri vicini ai valori attesi.

Alla fine del processo XSPEC mostrerà i valori dei parametri di *best fit*, insieme con gli intervalli di confidenza al 68% stimati dalle derivate rispetto ai parametri del modello. Questi intervalli di confidenza sono dati a puro titolo indicativo. Per calcolare gli intervalli di confidenza per un parametro di interesse XSPEC ha il comando `error` che fissa il parametro di interesse ad un particolare valore e fa un fit su tutti gli altri parametri. Vengono presi nuovi valori del parametro di interesse fino a quando non si è ottenuto il  $\Delta\chi^2$  richiesto. Per calcolare i nuovi valori del parametro di interesse a partire dal valore dato XSPEC usa un algoritmo di interpolazione cubica iterativa. Per calcolare intervalli di confidenza per diversi parametri contemporaneamente XSPEC può lavorare su di una "griglia" di valori dei parametri.

Vogliamo concludere questa breve introduzione all'analisi spettrale con XSPEC discutendo il caso in cui il nostro spettro sia stato accumulato da una sorgente molto debole e quindi il numero di conteggi in ogni (qualche) canale sia molto piccolo. In questo caso non è possibile utilizzare la statistica del  $\chi^2$  perché questa assume che i conteggi nei singoli canali seguano una distribuzione Gaussiana (in altre parole si assume che  $\sigma^2(I) = C(I)$ ). Una statistica alternativa, detta statistica C (dal nome dell'autore Cash), utilizza una funzione di verosimiglianza diversa dalla (6.1)

$$C = 2 \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i \ln y(x_i) + \ln y_i!) \quad (6.17)$$

dove  $y_i$  sono i dati osservati e  $y(x_i)$  i valori della funzione. I parametri di *best fit* si ottengono minimizzando  $C$  per qualche funzione modello  $y$ . E' importante sottolineare che nel caso pratico di dati spettrali, a questi **non deve essere stato sottratto il fondo**. Un approccio alternativo è quello di continuare ad usare la statistica di  $\chi^2$  ma di cambiare il peso dei singoli dati. Questo può essere fatto utilizzando i comandi `weight gehrels` oppure `weight Churazov`.