

**Dispense per il Corso**

**Misure Astrofisiche  
Parte II**

Mauro Orlandini

Anno Accademico 2005/2006

*Versione aggiornata al 7 Giugno 2006 13:05*



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Accrescimento come Sorgente di Energia</b>	<b>5</b>
2.1	Fonti di energia per sorgenti cosmiche di raggi X . . . . .	5
2.2	Il limite di Eddington . . . . .	6
2.3	Lo spettro di emissione . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Elementi di Dinamica dei Gas</b>	<b>9</b>
3.1	Dinamica dei gas . . . . .	9
3.2	Le equazioni della dinamica dei gas . . . . .	9
3.3	Trasporto radiativo: Introduzione . . . . .	11
3.4	Flussi stazionari adiabatici ed isotermici . . . . .	14
3.5	Onde sonore . . . . .	16
3.6	Accrescimento stazionario a simmetria sferica . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Teoria Cinetica del Plasma</b>	<b>27</b>
4.1	Definizione di plasma . . . . .	27
4.2	Neutralità di carica, oscillazioni di plasma e lunghezza di Debye . . . . .	27
4.3	Collisioni Coulombiane . . . . .	30
4.4	Plasmi termici: tempo di rilassamento e libero cammino medio . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Processi Radiativi</b>	<b>37</b>
5.1	Introduzione . . . . .	37
5.2	Processo di scattering . . . . .	38
5.3	Random walk . . . . .	39
5.4	Bremsstrahlung . . . . .	41
5.4.1	Bremsstrahlung termico . . . . .	44
5.4.2	Assorbimento per bremsstrahlung termico . . . . .	46
5.5	Scattering Compton . . . . .	46
5.5.1	Scattering da elettroni a riposo . . . . .	46
5.5.2	Scattering da elettroni in movimento . . . . .	48
5.5.3	Il parametro di Comptonizzazione $y$ . . . . .	50
5.5.4	Significato fisico del parametro di Comptonizzazione $y$ . . . . .	52

5.5.5	Regimi spettrali per scattering multipli . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Tecniche di Osservazione</b>	<b>59</b>
6.1	Introduzione . . . . .	59
6.2	Rivelatori per astronomia X . . . . .	59
6.2.1	Contatori proporzionali . . . . .	62
6.2.2	Contatori proporzionali a scintillazione . . . . .	63
6.2.3	Tecniche di reiezione del fondo . . . . .	64
6.2.4	Rivelatori a scintillazione . . . . .	65
6.2.5	Rivelatori a semiconduttore . . . . .	67
6.2.6	Microcalorimetri . . . . .	67
6.3	Collimatori meccanici . . . . .	68
6.4	Tecniche di focalizzazione di raggi X e $\gamma$ . . . . .	70
6.4.1	Ottiche di focalizzazione di raggi X . . . . .	70
6.4.2	Diffrazione di Bragg e Laue . . . . .	74
6.5	Rivelazione di raggi X da sorgenti cosmiche: Considerazioni statistiche . . . . .	84
6.6	Il rocking come tecnica per la determinazione del fondo . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Fit Spettrale e XSPEC</b>	<b>89</b>
7.1	Introduzione . . . . .	89
7.2	Fondamenti di fitting spettrale . . . . .	89
7.3	Fitting spettrale e XSPEC . . . . .	93
<b>A</b>	<b>Spettri X di Sorgenti Celesti</b>	<b>99</b>
A.1	CI Cam . . . . .	99
A.2	Vela X-1 . . . . .	104
A.3	4U1626-67 . . . . .	107
<b>B</b>	<b>Derivazione di Eq. 5.29</b>	<b>109</b>

# Elenco delle figure

3.1	Geometria per raggi incidenti formanti un angolo $\theta$ con la normale $\mathbf{n}$ all'unità di area $dA$ . . . . .	12
3.2	Numero di Mach al quadrato $\mathcal{M}^2 = v^2(r)/c_s^2(r)$ in funzione della distanza $r/r_s$ per un flusso di gas adiabatico, in accrescimento a simmetria sferica, nel campo gravitazionale di una stella. . . . .	22
4.1	Collisioni Coulombiane di due particelle di stessa carica (in questo caso positiva) e stessa massa. . . . .	31
4.2	Definizione della geometria nel caso urti Coulombiani di una particella di plasma di velocità $v$ . . . . .	33
5.1	Campo di radiazione per un mezzo di dimensione $L$ . . . . .	42
5.2	Definizione della geometria per un elettrone $e$ che si muove nel campo di radiazione dello ione di carica $Ze$ . . . . .	43
5.3	Definizione della geometria per un lo scattering di un fotone da parte di un elettrone inizialmente a riposo. . . . .	47
5.4	Definizione della geometria dello scattering Compton nel SdR $K$ dell'osservatore e nel SdR $K'$ dell'elettrone a riposo. . . . .	49
5.5	Spettro emergente da un mezzo termico, non relativistico caratterizzato da emissione ed assorbimento libero-libero e da scattering Compton inverso saturato. . . . .	56
5.6	Spettro prodotto da Comptonizzazione non saturata di fotoni di bassa energia su elettroni termici. . . . .	58
6.1	Assorbimento atmosferico dei raggi X in funzione dell'altitudine. . . . .	60
6.2	Coefficiente di assorbimento per unità di massa per l'Alluminio. . . . .	61
6.3	Configurazione tipica di un contatore proporzionale. . . . .	62
6.4	Sezione della finestra di ingresso del rivelatore LECS a bordo del satellite BeppoSAX. . . . .	64
6.5	Funzionamento dell'anticoincidenza del rivelatore PDS a bordo di BeppoSAX. . . . .	66
6.6	Diagramma di funzionamento di un rivelatore a semiconduttore. . . . .	67
6.7	Principio operativo di un microcalorimetro. . . . .	68
6.8	Schema di collimatore meccanica per raggi X. . . . .	69

6.9	Funzione di trasmissione dei collimatori dell'esperimento di alta energia (15–200 keV) PDS a bordo del satellite BeppoSAX. . . . .	69
6.10	Visione esplosa dell'esperimento di alta (15–200 keV) energia PDS a bordo di BeppoSAX. . . . .	71
6.11	Efficienze di riflessione teoriche superficiali in funzione dell'energia e della lunghezza d'onda per diversi angoli di incidenza radente e per diversi materiali. . .	73
6.12	Sezioni di superfici riflettenti per specchi di raggi X. . . . .	75
6.13	Processo costruttivo di uno specchio per raggi X per elettroformatura. . . . .	76
6.14	Immagini di uno dei tre specchi per raggi X a bordo di XMM-Newton. . . . .	77
6.15	Geometria della diffrazione di Bragg. . . . .	78
6.17	Definizione degli indici di Miller per l'orientamento dei piani reticolari di un cristallo	78
6.16	Geometria della diffrazione di Laue. . . . .	79
6.18	Curve teoriche di ottimizzazione dello spessore di cristalli di Germanio per diffrazione di Laue sul piano cristallino (440). . . . .	80
6.19	Confronto tra la diffrazione di Bragg da un cristallo perfetto ed uno reale. . . . .	80
6.20	Definizione della mosaicità $\Delta\theta_B$ di un cristallo. . . . .	81
6.21	Principio di funzionamento di una lente di Laue. . . . .	82
6.22	Lente di Laue con cristalli innestati. . . . .	82
6.23	Lente di Laue dell'esperimento CLAIRE. . . . .	83
6.24	Serie temporale della pulsar X GX301–2 (periodo di pulsazione di $\sim 700$ sec) accumulata dallo strumento PDS. . . . .	87
A.1	CI Cam: curve di luce in varie bande. . . . .	100
A.2	Spettro di CI Cam osservato da BeppoSAX nella prima osservazione. . . . .	101
A.3	Spettro di CI Cam osservato da BeppoSAX nella seconda osservazione. . . . .	102
A.4	Confronto tra gli spettri di CI Cam osservati nelle due osservazioni BeppoSAX. .	103
A.5	Spettro della pulsar X binaria Vela X–1. . . . .	105
A.6	Dipendenza della riga di ciclotrone nello spettro di Vela X–1 al variare del modello.	106
A.7	Spettro della pulsar X 4U1626–67. . . . .	107
B.1	Collisione di un elettrone con uno ione ed emissione di bremsstrahlung. . . . .	109

# Elenco delle tabelle

7.1	Proprietà di materiali utilizzati in sistemi di rivelazione per astronomia X . . . . .	92
7.2	Intervalli di confidenza vs $\Delta\chi^2$ . . . . .	95



# Capitolo 1

## Introduzione

Con il termine “Astrofisica delle Alte Energie” si intende quella parte dell’astrofisica che studia i processi fisici che avvengono in sorgenti celesti che hanno il loro picco di emissione nella banda dei raggi X/γ. I processi maggiormente coinvolti saranno quindi scattering Compton e bremsstrahlung e nella maggior parte dei casi interesseranno oggetti compatti, oggetti cioè il cui parametro di compattezza, definito come il rapporto tra la loro massa ed il loro raggio, è molto grande.

La prima evidenza osservativa che in sorgenti che emettono raggi X sono presenti oggetti “compatti” nel senso proprio del termine — cioè oggetti di piccole dimensioni e di enormi densità — è avvenuta nel 1971 con la scoperta di emissione pulsata a 4.8 sec da parte della sorgente X-3 nella costellazione del Centauro. Assumendo che la pulsazione osservata fosse dovuta al moto di rotazione della stella su se stessa (ipotesi poi rivelatasi corretta), affinché la superficie della stella non venga distrutta dalla forza centrifuga è necessario che

$$\frac{GM}{R^2} \gtrsim \Omega^2 R$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale,  $\Omega$  la velocità angolare e  $M$  e  $R$  sono la massa ed il raggio dell’oggetto. Da questa espressione segue che  $G \langle \rho \rangle \gtrsim \Omega^2$ , dove  $\langle \rho \rangle$  è la densità media dell’oggetto. Un periodo di rotazione di 4.8 sec implica che  $\langle \rho \rangle \gtrsim 10^7 \text{ g cm}^{-3}$ , da cui la natura compatta dell’oggetto.

Questa scoperta ha aperto un nuovo orizzonte di ricerca perché, per la prima volta, si potevano studiare contemporaneamente gli effetti sulla materia dovuti sia a forti campi gravitazionali<sup>1</sup> che ad enormi campi magnetici<sup>2</sup>. Le due discipline che li studiano, la teoria della relatività (sia generale che ristretta) e la magnetoidrodinamica (quantistica), trovavano quindi il loro laboratorio ideale nelle cosiddette pulsar X. Proprio per questo, un termine più appropriato per questa

---

<sup>1</sup>Il rapporto tra la forza di gravità su di una stella di neutroni ( $M \sim M_\odot$  e  $R_{\text{ns}} \sim 10 \text{ Km}$ ) e quella sulla superficie della Terra è  $(M_\odot/M_\oplus)(R_\oplus/R_{\text{ns}})^2 \sim 10^{10}$ .

<sup>2</sup>Per conservazione del flusso magnetico, una stella di neutroni che abbia avuto come progenitore una stella di tipo solare con campo magnetico  $\sim 100$  gauss, possederà un campo magnetico dell’ordine di  $100 \cdot (R_\odot/R_{\text{ns}})^2 \sim 10^{12}$  gauss.

branca della fisica dovrebbe essere *Astrofisica Relativistica*, ma la dizione “Astrofisica delle Alte Energie” viene ancora mantenuta per ragioni storiche.

Il fatto che questi oggetti producano la maggior parte della loro energia nella banda dei raggi X implica che il loro “motore” non sia la conversione dell’energia gravitazionale in energia termica (attraverso le reazioni nucleari la cui emissione viene termalizzata dall’atmosfera stellare, come nel nostro Sole) dato che gli spettri osservati non sono termici. Subito dopo la loro scoperta ci si è reso conto che il loro “motore” è la conversione in energia elettromagnetica dell’energia cinetica della materia che viene catturata dal campo gravitazionale dell’oggetto compatto: il cosiddetto *accrescimento di materia*. Infatti l’evidenza di moto orbitale dell’oggetto compatto di Cen X-3 è stata la prima prova osservativa che questo tipo di sorgenti sono sistemi binari contenenti un oggetto compatto (nana bianca, stella di neutroni o buco nero) ed una stella “normale” a cui strappano materia; a questi sistemi è stato dato il nome di binarie X.

Tra le tante “Misure Astrofisiche” che possono essere effettuate ho scelto **la misura di uno spettro X emesso da un oggetto compatto**. Alla luce di quanto detto sopra, il corso si occuperà quindi dello studio dell’emissione da parte di oggetti compatti, della determinazione dei processi che hanno dato origine all’emissione osservata, e la determinazione delle proprietà fisiche della materia in questi sistemi.

Dopo l’introduzione del concetto di accrescimento nel primo capitolo, nel secondo e nel terzo vengono dati i fondamenti di dinamica dei gas e dei plasmi che servono a descrivere le condizioni del flusso di materia che viene catturato ed accresciuto. Nel successivo capitolo vengono descritti i processi radiativi che sono alla base dell’emissione osservata in questi sistemi.

Dopo l’introduzione “teorica” dei processi fisici, viene data una panoramica sui sistemi di rilevazione dei raggi X di natura cosmica, per poter comprendere quali sono le problematiche sperimentali e capire la maniera in cui gli spettri vengono prodotti. Particolare rilievo è stato dato alla descrizione dei rivelatori a bordo del satellite per Astronomia X BeppoSAX, ideato e costruito dagli Istituti di Astrofisica del CNR (ora confluiti nell’INAF) in collaborazione con un Istituto del CNR Olandese e lo Science Department dell’Agenzia Spaziale Europea. Lo strumento di alta energia PDS era sotto la responsabilità del Professor Frontera ed è stato realizzato dal gruppo di Astronomia X dell’Istituto TeSRE (ora IASF) del CNR di Bologna, di cui faccio parte.

Lo strumento informatico di analisi spettrale in raggi X, il programma XSPEC, viene brevemente descritto nell’ultimo capitolo, in cui vengono dati i rudimenti dell’analisi spettrale ed una brevissima introduzione di statistica per comprendere come ottenere lo spettro che meglio si concorda con i dati, ed i parametri fisici ad esso associato.

Infine, copia di queste dispense è disponibile online al sito <http://www.iasfbo.inaf.it/~mauro/Didattica/corsoX>

## Bibliografia essenziale

- ❑ **Accretion Power in Astrophysics**, Frank J., King A., and Raine D., Cambridge University Press (2002)

- ❑ **Radiative Processes in Astrophysics**, Rybicki G.B. and Lightman A.P., Wiley Publication (1979)
- ❑ **X-ray Astronomy**, Giacconi R. and Gursky H. (eds), Reidel Publishing (1974)
- ❑ **Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing**, Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. and Vetterling W.T., Cambridge University Press (1992) disponibile anche online al sito <http://www.nr.com>
- ❑ **SAX Observers' Handbook**, disponibile online al sito <ftp://ftp.asdc.asi.it/pub/sax/doc/handbook>
- ❑ **The Gamma Ray Lens**, disponibile online al sito <http://sci.esa.int/science-e/www/object/index.cfm?fobjectid=38094>
- ❑ **XSPEC User Manual** disponibile online al sito <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/xanadu/xspec>



# Capitolo 2

## Accrescimento come Sorgente di Energia

### 2.1 Fonti di energia per sorgenti cosmiche di raggi X

Per i fisici del 19° secolo l'unica fonte di energia in grado di spiegare l'emissione da sorgenti cosmiche era la gravità. Fu lo stesso Lord Kelvin a ricavare un tempo scale di durata della vita del nostro Sole assumendo che la sua luminosità  $L_{\odot}$  venga prodotta da contrazione gravitazionale:  $\tau_{KH} = GM_{\odot}^2/R_{\odot}L_{\odot} \simeq 3 \cdot 10^7$  anni. Già allora questo valore era troppo piccolo rispetto all'età della stessa Terra. Nel 20° secolo, con la scoperta delle reazioni nucleari, la fonte di energia del nostro Sole è stata identificata con la reazione nucleare di fusione di quattro atomi di Idrogeno in un atomo di Elio ( $4H_1^1 \rightarrow He_2^4 + 2e^+ + 2\nu_e + n\gamma$ ). Questa reazione avviene inoltre al ritmo "giusto", producendo il giusto equilibrio tra forze di radiazione e forze gravitazionali. Con lo sviluppo di tecniche di rivelazione in altre bande dello spettro elettromagnetico, dal radio ai raggi X e  $\gamma$ , ci si è resi conto sia dell'esistenza di oggetti compatti (previsti teoricamente), sia che la gravità ricopre un ruolo fondamentale per la produzione di radiazione ad alta energia. In particolare, l'**accrescimento** di materia, cioè la conversione dell'energia cinetica della materia che viene accresciuta in radiazione elettromagnetica, è stato riconosciuto come il motore principale in grado di spiegare l'emissione per sistemi contenenti oggetti compatti. Possiamo dare una stima, per ordine di grandezza, dell'energia prodotta per unità di massa nel caso in cui la fonte sia energia gravitazionale

$$\frac{\Delta E_{acc}}{m} = G \left( \frac{M_*}{R_*} \right) \simeq \begin{cases} 10^{20} \text{ erg g}^{-1} & \text{SN} \\ 10^{17} \text{ erg g}^{-1} & \text{NB} \end{cases} \quad (2.1)$$

Se l'oggetto che accresce è una stella di neutroni (SN), allora  $M_* \sim 1M_{\odot}$  e  $R_* \sim 10 \text{ Km}$ ; per una nana bianca (NB) avremo invece  $M_* \sim 1M_{\odot}$  e  $R_* \sim 10^9 \text{ cm}$ .

Per confronto, l'energia prodotta per unità di massa per fusione nucleare ( $4H_1^1 \rightarrow He_2^4$ ) è:

$$\frac{\Delta E_{nuc}}{m} = 0.007 c^2 \simeq 6 \cdot 10^{18} \text{ erg g}^{-1} \quad (2.2)$$

Come vediamo, l'efficienza del processo di accrescimento è funzione del **parametro di compattezza**  $M/R$ .

## 2.2 Il limite di Eddington

Per un dato valore del parametro di compattezza, la luminosità di un sistema la cui fonte principale è l'accrescimento di massa dipenderà dal tasso di accrescimento  $\dot{M}$ . Per alte luminosità lo stesso tasso di accrescimento potrebbe essere controllato dal momento della quantità di moto (da ora in poi momento) trasferito dalla radiazione alla materia che accresce attraverso processi di scattering e assorbimento. Questo può dar luogo ad una luminosità limite.

Si consideri il caso di accrescimento **stazionario** ed a **simmetria sferica**. Assumiamo inoltre che la materia in accrescimento **sia composta principalmente da Idrogeno e sia completamente ionizzata**. Lo scattering Thomson dei fotoni<sup>1</sup> avverrà principalmente sugli elettroni, dato che

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \simeq 6.7 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

dove  $r_0 = e^2/mc^2 \sim 2.8 \cdot 10^{-13}$  cm per un elettrone, misura la "dimensione" di una carica puntiforme assumendo che tutta l'energia a riposo sia di origine elettromagnetica.

Se indichiamo con  $S$  il flusso di energia (in unità di  $\text{erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ ) allora la forza dovuta alla radiazione sarà data da

$$F_{\text{rad}} = \sigma_T \frac{S}{c}$$

La forza elettrostatica di Coulomb tra elettroni e protoni fa sì che mentre la radiazione spinge gli elettroni, questi ultimi si *trascinano* con loro anche i protoni. La forza di gravità agisce quindi sul sistema elettrone-protone con forza

$$F_{\text{grav}} = G \frac{M(m_p + m_e)}{r^2} \simeq G \frac{Mm_p}{r^2}$$

Se la luminosità (in unità di  $\text{erg sec}^{-1}$ ) è  $L$  allora il flusso di energia sarà  $S = L/4\pi r^2$ , avendo assunto simmetria sferica. Quindi una coppia elettrone-protone sarà soggetta alla forza

$$F_{\text{tot}} = F_{\text{grav}} - F_{\text{rad}} = \left( GMm_p - \frac{\sigma_T L}{4\pi c} \right) \frac{1}{r^2}$$

La luminosità limite, detta luminosità di Eddington, si ottiene quando

$$L_{\text{Edd}} = 4\pi c \frac{GMm_p}{\sigma_T} \simeq 1.3 \cdot 10^{38} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ erg sec}^{-1} \quad (2.3)$$

Per  $L \gg L_{\text{Edd}}$  la pressione di radiazione è maggiore della forza gravitazionale e quindi l'accrescimento viene interrotto.

Nel caso di accrescimento *non simmetrico*, se questo avviene su una frazione  $f$  della superficie della stella, allora il limite sarà  $fL_{\text{Edd}}$ .

<sup>1</sup>Quando radiazione investe una particella carica, questa verrà accelerata e quindi emetterà radiazione a sua volta, con la stessa frequenza della radiazione incidente nel caso non relativistico

Per processi *non stazionari* (vedi esplosioni di supernova)  $L_{\text{Edd}}$  può essere superata di molti ordini di grandezza.

Il limite di Eddington implica un limite sul tasso di accrescimento **stazionario**

$$L_{\text{acc}} = G \frac{M\dot{M}}{R_*} \simeq \begin{cases} 1.3 \cdot 10^{36} \dot{M}_{16}(M/M_{\odot})(10 \text{ Km}/R_*) & \text{erg sec}^{-1} \\ 1.3 \cdot 10^{33} \dot{M}_{16}(M/M_{\odot})(10^9 \text{ cm}/R_*) & \text{erg sec}^{-1} \end{cases} \quad (2.4)$$

quindi

$$\dot{M}_{16}|_{\text{sta}} \leq \begin{cases} 10^2 & \text{Stella Neutroni} \\ 10^5 & \text{Nana Bianca} \end{cases}$$

Nel caso di un buco nero si preferisce parametrizzare la luminosità di accrescimento in termini dell'efficienza  $\eta$  di conversione dell'energia a riposo per unità di massa in radiazione

$$\begin{aligned} L_{\text{acc}} &= \eta \dot{M} c^2 \\ &= 2\eta G \frac{M\dot{M}}{R_*} \end{aligned} \quad (2.5)$$

dove abbiamo usato  $R_* = 2GM/c^2$  come “raggio” di un buco nero. Come abbiamo visto, per la reazione di fusione nucleare  $4\text{H}_1^1 \rightarrow \text{He}_2^4$  abbiamo  $\eta = 0.007$ . Da osservazioni di AGN si stima che per un buco nero  $\eta \simeq 0.1$ , dello stesso ordine di grandezza ( $\sim 0.15$ ) di quella stimata per una stella di neutroni, nonostante il parametro di compattezza sia alquanto diverso.

## 2.3 Lo spettro di emissione

Diamo ora alcune stime, per ordine di grandezza, dello spettro di emissione che ci aspettiamo da un oggetto compatto in accrescimento di massa e vediamo se è possibile ricavare informazioni sul tipo di oggetto compatto dalla rivelazione del suo spettro. Definiamo innanzi tutto tre temperature

$$T_{\text{rad}} = \frac{h\bar{\nu}}{k} \iff kT_{\text{rad}} = h\bar{\nu} \quad (2.6a)$$

$$T_{\text{b}} = \left( \frac{L_{\text{acc}}}{4\pi R_*^2 \sigma} \right)^{1/4} \iff \frac{L_{\text{acc}}}{4\pi R_*^2} = \sigma T_{\text{b}}^4 \quad (2.6b)$$

$$T_{\text{th}} = \frac{GMm_{\text{p}}}{3kR_*} \iff G \frac{M(m_{\text{e}} + m_{\text{p}})}{R_*} = 2 \times \frac{3}{2} kT_{\text{th}} \quad (2.6c)$$

Nel caso di un mezzo *otticamente spesso* la radiazione raggiunge l'equilibrio termico con la materia che accresce **prima** che questa raggiunga l'osservatore, e quindi  $T_{\text{rad}} \simeq T_{\text{b}}$ .

Nel caso di un mezzo *otticamente sottile* l'energia di accrescimento è convertita direttamente in energia elettromagnetica e raggiunge l'osservatore, quindi  $T_{\text{rad}} \simeq T_{\text{th}}$ .

Dato che un sistema non può irradiare ad una temperatura minore di  $T_b$ , avremo che

$$T_b \leq T_{\text{rad}} \leq T_{\text{th}}$$

valida se possiamo caratterizzare il sistema con una unica temperatura. Dalla definizione abbiamo che l'intervallo di emissione aspettato per una stella di neutroni ed una nana bianca è

$$\begin{array}{l} 1 \text{ keV} \leq h\bar{\nu} \leq 50 \text{ MeV} \quad \text{Stella Neutroni} \\ 6 \text{ eV} \leq h\bar{\nu} \leq 100 \text{ keV} \quad \text{Nana Bianca} \end{array}$$

# Capitolo 3

## Elementi di Dinamica dei Gas

### 3.1 Dinamica dei gas

Tutta la materia che viene accresciuta si trova nello stato di gas, cioè le sue particelle (elettroni liberi piú varie specie di ioni) interagiscono direttamente **solamente per collisioni**, invece che attraverso forze a “corto raggio”.

Una particella percorrerà una certa distanza, detta *libero cammino medio*  $\lambda$ , prima di cambiare il suo stato a causa di una collisione con un'altra particella. Se il gas è sufficientemente uniforme su lunghezze-scala dell'ordine alcune volte il libero cammino medio, l'effetto delle collisioni sarà quello di rendere casuali (“randomizzare”) le velocità delle particelle attorno ad una velocità media, che chiameremo velocità del gas  $v$ .

Se ci poniamo nel sistema di riferimento che si muove a velocità  $v$ , le particelle avranno una distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann e possono essere descritte da una temperatura  $T$ . Se siamo interessati a lunghezze-scala  $l \gg \lambda$ , possiamo considerare il gas come un **fluido**, caratterizzato da una velocità  $v$ , temperatura  $T$  e densità  $\rho$  in ogni punto.

Possiamo quindi studiare il comportamento di queste variabili in funzione della posizione e del tempo imponendo le leggi di conservazione della massa, del momento e dell'energia. Questo è il dominio di studio della dinamica dei gas.

Se vogliamo tenere in conto le interazioni tra particelle, allora dobbiamo considerare la fisica dei plasmi (o meglio la teoria cinetica dei plasmi).

Se dalla risoluzione delle equazioni troviamo che si hanno grandi variazioni dei parametri su lunghezze scala comparabili con il libero cammino medio delle particelle, allora l'approssimazione a fluido non è piú valida e dobbiamo utilizzare la teoria cinetica dei plasmi.

### 3.2 Le equazioni della dinamica dei gas

Ricaviamoci ora le equazioni che governano la dinamica di un gas partendo dalle tre leggi di conservazione. Avremo inoltre bisogno, per descrivere completamente il flusso del gas, di una equazione di stato e di una appropriata scelta delle condizioni al contorno.

### □ Conservazione della massa (equazione di continuità)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1)$$

### □ Equazione di stato

A causa del moto termico delle sue particelle, il gas è caratterizzato da una pressione  $P$  in ogni punto. L'equazione di stato mette in relazione questa pressione con la densità e la temperatura del gas. I gas "astrofisici" obbediscono alla legge dei gas perfetti

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \quad (3.2)$$

dove  $m_H \simeq m_p$  è la massa dell'atomo di Idrogeno e  $\mu$  è il peso molecolare medio, che è la massa media, per particella di gas, misurata in unità di  $m_H$ . Quindi  $\mu = 1$  per l'Idrogeno neutro,  $1/2$  per Idrogeno ionizzato, e qualcosa nel mezzo per una miscela di gas con abbondanze cosmiche, dipendente dal grado di ionizzazione.

### □ Conservazione del momento

Gradienti nella pressione del gas implicano forze, dato che del momento viene trasferito. Indichiamo con  $\mathbf{f}$  la densità (forza per unità di volume) di ogni altro tipo di forze agenti sul sistema e non dovute a gradienti di pressione. La conservazione del momento (detta anche **equazione di Eulero**) ha allora la forma

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f} \quad (3.3)$$

Il termine  $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  rappresenta la conservazione del momento attraverso il fluido a causa del gradiente di velocità. La presenza di questo termine significa che sono possibili moti stazionari anche nel caso in cui  $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$  ma  $\mathbf{v} \neq 0$ .

Un esempio di forza esterna è la gravità:  $\mathbf{f} = -\rho \mathbf{g}$ . Un altro esempio è la forza dovuta ad un campo magnetico esterno.

Un altro esempio importante di forza esterna è la viscosità, che è il trasferimento di momento lungo gradienti di velocità a causa di moti turbolenti o moti termici.

### □ Conservazione dell'energia

Un elemento di gas possiede due forme di energia: energia cinetica (per unità di volume)  $\frac{1}{2} \rho v^2$  ed energia interna (termica)  $\rho \epsilon$ , dove  $\epsilon$ , l'energia interna per unità di massa, dipende dalla temperatura del gas. Per il teorema di equipartizione dell'energia, ad ogni grado di libertà della particella del gas è assegnata una energia media  $\frac{1}{2} k T$ . Per un gas monoatomico, gli unici gradi di libertà sono i tre traslazionali, e quindi

$$\epsilon = \frac{3}{2} \frac{k T}{\mu m_H} \quad (3.4)$$

Se il gas è formato da molecole, vi saranno ulteriori gradi di libertà dovuti alla rotazione e vibrazione molecolari.

L'equazione di conservazione dell'energia ha dunque la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon + P \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3.5)$$

Il membro a sinistra ci ricorda l'equazione di continuità, con  $(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon)$  la quantità conservata. Il termine contenente  $P$  rappresenta il lavoro dovuto alla pressione.

Nel membro di destra compaiono due nuove quantità: il vettore flusso radiativo  $\mathbf{F}_{\text{rad}}$  ed il vettore flusso di calore per conduzione  $\mathbf{q}$ .

Per definire queste quantità è necessario introdurre il concetto di trasporto radiativo e trovare le equazioni che lo governano.

### 3.3 Trasporto radiativo: Introduzione

Per definire il flusso radiativo introduciamo la grandezza fisica che ne è alla base, la *intensità specifica*  $I_\nu$ , la quale fornisce il flusso di energia  $dE$  per unità di tempo, per unità di area, per unità di angolo solido, per unità di frequenza in una direzione  $\mathbf{n}$  nel punto  $\mathbf{r}$  che attraversa l'unità di area perpendicolare a  $\mathbf{n}$  al tempo  $t$ . Quindi (si veda Figura 3.1)

$$dE = I_\nu dA \cos \theta d\nu d\Omega dt$$

Integrando sull'angolo solido si ottiene il flusso specifico  $F_\nu$ , cioè il tasso netto a cui l'energia attraversa l'unità di area indipendentemente dalla posizione

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\Omega$$

Si noti che se  $I_\nu$  è un campo di radiazione isotropo (cioè indipendente dall'angolo  $\theta$ ), allora il flusso specifico è zero, dato che  $\int \cos \theta d\Omega = 0$ . In altre parole, tanta energia attraverso l'unità di area  $dA$  nella direzione  $\mathbf{n}$  così come nella direzione  $-\mathbf{n}$ .

Il flusso specifico integrato su di una area che racchiude la sorgente ci fornisce la luminosità specifica

$$L_\nu = \int F_\nu dA$$

Integrando in frequenza si ottengono il flusso e la luminosità. Quindi, ritornando alla nostra equazione di conservazione dell'energia (3.5)

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \int d\nu \int d\Omega \mathbf{n} I_\nu(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \quad (3.6)$$

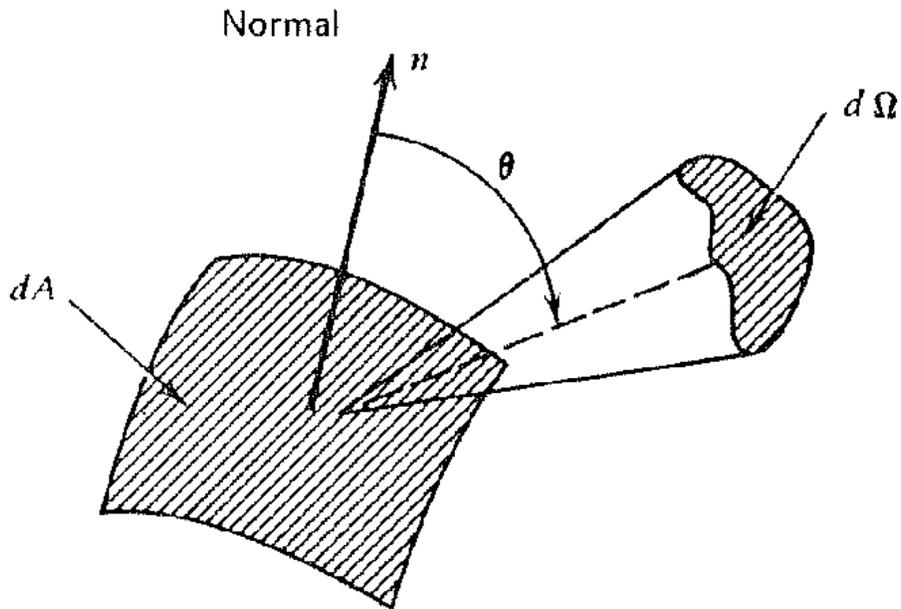


Figura 3.1: Geometria per raggi incidenti formanti un angolo  $\theta$  con la normale  $\mathbf{n}$  all'unità di area  $dA$ .

Il termine  $-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}}$  ci fornisce il tasso a cui l'energia viene emessa (energia negativa) o assorbita (energia positiva) per unità di volume del gas.

La intensità specifica  $I_\nu$  è governata da una ulteriore equazione, che altro non è che la conservazione dell'energia per il campo radiativo, e prende il nome di **equazione del trasporto radiativo**.

La equazione del trasporto radiativo, nel caso **indipendente** dal tempo, può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu &= -\mu_\nu I_\nu + j_\nu \\ &= -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove  $\mu_\nu$  è il coefficiente di assorbimento,  $j_\nu$  il coefficiente di emissione (energia emessa per unità di tempo, per unità di angolo solido, per unità di volume in direzione  $\mathbf{n}$ ), ed abbiamo introdotto la quantità  $\kappa_\nu$ , detta opacità specifica e definita come  $\mu_\nu = \kappa_\nu \rho$ . Questi coefficienti dipendono dal tipo di processi che avvengono nel mezzo, che a loro volta dipendono dal campo di radiazione.

Se introduciamo la funzione sorgente  $S_\nu \equiv j_\nu / \mu_\nu$ , e la *profondità ottica*  $\tau_\nu$  lungo un cammino  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$  dalla sorgente all'osservatore

$$d\tau_\nu = \mu_\nu ds \quad (3.8)$$

allora possiamo riscrivere l'equazione del trasporto

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (3.9)$$

Se il *campo di radiazione* corrisponde ad uno stato di equilibrio termico ad una data temperatura  $T$ , allora sappiamo che  $I_\nu = B_\nu(T)$ , la funzione di Planck (corpo nero). Dato che  $I_\nu$  non dipende dalla posizione (e quindi dalla profondità ottica), allora il membro di destra è nullo e quindi

$$S_\nu = I_\nu = B_\nu(T) \equiv \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (3.10)$$

indipendentemente dal meccanismo di radiazione.

Se il *mezzo* può essere caratterizzato da una temperatura  $T$  (cioè l'emissione è termica), allora

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\mu_\nu} = B_\nu(T) \quad (3.11)$$

che non è altro che la legge di Kirchhoff.

Se gli stati della materia che contribuiscono all'emissione ed all'assorbimento sono popolati con una distribuzione di Boltzmann (cioè  $N(E) \propto \exp(-E/kT)$ ) ad una certa temperatura  $T$ , ma il campo di radiazione **non** è in equilibrio con la materia, allora il mezzo è detto trovarsi in uno stato di *equilibrio termodinamico locale*.

Una condizione necessaria affinché lo spettro emesso sia termico è che la profondità ottica  $\tau_\nu \rightarrow \infty$ . In questo caso diciamo che il mezzo è *otticamente spesso*. Per contro, in un mezzo otticamente spesso  $I_\nu = S_\nu$  (ma non  $B_\nu$ , a meno che non siamo in equilibrio termodinamico locale).

All'altro estremo, se  $\tau_\nu \rightarrow 0$  possiamo trascurare l'assorbimento nell'equazione del trasporto radiativo e quindi Equazione 3.7 si riduce a

$$I_\nu = \int j_\nu ds \quad (3.12)$$

Un tale mezzo è detto *otticamente sottile*.

Infine, se  $S_\nu = 0$ , abbiamo un mezzo puramente assorbente. L'equazione del trasporto (3.9) diventa quindi

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu \quad \implies \quad I_\nu = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) \quad (3.13)$$

Nel caso di una stella, o ogni altro mezzo otticamente spesso, lo stato della materia può essere caratterizzato localmente da una temperatura  $T$  che varia lentamente con la posizione (cioè abbiamo un equilibrio termico localmente, un caso speciale di equilibrio termodinamico locale). In questa approssimazione, l'equazione del trasporto è equivalente a

$$F_\nu = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu\rho} \frac{dB_\nu(T)}{dr} \quad (3.14)$$

che se viene integrata in frequenza diventa

$$F = -\frac{c}{3\kappa_R\rho} \frac{d}{dr}(aT^4) \quad (3.15)$$

dove  $\kappa_R$  è la *opacità media di Rosseland*, definita come

$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{\int \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}$$

ed abbiamo usato la relazione  $\int B_\nu d\nu = (ac/4\pi)T^4 \equiv (\sigma/\pi)T^4$ .

Ritorniamo ora alla nostra equazione di conservazione dell'energia (3.5), ed in particolare alla discussione sul termine  $-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}}$ . Nel caso di un mezzo otticamente sottile (radiazione può uscire dal mezzo senza interazioni) abbiamo visto che

$$-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} = -4\pi \int j_\nu d\nu$$

Nel caso di un mezzo otticamente spesso, allora  $\mathbf{F}_{\text{rad}}$  è data dalla approssimazione di Rosseland (3.15)

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{16\sigma}{3\kappa_R\rho} T^3 \nabla T$$

La seconda nuova quantità introdotta nell'equazione di conservazione dell'energia è il flusso di calore dovuto a conduzione  $\mathbf{q}$ . Questo misura il tasso a cui moti disordinati (principalmente dovuti ad elettroni) trasportano energia termica nel gas, e quindi riducono le differenze di temperatura (termalizzano).

Il sistema di equazioni di conservazione, più l'equazione di stato, l'equazione del trasporto, e una descrizione delle quantità  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{q}$  permettono, in linea di principio, una descrizione completa del comportamento del gas date opportune condizioni al contorno.

Ovviamente, tutte le soluzioni conosciute corrispondono a casi particolari o soluzioni approssimate. Quello che tratteremo ora sono alcune semplici casi in cui la soluzione può dare utili informazioni per casi più complessi.

### 3.4 Flussi stazionari adiabatici ed isotermici

Prima di tutto consideriamo un flusso *stazionario*, per cui tutte le derivate rispetto al tempo siano nulle. Assumiamo poi che non vi siano perdite di energia attraverso radiazione ( $\mathbf{F}_{\text{rad}} = 0$ ) e non vi sia conduzione termica ( $\mathbf{q} = 0$ ) in Eq. 3.5.

Le nostre tre leggi di conservazione della massa, momento ed energia diventano

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.16a)$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f} \quad (3.16b)$$

$$\nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \epsilon + P \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (3.16c)$$

Sostituendo la prima equazione nella terza otteniamo

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 + \epsilon + \frac{P}{\rho} \right) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (3.17)$$

Moltiplicando scalarmente Eq. 3.16b per  $\mathbf{v}$  otteniamo

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla P = \rho \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla P$$

Quindi, eliminando  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$  dalla Eq. 3.17 otteniamo

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla (\epsilon + P/\rho) = \mathbf{v} \cdot \nabla P$$

ed espandendo  $\nabla(P/\rho)$  e fattorizzando

$$\mathbf{v} \cdot [\nabla \epsilon + P \nabla(1/\rho)] = 0$$

Questa relazione implica, dalla definizione dell'operatore gradiente, che se viaggiamo lungo una linea di flusso di gas, cioè seguiamo la velocità  $\mathbf{v}$ , per gli incrementi  $d\epsilon$  e  $d(1/\rho)$  in  $\epsilon$  e  $1/\rho$  deve valere la relazione

$$d\epsilon + P d(1/\rho) = 0$$

Ma dalla definizione di  $\epsilon$  (3.4) e dalla legge dei gas perfetti (3.2) questo equivale a

$$\frac{3}{2} dT + \rho T d \left( \frac{1}{\rho} \right) = 0$$

che ha come soluzione

$$\rho^{-1} T^{3/2} = \text{costante}$$

che può essere scritta in termini della pressione (usando l'equazione di stato (3.2)) come

$$P \rho^{-5/3} = \text{costante} \quad (3.18)$$

Equazione 3.18 descrive il cosiddetto *flusso adiabatico*.

Benchè abbiamo dimostrato che  $P \rho^{-5/3}$  è costante su una linea di flusso, in molti casi si assume che questa costante sia la stessa per ogni linea di flusso del gas. Questo è equivalente a porre l'entropia del gas costante. Questi flussi vengono detti *isoentropici*. Si noti come i termini adiabatici e isoentropici vengono spesso intercambiati.

Se il gas non è mono-atomico, e quindi il coefficiente della energia interna  $\epsilon$  non è  $3/2$ , avremmo ottenuto lo stesso un risultato come in Eq. 3.18, ma con un esponente diverso per  $\rho$ :

$$P\rho^{-\gamma} = \text{costante} \quad (3.19)$$

L'equazione 3.19 è detta *politropica* e  $\gamma$  è detto *indice politropico*. Esso è uguale al rapporto dei calori specifici del gas.

Un altro importante caso speciale di flusso si ottiene assumendo che la temperatura  $T$  sia costante in tutta la regione di interesse. Questo tipo di flusso viene detto *isotermico* ed è equivalente a postulare l'esistenza di un qualche processo fisico che mantenga costante  $T$ . In altre parole, l'equazione di conservazione dell'energia viene sostituita dalla relazione  $T = \text{costante}$ . Utilizzando l'equazione di stato, questa relazione corrisponde a

$$P\rho^{-1} = \text{costante}$$

che ha la stessa forma di Eq. 3.19 con  $\gamma = 1$ .

### 3.5 Onde sonore

Una importante classe di soluzioni del nostro sistema di equazioni del gas corrisponde al caso di *equilibrio idrostatico*. In questo caso, oltre ad imporre un flusso stazionario e l'assenza di perdite di radiazione, imponiamo che  $\mathbf{v} = 0$ . In questo caso la legge di conservazione del momento Eq. 3.16b si riduce a

$$\nabla P = \mathbf{f}$$

Soluzioni di questo tipo sono appropriate ad atmosfere stellari (o planetarie) in equilibrio radiativo.

Assumiamo che abbiamo una soluzione in cui  $P$  e  $\rho$  sono certe funzioni della posizione,  $P_0$  e  $\rho_0$ , e consideriamo piccole perturbazioni attorno ad essa. Sia quindi

$$P = P_0 + P', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

dove tutte le quantità primarie sono piccole, così possiamo trascurare prodotti di ordine superiore al secondo. Assumiamo inoltre che le perturbazioni siano adiabatiche (o isotermiche). Perciò

$$P + P' = K(\rho + \rho')^\gamma \quad (3.20)$$

dove  $\gamma = 5/3$  nel caso adiabatico e  $\gamma = 1$  nel caso isotermico. Linearizzando l'equazione di continuità (3.1) e di Eulero (3.3), ed usando il fatto che  $\nabla P_0 = \mathbf{f}$ , abbiamo che

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P' = 0 \quad (3.22)$$

Dato che  $P$  è una funzione solamente di  $\rho$ , allora  $\nabla P' = (dP/d\rho)_0 \nabla \rho'$ , dove il pedice 0 significa che la derivata deve essere valutata per la soluzione di equilibrio, cioè  $(dP/d\rho)_0 = dP_0/d\rho_0$ . Quindi Eq. 3.22 diventa

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0 \nabla \rho' = 0 \quad (3.23)$$

Eliminando  $\mathbf{v}'$  da (3.23) e (3.21) applicando gli operatori  $\nabla \cdot$  e  $\partial/\partial t$  e poi sottraendo, otteniamo

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \rho' \quad (3.24)$$

dove abbiamo definito

$$c_s = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0^{1/2} \quad (3.25)$$

L'equazione 3.24 non è altro che la *equazione d'onda*, con onda che si propaga a velocità  $c_s$ . Si può fare vedere che anche le altre variabili  $P'$  e  $\mathbf{v}'$  ubbidiscono a simili equazioni. Questo implica che piccole perturbazioni attorno all'equilibrio idrostatico si propagano attraverso il gas come onde sonore con velocità  $c_s$ . Dalle Eq. 3.20 e 3.25 vediamo come la velocità del suono possa avere due valori

$$\text{adiabatico: } c_s^{\text{ad}} = \left( \frac{5P}{3\rho} \right)^{1/2} = \left( \frac{5kT}{3\mu m_H} \right)^{1/2} \propto \rho^{1/3} \quad (3.26a)$$

$$\text{isotermico: } c_s^{\text{iso}} = \left( \frac{P}{\rho} \right)^{1/2} = \left( \frac{kT}{\mu m_H} \right)^{1/2} \quad (3.26b)$$

Le velocità del suono  $c_s^{\text{ad}}$  e  $c_s^{\text{iso}}$  sono quantità che possono essere definite localmente in ogni punto del gas. Entrambe sono dello stesso ordine di grandezza della velocità termica media degli ioni del gas. Da un punto di vista numerico abbiamo che

$$c_s \simeq 10 \left( \frac{T}{10^4 K} \right)^{1/2} \text{ Km sec}^{-1} \quad (3.27)$$

Dato che  $c_s$  è la velocità a cui le perturbazioni in pressione attraversano il gas, questa limita la rapidità con cui il gas risponde a variazioni di pressione. Per esempio, se la pressione in una

parte di una regione del gas di dimensione caratteristica  $l$  cambia improvvisamente, altre parti di questa regione non possono rispondere fino a quando non è passato un tempo dell'ordine  $l/c_s$ , il tempo di attraversamento del suono.

D'altro canto, se la pressione in una parte della regione cambia su un tempo-scala molto maggiore di  $l/c_s$ , il gas ha tutto il tempo di rispondere alla sollecitazione ed il gradiente di pressione rimarrà piccolo.

Quindi, se consideriamo *flussi supersonici*, dove il gas si muove con  $|\mathbf{v}| > c_s$ , il gas non riesce a rispondere su tempi scala  $l/|\mathbf{v}| < l/c_s$ , e quindi gradienti di pressione hanno effetti trascurabili sul flusso. All'altro estremo, per *flussi subsonici*, caratterizzati da  $|\mathbf{v}| < c_s$ , il gas riesce a rispondere a cambiamenti in pressione quindi, in prima approssimazione, si comporta come se fosse in equilibrio idrostatico.

Queste proprietà si possono ricavare direttamente da una analisi per ordine di grandezza dell'equazione di Eulero. Infatti, per un flusso supersonico abbiamo che

$$\frac{|\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|\nabla P|} \sim \frac{v^2/l}{P/\rho l} \sim \frac{v^2}{c_s^2} > 1$$

e quindi, in prima approssimazione, i gradienti di pressione possono essere trascurati.

Una importante proprietà della velocità del suono è la sua dipendenza dalla densità (Eq. 3.26a).

Questo significa che regioni di densità superiore alla media avranno anche velocità del suono superiori alla media, il che comporta la possibilità di avere *onde d'urto (shock waves)*.

In uno shock le grandezze che descrivono il fluido cambiano su lunghezze scala dell'ordine del libero cammino medio, e questo comporta una *discontinuità* nel fluido.

### 3.6 Accrescimento stazionario a simmetria sferica

Ora che abbiamo tutto l'apparato matematico a disposizione, possiamo attaccare il problema reale di accrescimento di massa. Si consideri una stella di massa  $M$  che accresce, con simmetria sferica, da una grande nube di gas. Questa è una buona approssimazione di una stella isolata che accresce dal mezzo interstellare, sempre che si possano trascurare il momento angolare, il campo magnetico ed il moto collettivo del gas rispetto alla stella.

In primo luogo, ci aspettiamo di poter determinare il tasso di accrescimento stazionario  $\dot{M}$  (in unità di  $\text{g sec}^{-1}$ ) sulla stella date le condizioni ambientali (densità  $\rho(\infty)$  e temperatura  $T(\infty)$ ) per parti della nube di gas lontane dalla stella, e date delle condizioni al contorno sulla sua superficie.

Secondo, tenteremo di comprendere fino a che distanza la nube è influenzata dalla presenza della stella che accresce.

Innanzitutto usiamo un sistema di coordinate polari sferiche  $(r, \theta, \phi)$  con origine al centro della stella. Avendo assunto simmetria sferica, tutte le variabili sono indipendenti da  $\theta$  e  $\phi$ . Inoltre la velocità del gas ha solamente la componente radiale  $v_r = v$ . Dato che consideriamo materia che cade sulla stella (accrescimento)  $v$  sarà negativa, mentre  $v > 0$  corrisponderà a vento stellare.

Per un flusso stazionario l'equazione di continuità diventa

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 \rho v) = 0 \quad (3.28)$$

dove abbiamo usato l'espressione standard per la divergenza in coordinate sferiche. Questo ha come soluzione  $r^2 \rho v = \text{costante}$ . Dato che  $\rho(-v)$  è il flusso di materia che cade, la costante deve essere in relazione con in tasso di accrescimento (costante)  $\dot{M}$ . Poichè abbiamo a che fare con una superficie di una sfera avremo che

$$4\pi r^2 \rho(-v) = \dot{M} \quad (3.29)$$

Nell'equazione di Eulero, l'unico contributo alla forza esterna  $f$  è dato dalla gravità, e questa ha solamente la componente radiale

$$f_r = -G \frac{M\rho}{r^2}$$

quindi la conservazione del momento diventa

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (3.30)$$

Utilizziamo infine l'equazione di stato politropica

$$P = K\rho^\gamma \quad (3.31)$$

al posto della legge di conservazione dell'energia. Questo ci permette di trattare simultaneamente sia accrescimento adiabatico ( $\gamma = 5/3$ ) che quello isothermico ( $\gamma = 1$ ). Dopo che avremo trovato la soluzione dovremo vedere se l'assunzione adiabatica o isothermica sia giustificata andando ad indagare i processi di riscaldamento e raffreddamento del gas.

Per esempio, l'approssimazione adiabatica sarà valida se i tempi-scala su cui il gas si scalda o raffredda sono lunghi rispetto al tempo che impiega un elemento del gas a cadere sulla stella. In realtà nè l'accrescimento adiabatico nè quello isothermico sono valide approssimazioni, per cui ci aspetteremo  $1 < \gamma < 5/3$ .

Una volta determinati  $P(r)$  e  $\rho(r)$ , utilizzando l'equazione di stato possiamo ricavarci la temperatura  $T$

$$T = \frac{\mu m_H P}{\rho k} \quad (3.32)$$

Il nostro problema si riduce quindi nell'integrazione dell'Equazione 3.30 con l'aiuto di (3.31) e (3.29) e quindi nell'identificazione dell'unica soluzione che corrisponde al nostro problema di accrescimento.

Prima di integrare l'Equazione 3.30 vediamo come sia possibile ottenere importanti informazioni senza una integrazione esplicita. Dato che

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = c_s^2 \frac{d\rho}{dr}$$

allora, il termine  $(1/\rho)(dP/dr)$  nell'equazione di Eulero (3.30) può essere scritto come  $(c_s^2/\rho)(d\rho/dr)$ . Ma dalla equazione di continuità (3.28) abbiamo che

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{vr^2} \frac{d}{dr}(vr^2)$$

Quindi Equazione 3.30 diventa

$$v \frac{dv}{dr} - \frac{c_s^2}{vr^2} \frac{d}{dr}(vr^2) + \frac{GM}{r^2} = 0$$

che, con un pò di algebra, può essere riscritta nella forma

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) \frac{d}{dr}(v^2) = -\frac{GM}{r^2} \left[ 1 - \left( \frac{2c_s^2 r}{GM} \right) \right] \quad (3.33)$$

A prima vista sembra che le cose siano diventate molto piú complicate, dato che  $c_s$  è in generale una funzione di  $r$ . Però l'interpretazione fisica di  $c_s$  come la velocità del suono nel gas, insieme alla struttura dell'Equazione 3.33, in cui i fattori di entrambi i membri possono (in linea di principio) diventare nulli, ci permette di classificare le possibili soluzioni di (3.33) in classi distinte e di trovare l'unica corrispondente al nostro problema.

In primo luogo, possiamo notare come a grande distanza dalla stella il fattore  $[1 - (2c_s^2 r/GM)]$  nel membro di destra deve diventare negativo, dato che  $c_s^2$  approssima un qualche valore asintotico finito  $c_s^2(\infty)$ , dipendente dalla temperatura del gas lontano dalla stella, mentre  $r$  aumenta senza alcun limite. Questo significa che per grandi  $r$  il membro di destra di (3.33) è positivo.

Nel membro di sinistra, il fattore  $d(v^2)/dr$  deve essere negativo, dato che vogliamo che il gas si trovi a riposo a grandi distanze dalla stella, e che acceleri a mano a mano che si avvicina.

Questi due requisiti sono compatibili tra loro solamente se per grandi  $r$  il flusso del gas è subsonico, cioè

$$v^2 < c_s^2 \quad \text{per grandi } r \quad (3.34)$$

Questo è ovviamente un risultato molto ragionevole dato che il gas avrà una temperatura non nulla, e quindi una velocità del suono non nulla, a grandi distanze dalla stella.

Mentre il gas si avvicina alla stella,  $r$  decresce ed il fattore  $[1 - (2c_s^2 r/GM)]$  deve tendere ad aumentare. Alla fine esso si annullerà, a meno che non si trovi un modo di aumentare  $c_s^2$  riscaldando il gas. Questo però è molto improbabile, dato che il fattore si annulla ad una distanza  $r_s$  data da

$$r_s = \frac{GM}{2c_s^2(r_s)} \simeq 7.5 \cdot 10^{13} \left( \frac{T(r_s)}{10^4 \text{ K}} \right)^{-1} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ cm} \quad (3.35)$$

dove abbiamo usato (3.27) per introdurre la temperatura. L'ordine di grandezza di  $r_s$  è molto maggiore del raggio  $R_*$  di ogni oggetto compatto ( $R_* \lesssim 10^9$  cm).

Una simile analisi dei segni nell'Equazione 3.33 per  $r < r_s$  mostra che il flusso deve essere supersonico vicino alla stella:

$$v^2 > c_s^2 \quad \text{per piccoli } r \quad (3.36)$$

Questa discussione mostra come il problema che stiamo trattando non sia matematicamente ben posto se diamo solamente le condizioni all'infinito. Infatti è necessario specificare anche le condizioni sulla o vicino la superficie della stella. Vedremo che imponendo la condizione (3.36) otterremo solamente una soluzione al nostro problema (soluzione del Tipo 1). Senza l'imposizione (3.36) ci sarebbe anche un'altra possibile soluzione (di Tipo 3).

L'esistenza di un punto  $r_s$  che soddisfi l'Equazione 3.35 è di enorme importanza nella caratterizzazione del flusso di accrescimento. Infatti, da un punto di vista matematico, il fatto che per  $r = r_s$  il membro di destra di (3.33) si annulli implica che anche il membro di destra deve annullarsi per  $r = r_s$ . Questo significa che devono valere le relazioni

$$v^2 = c_s^2 \quad \text{per } r = r_s \quad (3.37)$$

oppure (non necessariamente contemporaneamente)

$$\frac{d}{dr}(v^2) = 0 \quad \text{per } r = r_s \quad (3.38)$$

Tutte le soluzioni di (3.33) possono ora essere classificate in termini del loro comportamento a  $r = r_s$ , dato dalle condizioni (3.37) o (3.38), insieme con il loro comportamento per grandi  $r$ , come (3.34). Questo è molto semplice da vedere se grafichiamo  $v^2(r)/c_s^2(r) \equiv \mathcal{M}^2$  in funzione di  $r$  (vedi Figura 3.1), da cui è chiaro che esistono sei distinte famiglie di soluzioni

$$\text{Tipo 1: } v^2(r_s) = c_s^2(r_s) \quad v^2 \rightarrow 0 \text{ per } r \rightarrow \infty \\ (v^2 < c_s^2, r > r_s; \quad v^2 > c_s^2, r < r_s)$$

$$\text{Tipo 2: } v^2(r_s) = c_s^2(r_s) \quad v^2 \rightarrow 0 \text{ per } r \rightarrow 0 \\ (v^2 > c_s^2, r > r_s; \quad v^2 < c_s^2, r < r_s)$$

$$\text{Tipo 3: } v^2(r_s) < c_s^2(r_s) \text{ dappertutto,} \quad \frac{d}{dr}(v^2) = 0 \text{ per } r = r_s$$

$$\text{Tipo 4: } v^2(r_s) > c_s^2(r_s) \text{ dappertutto,} \quad \frac{d}{dr}(v^2) = 0 \text{ per } r = r_s$$

$$\text{Tipo 5: } \frac{d}{dr}(v^2) = \infty \text{ per } v^2 = c_s^2(r_s); \quad r > r_s \text{ sempre}$$

$$\text{Tipo 6: } \frac{d}{dr}(v^2) = \infty \text{ per } v^2 = c_s^2(r_s); \quad r < r_s \text{ sempre}$$

Esiste solamente una soluzione del Tipo 1 e Tipo 2: queste soluzioni sono dette *transoniche*, in quanto rappresentano la transizione tra un flusso subsonico ad un flusso supersonico. Soluzioni di Tipo 3 e Tipo 4 rappresentano un flusso che è ovunque subsonico e supersonico, rispettivamente.

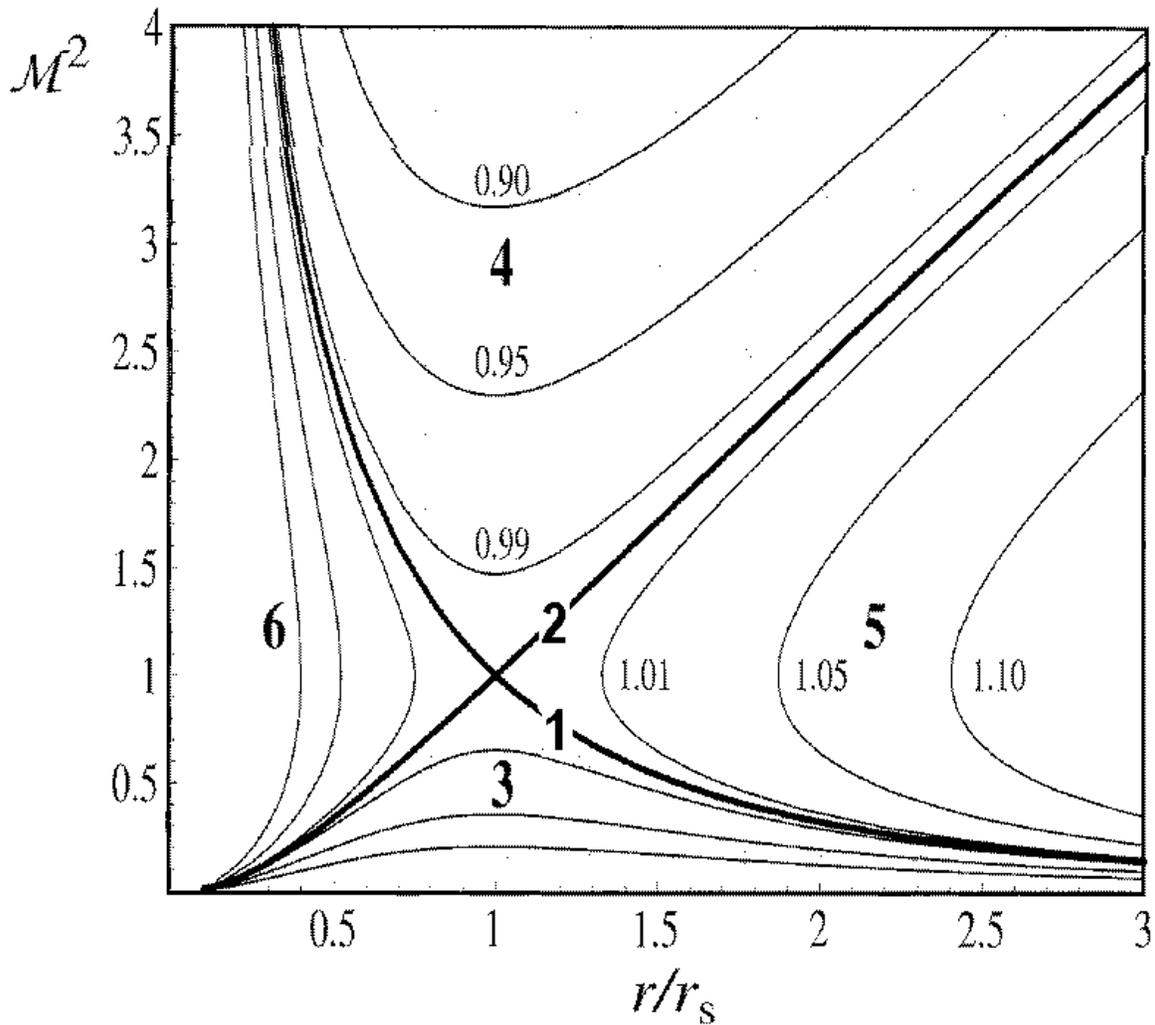


Figura 3.2: Numero di Mach al quadrato  $M^2 = v^2(r)/c_s^2(r)$  in funzione della distanza  $r/r_s$  per un flusso di gas adiabatico, in accrescimento a simmetria sferica, nel campo gravitazionale di una stella. Nel caso  $v < 0$  abbiamo flussi in accrescimento, mentre per  $v > 0$  abbiamo venti o “breeze” stellari. Le due soluzioni transoniche di Tipo 1 e Tipo 2, indicate da una linea spessa, dividono le rimanenti soluzioni in famiglie, come descritto nel testo.

Soluzioni di Tipo 5 e Tipo 6 non ammettono tutti i valori di  $r$  e per ogni valore di  $r$  esistono due possibili valori di  $v^2$ . Per questi motivi escludiamo questo tipo di soluzioni del nostro problema. Soluzioni di Tipo 2 e Tipo 4 sono da escludersi perché sono supersoniche per grandi  $r$ , in violazione alla condizione (3.34), mentre il Tipo 3 è subsonica per piccoli  $r$ , violando quindi la condizione (3.36).

Una soluzione di Tipo 2 con  $v > 0$  descrive un vento stellare (si noti che (3.33) non cambia per  $v \rightarrow -v$ ). Soluzioni di Tipo 3 con  $v > 0$  rappresentano la cosiddetta “brezza stellare”, in cui il flusso è ovunque subsonico. Se  $v < 0$  allora abbiamo una atmosfera che sta lentamente decadendo.

Ci è quindi rimasta la soluzione di Tipo 1: questa possiede tutte le proprietà che abbiamo richiesto ed è l’unica soluzione del nostro problema. La condizione al punto sonico (3.37) ci permetterà di collegare il tasso di accrescimento  $\dot{M}$  con la condizione all’infinito.

Una volta risolto il problema della unicità della soluzione, integriamo l’Equazione 3.30 utilizzando l’equazione di stato politropica (3.31) per passare da  $p$  a  $\rho$ :

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} - \frac{GM}{r} = \text{costante}$$

Dalla Eq. 3.31 abbiamo che  $dP = K\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho$ , quindi per  $\gamma \neq 1$  otteniamo

$$\frac{v^2}{2} + \frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \text{costante}$$

Dato però che  $K\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma P/\rho = c_s^2$  otteniamo il cosiddetto *integrale di Bernoulli*:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_s^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \text{costante} \quad (3.39)$$

Nel caso di un flusso isotermico ( $\gamma = 1$ ) si ottiene un integrale logaritmico. Per la proprietà fisica della nostra soluzione (Tipo 1) dobbiamo avere che  $v^2 \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ , quindi la costante in (3.39) deve essere  $c_s^2(\infty)/(\gamma-1)$ , dove  $c_s^2(\infty)$  è la velocità del suono nel gas a grande distanza dalla stella. La condizione al punto sonico (3.35) mette in relazione  $c_s^2(\infty)$  con  $c_s^2(r_s)$

$$c_s^2(r_s) \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma-1} - 2 \right] = \frac{c_s^2(\infty)}{\gamma-1}$$

che può essere riscritta come

$$c_s(r_s) = c_s(\infty) \left( \frac{2}{5-3\gamma} \right)^{1/2} \quad (3.40)$$

Riprendendo l’equazione di continuità (3.29) abbiamo che

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(-v) = 4\pi r_s^2 \rho(r_s) c_s(r_s) \quad (3.41)$$

dato che  $\dot{M}$  è indipendente da  $r$ . Usando il fatto che  $c_s^2 \propto \rho^{\gamma-1}$ , abbiamo che

$$\rho(r_s) = \rho(\infty) \left[ \frac{c_s(r_s)}{c_s(\infty)} \right]^{2/(\gamma-1)}$$

Mettendo questa relazione, insieme alla (3.41) nella (3.40) otteniamo la relazione tra il tasso di accrescimento  $\dot{M}$  e le condizioni all'infinito:

$$\dot{M} = \pi G^2 M^2 \frac{\rho(\infty)}{c_s^3(\infty)} \left[ \frac{2}{5-3\gamma} \right]^{(5-3\gamma)/2(\gamma-1)} \quad (3.42)$$

Si noti come la dipendenza da  $\gamma$  sia molto debole: infatti il fattore  $[2/(5-3\gamma)]^{(5-3\gamma)/2(\gamma-1)}$  varia tra 1 per  $\gamma = 5/3$  a  $e^{3/2} \simeq 4.5$  per  $\gamma = 1$ . Per un valore tipico di  $\gamma = 1.4$  il fattore vale 2.5.

L'equazione 3.42 ci dice che è difficile che l'accrescimento dal mezzo interstellare sia un fenomeno osservabile. Infatti per  $c_s(\infty) = 10 \text{ Km sec}^{-1}$ ,  $\rho(\infty) = 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$ , corrispondenti ad una temperatura di  $10 \text{ K}$  ed una densità numerica di 1 particella per  $\text{cm}^3$ , abbiamo

$$\dot{M} \simeq 1.4 \cdot 10^{11} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left( \frac{\rho(\infty)}{10^{-24} \text{ g cm}^{-3}} \right) \left( \frac{c_s(\infty)}{10 \text{ Km sec}^{-1}} \right)^{-3} \text{ g sec}^{-1} \quad (3.43)$$

La luminosità di accrescimento in questo caso sarebbe di  $2 \cdot 10^{31} \text{ erg sec}^{-1}$ , che ad una distanza tipica di 1 kpc corrisponde ad un flusso troppo basso per essere osservabile.

Vediamo ora di completare la soluzione scrivendo tutte le quantità in funzione di  $r$ . In primo luogo, possiamo ricavare  $v(r)$  in termini di  $c_s(r)$  dalla (3.41)

$$(-v) = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 \rho(r)} = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 \rho(\infty)} \left[ \frac{c_s(\infty)}{c_s(r)} \right]^{2/(\gamma-1)}$$

Sostituendo questa relazione nell'integrale di Bernoulli (3.39) otteniamo una relazione algebrica per  $c_s(r)$ , da cui poi ci si può ricavare  $v(r)$  e  $\rho(r)$ . In pratica però questa equazione può essere risolta soltanto numericamente. Un andamento generale della soluzione può però essere ricavato studiando l'integrale di Bernoulli. Per grandi distanze la forza gravitazionale della stella è debole e tutte le quantità avranno i loro valori "ambientali" ( $\rho(\infty)$ ,  $c_s(\infty)$  e  $v \simeq 0$ ). Mano a mano che ci si avvicina alla stella, la velocità del flusso del gas aumenta fino a quando  $-v$  raggiunge  $c_s(\infty)$ , la velocità del suono all'infinito. L'unico termine in (3.39) capace di bilanciare questo aumento è il termine gravitazionale  $GM/r$ .

Dato che  $c_s(r)$  non è molto più grande di  $c_s(\infty)$ , questo deve accadere ad una distanza

$$r \simeq r_{\text{acc}} = \frac{2GM}{c_s(\infty)^2} \simeq 3 \cdot 10^{14} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \left( \frac{10^4 \text{ K}}{T(\infty)} \right) \text{ cm} \quad (3.44)$$

In questo punto  $\rho(r)$  e  $c_s(r)$  iniziano ad aumentare al di sopra dei valori ambientali. Al punto sonico  $r = r_s$  il flusso diventa supersonico ed il gas è in caduta libera. Infatti la relazione  $v^2 \gg c_s^2$  sostituita nell'integrale di Bernoulli diventa

$$v^2 \simeq \frac{2GM}{r} = v_{\text{ff}}$$

L'equazione di continuità ci permette di scrivere

$$\rho \simeq \rho(r_s) \left(\frac{r_s}{r}\right)^{3/2} \quad \text{per } r \lesssim r_s$$

Infine possiamo, in linea di principio, ottenere la temperatura usando l'equazione di stato poliotropica

$$T \simeq T(r_s) \left(\frac{r_s}{r}\right)^{3(\gamma-1)/2} \quad \text{per } r \lesssim r_s$$

Si noti però che l'aumento di  $T$  al diminuire di  $r$  predetto da questa equazione è probabilmente non realistico.

Il raggio  $r_{\text{acc}}$  definito dall'Equazione 3.44 ha una semplice interpretazione: ad un dato raggio  $r$  il rapporto tra l'energia interna (termica) e l'energia di legame gravitazionale di un elemento di gas di massa  $m$  è

$$\frac{\text{Energia termica}}{\text{Energia gravitazionale}} \sim \left(\frac{1}{2}mc_s^2(r)\right) \left(\frac{r}{GMm}\right) \sim \frac{r}{r_{\text{acc}}} \quad \text{per } r \gtrsim r_{\text{acc}}$$

dato che  $c_s(r) \sim c_s(\infty)$  per  $r > r_{\text{acc}}$ . Quindi, per  $r \gg r_{\text{acc}}$  la forza gravitazionale della stella non influenza il gas. La distanza  $r_{\text{acc}}$  viene detta *raggio di accrescimento*.

Si noti come la relazione (3.42) che fornisce il tasso di accrescimento in funzione delle condizioni all'infinito può essere scritta come

$$\dot{M} \sim \pi r_{\text{acc}}^2 c_s(\infty) \rho(\infty) \quad (3.45)$$

Ricapitoliamo le conclusioni a cui siamo pervenuti studiando il caso (particolare) di accrescimento stazionario a simmetria sferica:

- ① Il tasso di accrescimento stazionario  $\dot{M}$  è determinato dalle condizioni "ambientali" all'infinito (Equazione 3.42) e da una condizione al contorno (ad esempio (3.36)). L'accrescimento diretto dal mezzo interstellare da parte di stelle di neutroni isolate comporta un valore di  $\dot{M}$  troppo piccolo per avere conseguenze osservabili.
- ② Il comportamento del gas subisce l'influenza della forza gravitazionale solamente all'interno del raggio di accrescimento  $r_{\text{acc}}$ .
- ③ Un flusso di accrescimento stazionario con  $\dot{M}$  maggiore o uguale al valore dato da (3.42) **deve** possedere un punto sonico, cioè la velocità del gas in accrescimento **deve** diventare supersonica vicino alla superficie della stella.

L'immediata conseguenza del punto ③ è che, dato che la materia accresciuta deve arrivare alla superficie della stella con una velocità piccola, deve esistere una maniera di frenare il flusso supersonico. Questo però ci conduce nel campo di dominio della fisica del plasma, dato che dovremo tenere conto del comportamento del gas su lunghezze-scala comparabili con il libero cammino medio tra le collisioni.



# Capitolo 4

## Teoria Cinetica del Plasma

### 4.1 Definizione di plasma

Un plasma consiste in una miscela di due gas di particelle elettricamente cariche: un gas di elettroni ed un gas di ioni, con masse delle particelle molto differenti  $m_e$  e  $m_i$ .

Gli elettroni e gli ioni interagiscono tra di loro attraverso forze di Coulomb attrattive e repulsive. Queste forze decrescono molto lentamente ( $\propto r^{-2}$ ) con la distanza e non possiedono una lunghezza-scala caratteristica. Quindi una particella di plasma interagisce contemporaneamente con tutte le altre, e questo rende la descrizione delle collisioni molto complessa. Una ulteriore complicazione è dovuta alla grande differenza di massa tra elettroni e ioni. Dato che le collisioni tra particelle di massa molto diversa riescono a trasferire solamente una piccola frazione dell'energia cinetica, è possibile che gli ioni e gli elettroni possiedano una temperatura molto diversa su tempi-scala lunghi.

### 4.2 Neutralità di carica, oscillazioni di plasma e lunghezza di Debye

Vediamo ora di esaminare in dettaglio le conseguenze del carattere a lungo raggio della forza di Coulomb tra particelle cariche.

Innanzitutto abbiamo che la densità numerica di ioni ed elettroni in ogni punto deve essere approssimativamente uguale, e quindi il plasma deve sempre essere vicino alla neutralità di carica. Infatti anche un piccolo eccesso di carica risulterebbe in un campo elettrico molto grande che farebbe muovere le particelle in modo da ristabilire molto velocemente la neutralità.

Supponiamo che ci sia un eccesso di carica di 1% in una sfera di raggio  $r$  in un plasma di densità numerica  $N$ . Allora gli elettroni che si trovano vicino al bordo della sfera risentiranno di un campo elettrico  $E$  e di una accelerazione

$$\dot{v} = \frac{e|E|}{m_e} \simeq \frac{4\pi r^3}{3m_e} \frac{N}{100} \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]r^2}$$

dove  $(-e)$  è la carica di un elettrone.

Per una sfera di raggio  $r = 1$  cm in un tipico plasma astrofisico con  $N = 10^{10}$  particelle per  $\text{cm}^3$  abbiamo che  $\dot{v} \sim 10^{17} \text{ cm sec}^{-2}$ , e quindi gli elettroni impiegherebbero  $3 \cdot 10^{-9}$  sec a ristabilire la neutralità. Infatti essi si muoverebbero così velocemente da indurre *oscillazioni* nel plasma. Dato che tutti i plasmi sono soggetti a piccole perturbazioni che tendono a disturbare la neutralità di carica (ad esempio il passaggio di radiazione elettromagnetica, o il moto termico delle particelle del plasma stesso), la frequenza naturale di queste oscillazioni è una grandezza fondamentale chiamata **frequenza di plasma**.

Per determinarla consideriamo un plasma uniforme con un piccolo eccesso di elettroni in qualche (piccola) regione. Assumiamo che gli ioni abbiano in media una carica  $Ze \simeq e$ , e che le densità numeriche di ioni ed elettroni siano, rispettivamente

$$N_i \simeq N_0 \quad N_e = N_0 + N_1(\mathbf{r}, t)$$

con  $N_1 \ll N_0$  e  $N_1 = 0$  al di fuori della nostra piccola regione.

L'eccesso di carica  $N_1$  dà luogo ad un campo elettrico  $\mathbf{E}$  dato dalla legge di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{[4\pi\epsilon_0]} N_1 e \quad (4.1)$$

Questo campo elettrico provoca il movimento delle particelle. Dato che  $m_i \gg m_e$  possiamo trascurare il moto degli ioni. Gli elettroni si muoveranno come un fluido ed ubbidiranno alle equazioni di conservazione. Dato che  $N_1$  è assunto piccolo, possiamo trascurare il termine  $(\mathbf{v}_e \cdot \nabla)\mathbf{v}_e$  nell'equazione di Eulero, che così diventa

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -e\mathbf{E} \quad (4.2)$$

L'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot (N_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (4.3)$$

che, trascurando prodotti di piccole quantità, diventa

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + N_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_e = 0 \quad (4.4)$$

Possiamo eliminare  $\mathbf{v}_e$  da queste equazioni prendendo la divergenza della (4.2) e la derivata rispetto al tempo della (4.4) e sottraendo

$$\frac{1}{N_0} \frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2} - \frac{e}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Usando l'equazione di Maxwell (4.1) per eliminare  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  otteniamo

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2} + \left\{ \frac{4\pi}{[4\pi\epsilon_0]} \frac{N_0 e^2}{m_e} \right\} N_1 = 0$$

Perciò l'eccesso di carica  $N_1$  oscilla con frequenza di plasma

$$\omega_p = \left\{ \frac{4\pi}{[4\pi\epsilon_0]} \frac{N_0 e^2}{m_e} \right\}^{1/2} \quad (4.5)$$

Da un punto di vista numerico, con  $N_0$  misurato in  $\text{cm}^{-3}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \omega_p &= 5.7 \cdot 10^4 N_0^{1/2} \text{ rad sec}^{-1} \\ \nu_p &= \frac{\omega_p}{2\pi} = 9.0 \cdot 10^3 N_0^{1/2} \text{ Hz} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Un plasma è opaco alla radiazione elettromagnetica di frequenza  $\nu < \nu_p$  perché le oscillazioni del plasma sono più rapide delle variazioni nel campo elettromagnetico, e gli elettroni del plasma si muovono “cancellando” la radiazione. Per la ionosfera della Terra abbiamo che  $N_0 \simeq 10^6 \text{ cm}^{-3}$ , quindi onde radio di frequenza minore di circa  $10^7 \text{ Hz}$  non possono penetrarla e quindi sono riflesse.

Associato al tempo-scala  $\nu_p^{-1}$  delle oscillazioni di carica deve esistere una grandezza-scala  $l$  che definisce su quali distanze il campo elettrico viene generato dall'eccesso di carica  $N_1$ . Possiamo calcolarlo, come ordine di grandezza, valutando le derivate come

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \omega_p, \quad \nabla \sim \frac{1}{l}$$

Dall'equazione (4.3) otteniamo quindi

$$l \sim \frac{v_e}{\omega_p} \quad (4.7)$$

Quindi il campo elettrico  $E$  generato dall'eccesso di carica  $N_1$  è limitato ad una distanza-scala  $l$  dall'effetto di schermo degli elettroni.

Dato che anche un plasma non perturbato sarà soggetto a piccole fluttuazioni di carica dovute al moto termico degli elettroni, esisterà una distanza di schermo, detta **lunghezza di Debye**  $\lambda_{\text{Deb}}$ , che otteniamo ponendo nell'espressione della velocità degli elettroni in (4.7)  $v_e \sim (kT_e/m_e)^{1/2}$ , dove  $T_e$  è la temperatura degli elettroni

$$\lambda_{\text{Deb}} = \left\{ \frac{[4\pi\epsilon_0] kT_e}{4\pi N_0 e^2} \right\}^{1/2} \quad (4.8)$$

Numericamente, con  $N_0$  misurato in  $\text{cm}^{-3}$  e  $T_e$  in K

$$\lambda_{\text{Deb}} \simeq 7 \left( \frac{T_e}{N_0} \right)^{1/2} \text{ cm} \quad (4.9)$$

L'importanza di  $\lambda_{\text{Deb}}$  risiede nel fatto che questa distanza ci fornisce la lunghezza-scala su cui può esistere un sostanziale eccesso di carica; quindi ci fornisce la portata delle collisioni Coulombiane nel plasma.

Affinché la nostra trattazione del plasma sia consistente è necessario che il numero di particelle coinvolte nell'oscillazione sia grande, ed inoltre che le grandezze fisiche del plasma non subiscano variazioni apprezzabili su grandezze-scala  $l$  molto minori della lunghezza di Debye:

$$N_e \lambda_{\text{Deb}}^3 \gg 1 \quad l \gg \lambda_{\text{Deb}} \quad (4.10)$$

Se queste condizioni non sono soddisfatte, allora possiamo trattare il gas come un sistema di particelle indipendenti e trascurare così i cosiddetti "effetti collettivi".

### 4.3 Collisioni Coulombiane

Consideriamo ora collisioni Coulombiane tra particelle del plasma. Dato che queste collisioni coinvolgono l'accelerazione di particelle cariche, verrà prodotta radiazione elettromagnetica a spese dell'energia cinetica delle due particelle. Comunque si può dimostrare come questi due tassi di perdita di energia (per radiazione e per collisione) di una particella che si muove a velocità  $v$  stanno nel rapporto

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{coll}}} \lesssim \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]\hbar c} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim \frac{1}{137} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1 \quad (4.11)$$

dove  $e^2/[4\pi\epsilon_0]\hbar c$  è la costante di struttura fine. Quindi la perdita di energia per radiazione durante una collisione è trascurabile e quindi possiamo considerare l'urto come *elastico*. Il nostro problema quindi consiste nel descrivere l'urto tra due particelle cariche  $e_1$  ed  $e_2$  che interagiscono via forza di Coulomb  $e_1 e_2 / [4\pi\epsilon_0] r^2$  ad una certa distanza  $r$ .

Il modo più semplice per trattare il problema di urto tra due particelle è quello di porci nel sistema di riferimento (SdR) del centro di massa. Se le velocità iniziali delle due particelle nel SdR del laboratorio sono  $v_1$  e  $v_2$ , ed esse hanno massa  $m_1$  e  $m_2$ , il SdR del centro di massa avrà velocità

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.12)$$

In questo SdR le particelle incidenti hanno momento della quantità di moto uguale in modulo ed opposto in segno  $\pm mv$ , e la loro energia cinetica totale è  $\frac{1}{2}mv^2$ , dove abbiamo definito

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (4.13)$$

Dato che la forza di Coulomb ubbidisce ad una legge dell'inverso del quadrato della distanza, le traiettorie delle particelle in collisione nel SdR del centro di massa saranno iperboli, che possono essere caratterizzate da un parametro di impatto  $b$ . Dato che l'urto è elastico, sia le velocità che le energie delle particelle rimangono inalterate: si ha soltanto una deflessione di traiettoria.

L'angolo di deflessione  $\theta$  sarà apprezzabile, diciamo dell'ordine di  $90^\circ$ , per un certo valore del parametro di impatto, che indicheremo con  $b_0$ , tale per cui l'energia cinetica e l'energia potenziale siano comparabili al momento di massimo avvicinamento (si veda Figura 4.1):

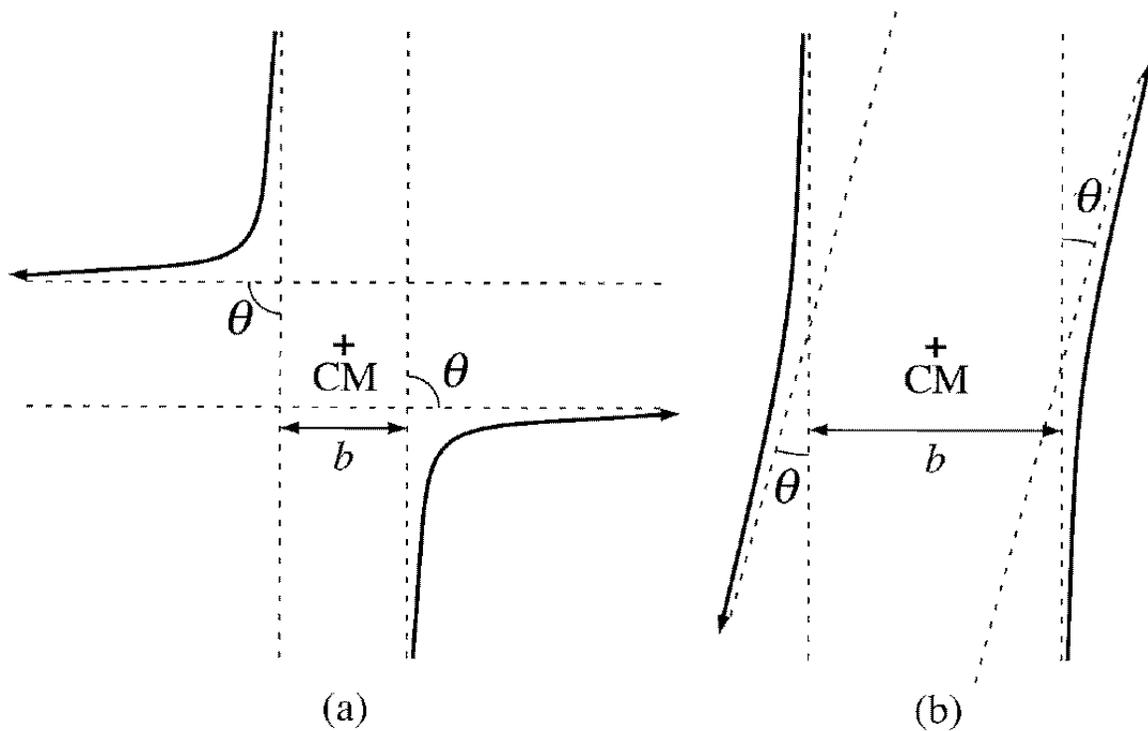


Figura 4.1: Collisioni Coulombiane di due particelle di stessa carica (in questo caso positiva) e stessa massa: (a) collisione ravvicinata; (b) collisione distante. Il parametro di impatto  $b$  prima e dopo l'urto rimane lo stesso per la conservazione della quantità di moto.

$$\frac{e_1 e_2}{[4\pi\epsilon_0]b_0} \sim \frac{1}{2}mv^2 \sim kT \quad (4.14)$$

dove l'ultima uguaglianza vale per particelle termalizzate. Per  $b \gg b_0$  allora  $\theta \sim e_1 e_2 / [4\pi\epsilon_0] b m v^2$  che è molto piccolo.

Nel caso di gas atomico o molecolare  $b_0$  dà una misura, per ordine di grandezza, delle dimensioni delle particelle del gas, e definisce quindi una sezione d'urto

$$\sigma_{\perp} = \pi b_0^2 = \frac{\pi}{[4\pi\epsilon_0]^2} \frac{e_1^2 e_2^2}{(kT)^2} \quad (4.15)$$

Per una densità numerica del gas  $N$ , il libero cammino medio  $\lambda_{\perp}$  tra collisioni sarà

$$\lambda_{\perp} = \frac{1}{N\sigma_{\perp}} \simeq \frac{[4\pi\epsilon_0]^2}{\pi N} \left( \frac{kT}{e_1 e_2} \right)^2 \quad (4.16)$$

Infatti, per la definizione di  $\lambda_{\perp}$ , abbiamo che lungo  $\lambda_{\perp}$  non avvengono collisioni, quindi il volume

$\lambda_{\perp} \cdot \sigma_{\perp}$  può contenere solamente una particella (altrimenti ci sarebbero collisioni!), quindi  $\lambda_{\perp} \cdot \sigma_{\perp} = 1/N$ , da cui la (4.16). Mettendo i valori numerici delle costanti, per  $e_1 = e_2 = e$  abbiamo

$$\lambda_{\perp} \simeq 7 \cdot 10^5 \frac{T^2}{N} \text{ cm} \quad (4.17)$$

Ad ogni istante, ogni particella carica deve interagire elettrostaticamente con le particelle del plasma contenute in una sfera di raggio  $\lambda_{\text{Deb}}$ . Questi urti lontani producono però solamente piccole deflessioni, dato che

$$\frac{\lambda_{\text{Deb}}}{b_0} \sim \frac{[4\pi\epsilon_0]kT\lambda_{\text{Deb}}}{e^2} \sim 4\pi N_0 \lambda_{\text{Deb}}^3 \gg 1$$

avendo usato (4.8) e (4.10). D'altro canto, ci sono così tante particelle in una sfera di Debye che l'effetto cumulativo dell'insieme di tutte le collisioni distanti è maggiore di quello degli incontri ravvicinati per  $b \sim b_0$ . Dato che questo è un punto importante, studiamo in dettaglio il caso in cui le particelle in interazione abbiano tutte la stessa massa  $m_1 \sim m_2 \sim m$  (ad esempio il caso di urti elettrone-elettrone o ione-ione). Allora ogni particella avrà una velocità iniziale  $\sim v$ , ed in un urto distante la sua velocità aumenterà di

$$\Delta v_b \sim v\theta \sim \frac{e_1 e_2}{[4\pi\epsilon_0]m v b}$$

in una direzione ortogonale alla sua direzione di moto originale.

Poichè le particelle hanno la stessa massa, così come le stesse velocità (termiche) iniziali, allora possiamo metterci nel SdR del laboratorio (ma questo **non è vero nel caso piú generale!**).

Per calcolare l'effetto totale di tutti gli urti distanti nel deviare una data particella sarà necessario sommare in maniera opportuna gli incrementi  $\Delta v_b$  su tutti i possibili valori di  $b$ . Dato che  $\Delta v_b$  può essere sia positivo che negativo, a seconda delle condizioni iniziali, è meglio considerare il suo quadrato.

Consideriamo ora un guscio cilindrico (si veda Figura 4.2) contenente  $N$  particelle nel volume  $2\pi b db v dt$ , dove  $dt$  è il tempo in cui una data particella "urta" con parametro di impatto  $b$  le  $N$  particelle.

Allora, il tasso di variazione di  $(\Delta v)^2$  sarà

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta v)^2}{dt} &\sim N v \int (\Delta v_b)^2 2\pi b db \\ &= \frac{2\pi N e_1^2 e_2^2}{[4\pi\epsilon_0]^2 m^2 v} \ln \left( \frac{b_{\text{max}}}{b_{\text{min}}} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

dove  $b_{\text{max}}$  e  $b_{\text{min}}$  sono il valore piú grande e piú piccolo di  $b$  che contribuiscono all'integrale, e di cui stabiliremo piú tardi i valori.

Per potere stabilire l'importanza relativa degli urti con parametro di impatto grande e piccolo, è necessario associare un libero cammino medio al cambio di velocità (4.18), per poterlo poi confrontare con  $\lambda_{\perp}$ . A questo scopo definiamo un *tempo di deviazione*

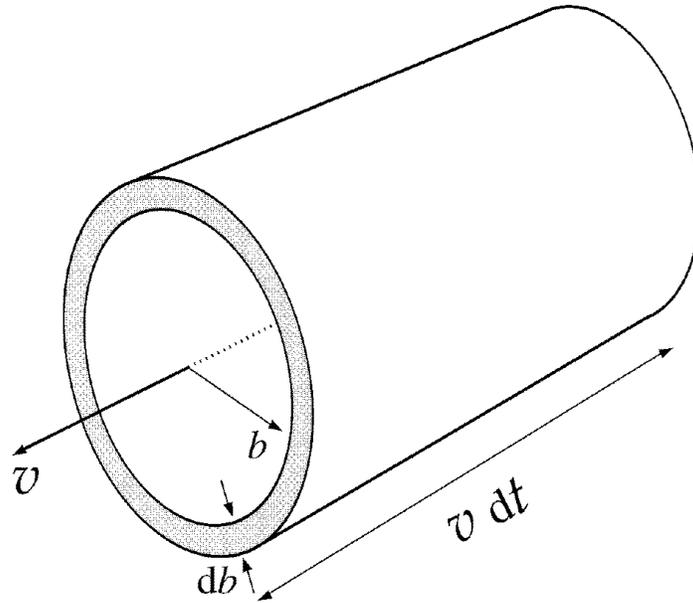


Figura 4.2: Definizione della geometria nel caso urti Coulombiani di una particella di plasma di velocità  $v$ .

$$t_d = \frac{v^2}{d(\Delta v)^2/dt} = \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m^2 v^3}{2\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \quad (4.19)$$

dove abbiamo usato la notazione standard  $\Lambda = b_{\max}/b_{\min}$ . Dalla sua definizione, il tempo di deviazione misura il tempo che intercorre prima che una particella del plasma di velocità  $v$  venga deviata in maniera significativa dalla sua traiettoria iniziale.

Associata al tempo di deviazione  $t_d$  viene definita la *lunghezza di deviazione*  $\lambda_d$

$$\lambda_d = v t_d = \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m^2 v^4}{2\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \quad (4.20)$$

Confrontando Eq. 4.20 con (4.16), ed usando il fatto che  $mv^2 \sim kT$ , troviamo che

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_d} \sim \ln \Lambda \quad (4.21)$$

Quindi, urti distanti e a piccole deflessioni dominano urti ravvicinati e a grandi angoli se  $\ln \Lambda > 1$ . Vedremo ora che  $\ln \Lambda$ , detto *logaritmo di Coulomb* è normalmente dell'ordine di 10–20, e quindi tra tutte le possibili collisioni sono quelle a piccoli angoli che danno il contributo maggiore. Innanzi tutto, dato che siamo interessati al logaritmo di  $\Lambda$ , sarà sufficiente ottenere una stima di  $\Lambda$ , senza dover entrare troppo nel dettaglio. Come primo tentativo, potremmo prendere per  $b_{\min}$  la distanza di massimo avvicinamento  $b_0$  data dall'Eq. 4.14.

Bisogna però stare attenti a non violare il principio di indeterminazione, secondo il quale non è possibile conoscere simultaneamente la posizione ed il momento di una particella con incertezze minori di  $\Delta x$  e  $\Delta p$  tali che

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

Quindi non possiamo porre  $b_{\min} = b_0$  se quest'ultimo è minore di

$$b_{\min}(MQ) \sim \frac{\hbar}{\Delta p} \sim \frac{\hbar}{mv} \quad (4.22)$$

dove abbiamo usato  $\Delta p \sim mv$ . Equazione 4.22 dà  $b_{\min}$  come la lunghezza d'onda di de Broglie di una particella di momento  $mv$ . In generale, quindi, avremo che

$$b_{\min} = \max \left\{ \frac{\hbar}{mv}, \frac{2e_1 e_2}{[4\pi\epsilon_0]mv^2} \right\} \quad (4.23)$$

quindi  $b_{\min}$  avrà il suo valore classico  $b_0$  a meno che

$$v \lesssim \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]\hbar c} c = \frac{c}{137} \quad (4.24)$$

Per ricavarci una stima di  $b_{\max}$  ricordiamoci che il plasma reagisce a perturbazioni nella carica in un tempo caratteristico  $1/\nu_p$  (dato da Eq. 4.6). Quindi, il plasma riesce a schermare il campo Coulombiano di ogni particella il cui tempo di interazione  $\sim b/v$  sia maggiore di  $1/\nu_p$ . Quindi possiamo ragionevolmente porre

$$b_{\max} = \frac{v}{\nu_p}$$

Ovviamente, se  $v$  è la velocità termica degli elettroni  $v_e$ , otteniamo

$$b_{\max} = \lambda_{\text{Deb}}$$

come deve essere. Dato che per plasmi astrofisici le particelle hanno  $mv^2 \sim kT$ , allora il logaritmo di Coulomb avrà valore

$$\ln \Lambda = \ln \left( \frac{\lambda_{\text{Deb}}}{b_0} \right)$$

che può essere scritta, utilizzando l'espressione numerica per  $\lambda_{\text{Deb}}$  data da Eq. 4.9

$$\ln \Lambda \simeq 10 + 3.45 \log T - 1.15 \log N_e \quad (4.25)$$

con  $N_e$  misurato in  $\text{cm}^{-3}$ . E' facile verificare come  $\ln \Lambda$  sia nell'intervallo 10–20 per plasmi di interesse astrofisico. Questo quindi dimostra come l'effetto di molti urti deboli e distanti sia più importante di urti forti e ravvicinati.

Si noti inoltre come  $\ln \Lambda$  sia estremamente insensibile agli errori sulle stime di  $b_{\min}$  e  $b_{\max}$ : se  $\ln \Lambda = 15$ , allora anche un errore su  $\Lambda$  di un fattore 100 produce  $\ln \Lambda$  nell'intervallo 10–20. Quindi (4.25) dà una stima ragionevole, anche se (4.24) non dovesse essere soddisfatta.

## 4.4 Plasmi termici: tempo di rilassamento e libero cammino medio

Vediamo ora di applicare i nostri risultati sugli urti tra particelle ad un plasma in cui le particelle hanno velocità termiche. Per semplificare non effettueremo la somma su tutte le possibili velocità delle particelle che contribuiscono agli urti, ma **porremo**  $mv^2 \sim kT$ . Questo ci fornirà il corretto ordine di grandezza per  $\lambda_d$ , la lunghezza di deviazione definita in (4.20).

E' bene evidenziare come, in generale, sia necessaria una analisi dell'evoluzione temporale della distribuzione di velocità risolvendo l'equazione di Fokker-Planck. Questo è particolarmente vero per la determinazione del tempo di scambio energetico  $t_E$  nel caso di particelle veloci (sopratermiche) che vedremo nel seguito.

Comunque, ponendo  $mv^2 \sim kT$  nella (4.20) abbiamo che per particelle di massa comparabile

$$\lambda_d \simeq \frac{7 \cdot 10^5}{\ln \Lambda} \frac{T^2}{N} \text{ cm} \quad (4.26)$$

Una importante proprietà di (4.26) è la sua indipendenza dalla massa delle particelle, quindi la distanza media attraversata prima che la particella subisca un urto è la stessa per gli elettroni e per gli ioni. Questo però non è vero per il tempo di deviazione: infatti il tempo di deviazione  $t_d(e-e)$  per elettroni con elettroni è  $\sqrt{m_p/m_e} \sim 43$  volte più breve di quello di ioni con ioni, ma questo è compensato dalla maggiore velocità degli elettroni.

Nel caso di particelle con masse diverse (come nel caso di urti elettroni con ioni), si può dimostrare che le equazioni (4.19) e (4.20) valgono ancora con  $m$  dell'ordine della massa più piccola e  $v$  dell'ordine della velocità termica più grande. Quindi, nel caso di urti elettrone-ione avremo  $m \sim m_e$  e  $v \sim (kT/m_e)^{1/2}$

$$t_d(e-i) \sim \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m_e^{1/2} (kT)^{3/2}}{2\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \sim t_d(e-e) \quad (4.27)$$

Quindi gli urti elettrone-ione avvengono allo stesso tasso degli urti elettrone-elettrone.

Può essere utile, a questo punto, definire una frequenza d'urto (elettronica)

$$\nu_c \sim \frac{1}{t_d(e-i)} \simeq 2 \ln \Lambda Z^2 N_e T^{-3/2} \text{ sec}^{-1} \quad (4.28)$$

con  $N_e$  misurato in  $\text{cm}^{-3}$  e  $Z$  la carica media degli ioni. Analogamente definiamo la frequenza d'urto ione-ione

$$\nu_c(i-i) \sim \frac{1}{t_d(i-i)} \simeq 5 \cdot 10^{-2} \ln \Lambda Z^4 N_e T^{-3/2} \text{ sec}^{-1} \quad (4.29)$$

Finora abbiamo considerato soltanto *deflessioni* delle traiettorie di particelle del plasma: il tempo-scala  $t_d$  dà una misura approssimata del tempo necessario affinché una distribuzione di velocità inizialmente anisotropa venga resa isotropa (termalizzazione). Alla fine però ogni distribuzione iniziale di velocità deve tendere alla distribuzione di equilibrio di Maxwell-Boltzmann.

Il tempo-scala affinché questo accada è detto *tempo-scala di scambio energetico*  $t_E$ :

$$t_E = \frac{E^2}{d(\Delta E)^2/dt} \quad (4.30)$$

dove  $E$  è l'energia di una particella di prova, e  $\Delta E$  è la variazione di energia durante gli urti (si veda Eq. 4.19).

Si noti che, a priori, non c'è alcuna ragione per cui  $t_E$  sia uguale a  $t_d$ : infatti nel SdR del centro di massa avviene una deflessione delle traiettorie  $\theta$  ma nessun scambio di energia, dato che le velocità delle particelle non cambiano prima e dopo l'urto.

Un importante esempio che mette in luce questa differenza è il caso degli urti elettrone-ione in un plasma in equilibrio termico: in questo caso  $m_e \ll m_p$  ed il SdR nel centro di massa differisce da quello del laboratorio soltanto per una velocità  $v_{CM} \simeq (m_e/m_p)^{1/2} v_i \ll v_i$  (si veda (4.12)). Per il fatto che non viene scambiata energia nel SdR del centro di massa, abbiamo che il massimo trasferimento nel SdR del laboratorio si ha in un urto frontale, ed è uguale a

$$\Delta E = 2m_i v_{CM}^2 \simeq 2m_e v_i^2$$

e quindi

$$\frac{\Delta E}{\frac{1}{2}m_i v_i^2} \sim \frac{m_e}{m_i} \ll 1 \quad (4.31)$$

Quindi le collisioni tra elettroni e ioni non sono molto efficienti nel trasferire energia. Come abbiamo visto in precedenza (vedi Eq. 4.27), il tasso di collisione elettrone-ione ed elettrone-elettrone sono simili, ma una differenza nell'energia media tra elettroni e ioni verrà livellata dalle collisioni in un tempo  $\sim m_i/m_e \sim m_p/m_e \sim 1836$  volte più lungo rispetto ad una stessa differenza tra le energie degli elettroni. Per urti tra particelle di massa e velocità simili ci aspettiamo che  $t_E \sim t_d$ , quindi dalle loro definizioni (4.28) e (4.29) ci aspettiamo che i tempi di rilassamento necessari per stabilire, da una condizione iniziale di non-equilibrio, (i) una distribuzione termica per gli elettroni, (ii) una distribuzione termica per gli ioni, (iii) una equipartizione di energia tra elettroni e ioni siano nel rapporto

$$t_E(e-e) : t_E(i-i) : t_E(e-i) = 1 : \left(\frac{m_p}{m_e}\right)^{1/2} : \left(\frac{m_p}{m_e}\right) \quad (4.32)$$

Quindi, i primi a raggiungere l'equilibrio sono gli elettroni, seguiti dagli ioni, ed infine avviene l'equipartizione. Questo comportamento è particolarmente importante nello studio delle onde d'urto, che vedremo in seguito.

# Capitolo 5

## Processi Radiativi

### 5.1 Introduzione

Nel Capitolo 2 abbiamo introdotto l'equazione del trasporto radiativo (3.7), che qui riscriviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu &= -\mu_\nu I_\nu + j_\nu \\ &= -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \end{aligned} \quad (5.1)$$

dove  $\mu_\nu$  è il coefficiente di assorbimento,  $j_\nu$  il coefficiente di emissione (energia emessa per unità di tempo, per unità di angolo solido, per unità di volume in direzione  $\mathbf{n}$ ), ed abbiamo introdotto la quantità  $\kappa_\nu$ , detta opacità specifica e definita come  $\mu_\nu = \kappa_\nu \rho$ .

Abbiamo inoltre introdotto il concetto di funzione sorgente  $S$ , definita come il rapporto tra i coefficienti di emissione e di assorbimento; ed il concetto di profondità ottica  $\tau_\nu$  (vedi Eq. 3.8) che ci ha permesso di definire un mezzo *otticamente spesso* (*opaco*) quando  $\tau_\nu$  integrato lungo un percorso tipico attraverso il mezzo soddisfa  $\tau_\nu > 1$ .

Al contrario, quando  $\tau_\nu < 1$  il mezzo è detto *otticamente sottile* (*trasparente*).

Un concetto che si dimostra utile nella trattazione del trasporto radiativo è quello di *libero cammino medio*, definito come la distanza media che un fotone riesce a percorrere prima di essere assorbito dalla materia in cui si muove. Come abbiamo già visto (si veda Eq. 3.13), la probabilità che un fotone attraversi almeno una profondità ottica  $\tau_\nu$  è semplicemente  $e^{-\tau_\nu}$ . La profondità ottica *media* è quindi uguale all'unità

$$\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1$$

La distanza media attraversata in un mezzo omogeneo è definita *libero cammino medio*  $l_\nu$  ed è data da  $\langle \tau_\nu \rangle = \mu_\nu l_\nu = 1$ , o equivalentemente

$$l_\nu = \frac{1}{\mu_\nu} = \frac{1}{N\sigma_\mu} \quad (5.2)$$

In altre parole, il libero cammino medio, per un mezzo omogeneo, non è altro che il reciproco del coefficiente di assorbimento.

## 5.2 Processo di scattering

Nel caso di pura emissione termica la quantità di radiazione emessa da un elemento di materiale **NON** dipende dal campo di radiazione incidente: la funzione sorgente è sempre  $B_\nu(T)$ . Questo elemento emetterà lo stesso spettro sia che si trovi isolato nello spazio sia che si trovi immerso all'interno una stella dove il campo di radiazione ambientale è preponderante.

Esiste però un altro processo di emissione molto comune in astrofisica (e non solo), detto *scattering*, che dipende completamente dalla quantità di radiazione che cade sull'elemento. Se la radiazione "scatterata" è emessa in maniera isotropa sull'angolo solido, così che il coefficiente di emissione è indipendente dalla direzione, si parla di *scattering isotropo*.

Se la quantità totale di radiazione **emessa** per unità di frequenza è uguale alla quantità totale di radiazione **assorbita** nello stesso intervallo di frequenza si parla di *scattering coerente (elastico o monocromatico)*.

Il coefficiente di emissione per scattering isotropo e coerente può essere trovato eguagliando la potenza assorbita per unità di volume:

$$j_\nu = \sigma_\nu J_\nu \quad (5.3)$$

dove  $\sigma_\nu$  è il coefficiente di assorbimento del processo di scattering, a volte chiamato *coefficiente di scattering*. La funzione sorgente per il processo di scattering è dunque

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\mu_\nu} = \frac{j_\nu}{\sigma_\nu} = J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega \quad (5.4)$$

L'equazione del trasporto per il processo di scattering diventa quindi

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\sigma_\nu(I_\nu - J_\nu) \quad (5.5)$$

Questa è un'equazione integro-differenziale, la cui soluzione da un punto di vista matematico è alquanto complessa.

L'emissione e l'assorbimento di radiazione può essere governata da più di un processo: ad esempio, consideriamo il caso di un materiale con coefficiente di assorbimento  $\mu_\nu$  descrivente emissione termica e coefficiente di scattering  $\sigma_\nu$  descrivente scattering coerente isotropo. L'equazione del trasporto avrà allora due termini

$$\begin{aligned} \frac{dI_\nu}{ds} &= -\mu_\nu(I_\nu - B_\nu) - \sigma_\nu(I_\nu - J_\nu) \\ &= -(\mu_\nu + \sigma_\nu)(I_\nu - S_\nu) \end{aligned} \quad (5.6)$$

La funzione sorgente

$$S_\nu = \frac{\mu_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\mu_\nu + \sigma_\nu} \quad (5.7)$$

è una media di due funzioni sorgenti separate, pesate per i loro rispettivi coefficienti di assorbimento.

Il coefficiente di assorbimento netto è  $\mu_\nu + \sigma_\nu$ , che può essere usato per definire la profondità ottica  $d\tau_\nu = (\mu_\nu + \sigma_\nu)ds$ .

Questo coefficiente di assorbimento netto è chiamato *coefficiente di estinzione*, per distinguerlo dal coefficiente di assorbimento “vero”  $\mu_\nu$ . Se un elemento di materia si trova all'interno di un mezzo ad una temperatura costante, ci aspettiamo che il campo di radiazione si trovi prossimo al valore termodinamico  $J_\nu = B_\nu(T)$ . Se invece l'elemento si trova isolato nello spazio libero, allora  $J_\nu = 0$ , e quindi la funzione sorgente è  $S_\nu = \mu_\nu B_\nu / (\mu_\nu + \sigma_\nu)$ , una frazione della funzione di Planck.

### 5.3 Random walk

Un modo particolarmente utile di studiare lo scattering è per mezzo del cosiddetto *random walk*. E' possibile studiare i processi di assorbimento, emissione, e propagazione in termini probabilistici per un singolo fotone piuttosto che studiare il comportamento medio di un gran numero di fotoni, come abbiamo fatto finora. Ad esempio, il decadimento esponenziale di un fascio di fotoni può essere interpretato come il fatto che la probabilità di un fotone che attraversa un mezzo di profondità ottica  $\tau_\nu$  di essere assorbito è data da  $\exp(-\tau_\nu)$ .

Consideriamo ora un fotone emesso in una regione omogenea ed infinita che subisca scattering. Esso attraverserà una distanza  $r_1$  prima di subire un altro scattering e viaggiare una distanza  $r_2$  prima di subire un altro scattering e viaggiare una distanza  $r_3$ , ecc. Lo spostamento totale del fotone dopo  $N$  cammini sarà

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \cdots + \mathbf{r}_N \quad (5.8)$$

Per trovare una stima della distanza attraversata dal fotone  $|\mathbf{R}|$  non possiamo fare la media di (5.8), dato che questa sarà nulla. Se quadriamo però la (5.8) e poi prendiamo la media otterremo lo spostamento quadratico medio  $l_*^2$

$$\begin{aligned} l_*^2 \equiv \langle \mathbf{R}^2 \rangle &= \langle \mathbf{r}_1^2 \rangle + \langle \mathbf{r}_2^2 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{r}_N^2 \rangle \\ &+ 2\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \rangle + 2\langle \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 \rangle + \cdots \\ &+ \cdots \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ogni termine  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$  avrà come valore il quadrato del tipico cammino del fotone, che indicheremo con  $l^2$ , e che corrisponde al quadrato del libero cammino medio. I termini con i prodotti incrociati coinvolgono medie del coseno dell'angolo tra le direzioni prima e dopo lo scattering, e queste devono essere nulle per scattering isotropo. Quindi la (5.9) diventa

$$\begin{aligned} l_*^2 &= Nl^2 \\ l_* &= \sqrt{N} l \end{aligned} \quad (5.10)$$

Questo risultato può essere usato per stimare il numero medio di scattering in un mezzo finito. Supponiamo che un fotone sia generato da qualche parte in un mezzo; allora il fotone subirà

scattering fino a quando non riuscirà ad uscire completamente. Per regioni che hanno una profondità ottica grande allora  $l_* \sim L$ , la dimensione tipica del mezzo. Da Eq. 5.10 abbiamo che  $N \simeq L^2/l^2$ . Dato che  $l$  è dell'ordine del libero cammino medio,  $L/l$  dà una misura dello spessore ottico del mezzo, quindi

$$N \simeq \tau^2 \quad (\tau \gg 1) \quad (5.11)$$

Per regioni di profondità ottica piccola, invece, il numero medio di scattering sarà dell'ordine di  $1 - e^{-\tau} \simeq \tau$ , quindi

$$N \simeq \tau \quad (\tau \ll 1) \quad (5.12)$$

Per stime per ordine di grandezza, è sufficiente usare  $N \simeq \tau^2 + \tau$  o  $N \simeq \max(\tau, \tau^2)$  valide per ogni profondità ottica  $\tau$ .

Riprendendo il caso in cui siano presenti contemporaneamente scattering ed assorbimento, il cammino che un fotone può percorrere è in questo caso determinato dal coefficiente di estinzione  $\mu_\nu + \sigma_\nu$ . Il libero cammino medio prima che un fotone subisca scattering o assorbimento sarà quindi (vedi Eq. 5.2)

$$l_\nu = \frac{1}{\mu_\nu + \sigma_\nu} \quad (5.13)$$

Durante un random walk, la probabilità che un fotone venga assorbito sarà (si veda Eq. 5.7)

$$\epsilon_\nu = \frac{\mu_\nu}{\mu_\nu + \sigma_\nu} \quad (5.14)$$

mentre la corrispondente probabilità che venga scatterato sarà

$$1 - \epsilon_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\mu_\nu + \sigma_\nu} \quad (5.15)$$

La quantità  $1 - \epsilon_\nu$  viene detta *albedo per scattering singolo*. In questo caso la funzione sorgente può essere scritta

$$S_\nu = (1 - \epsilon_\nu)J_\nu + \epsilon_\nu B_\nu \quad (5.16)$$

Vediamo di calcolare ora il numero medio di scattering. Nel caso di un mezzo infinito un random walk inizia con l'emissione termica di un fotone e termina con il suo assorbimento dopo un certo numero di scattering. Dato che il cammino può essere terminato con probabilità  $\epsilon$  alla fine di ogni cammino libero, il numero di cammini liberi sarà  $N = \epsilon^{-1}$ . Da Eq. 5.10 allora abbiamo che

$$l_*^2 = \frac{l^2}{\epsilon} \quad (5.17)$$

$$l_* = \frac{l}{\sqrt{\epsilon}}$$

che, utilizzando (5.13) e (5.14) diventa

$$l_* \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_\nu(\mu_\nu + \sigma_\nu)}} \quad (5.18)$$

La lunghezza  $l_*$  fornisce una stima dello spostamento effettivo netto tra il punto in cui un fotone viene creato ed il punto in cui un fotone viene assorbito, e viene chiamata indifferentemente *lunghezza di diffusione*, lunghezza di termalizzazione o libero cammino effettivo. Si noti come  $l_*$  sia dipendente dalla frequenza.

Nel caso di un mezzo finito, il suo comportamento varierà a seconda che la sua dimensione caratteristica  $L$  sia maggiore o minore del libero cammino effettivo  $l_*$ . Per descrivere quantitativamente queste differenze di comportamento, è conveniente introdurre lo *spessore ottico effettivo*  $\tau_* \equiv L/l_*$ .

Utilizzando Eq. 5.18 avremo che

$$\tau_* \equiv \frac{L}{l_*} \simeq \sqrt{\tau_a(\tau_a + \tau_s)} \quad (5.19)$$

dove gli spessori ottici di assorbimento  $\tau_a$  e di scattering  $\tau_s$  sono definiti

$$\tau_a = \mu_\nu L; \quad \tau_s = \sigma_\nu L \quad (5.20)$$

Quando il cammino libero effettivo è grande rispetto alla dimensione del mezzo avremo che

$$\tau_* \ll 1 \quad (5.21)$$

ed il mezzo è detto *effettivamente sottile (traslucido)*. In questo caso la maggior parte dei fotoni riusciranno a scappare per random walk prima di essere distrutti da assorbimento. Quando il cammino libero effettivo è invece piccolo rispetto alla dimensione del mezzo avremo che

$$\tau_* \gg 1 \quad (5.22)$$

ed il mezzo è detto *effettivamente spesso*.

La maggior parte dei fotoni emessi termicamente a profondità maggiori del libero cammino effettivo verranno distrutti per assorbimento prima di poter uscire dal mezzo. Quindi le condizioni fisiche del mezzo per grandi profondità effettive approssimeranno le condizioni in cui la materia è in equilibrio termico con la radiazione, per cui  $I_\nu \rightarrow B_\nu$  e  $S_\nu \rightarrow B_\nu$ . E' per questa proprietà che  $l_*$  viene detta lunghezza di termalizzazione.

## 5.4 Bremsstrahlung

Particelle che attraversano la materia subiscono scattering e perdono energia per urto. In questi urti le particelle sono soggette ad accelerazioni, quindi emettono a loro volta radiazione elettromagnetica. La radiazione emessa durante urti atomici, cioè dovuta alla accelerazione di una carica in un campo Coulombiano di un'altra carica, è chiamata *bremsstrahlung* od anche *radiazione di frenamento*. Questo nome le deriva dal fatto che fu osservata la prima volta con

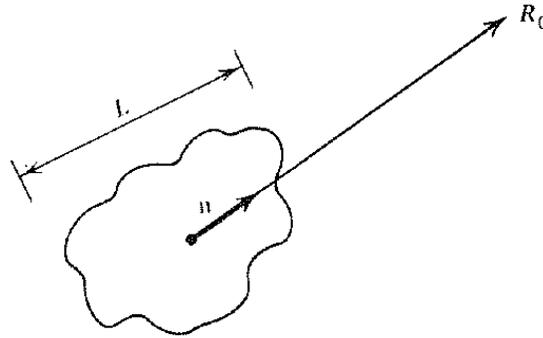


Figura 5.1: Campo di radiazione per un mezzo di dimensione  $L$ .

elettroni di alta energia frenati in una spessa lastra di metallo. Un trattamento rigoroso di questo processo richiede l'uso della meccanica quantistica, dato che possono essere prodotti fotoni con energie dello stesso ordine di grandezza di quelle delle particelle in gioco. Comunque con un trattamento classico del processo si ottiene la corretta dipendenza funzionale per la maggior parte dei parametri fisici. Le correzioni quantistiche verranno incorporate in fattori correttivi (detti fattori di Gaunt) alle formule classiche.

Si può dimostrare che la radiazione di bremsstrahlung dovuta a collisioni di particelle dello stesso tipo (elettrone-elettrone o ione-ione) è zero. Quindi radiazione verrà prodotta da collisioni elettrone-ione, in cui gli elettroni sono la principale fonte di radiazione, dato che le accelerazioni relative sono inversamente proporzionali alle masse.

Inoltre, dato che gli ioni hanno masse molto maggiori di quella dell'elettrone, potremo trattare l'elettrone come in movimento nel campo Coulombiano fisso dello ione.

Per ricavarci lo spettro della radiazione di bremsstrahlung ricordiamo che quando si trattano cariche in movimento il campo elettrico può essere scomposto in due termini: il primo termine, detto *campo di velocità*, che ha andamento  $\propto r^{-2}$ , altro non è che la generalizzazione della legge di Coulomb per cariche in movimento. Il secondo termine, detto *campo di radiazione*, ha andamento  $\propto r^{-1}$  ed è proporzionale alla accelerazione della particella che, nella cosiddetta approssimazione di dipolo, ha espressione

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \ddot{\mathbf{d}})}{c^2 R_0} \quad (5.23)$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore che unisce la particella al punto  $R_0$  dove si calcola il campo, e  $\mathbf{d}$  è il momento di dipolo

$$\mathbf{d} = \sum q_i \mathbf{r}_i \quad (5.24)$$

delle cariche  $q_i$  (vedi Figura 5.1).

In questa approssimazione abbiamo che l'energia emessa per unità di tempo per unità di angolo solido è

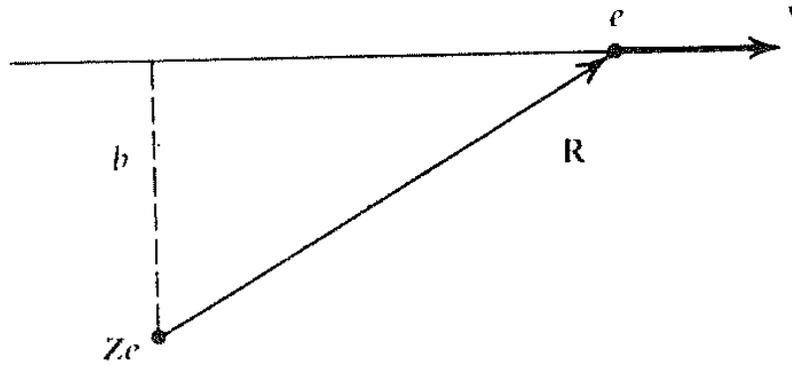


Figura 5.2: Definizione della geometria per un elettrone  $e$  che si muove nel campo di radiazione dello ione di carica  $Ze$ .

$$\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta \quad (5.25)$$

che integrata sull'angolo solido mi dà la potenza emessa

$$P \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{c^3} \quad (5.26)$$

Come abbiamo già visto, sono le collisioni a piccolo angolo di deflessione ed a grande parametro di impatto  $b$  che contribuiscono all'emissione. Se quindi consideriamo un elettrone di carica  $-e$  che collida a grande distanza con uno ione di carica  $Ze$  (vedi Figura 5.2), allora il momento di dipolo sarà  $\mathbf{d} = -e\mathbf{R}$ , e la sua derivata seconda (da porre in Eq. 5.25) è

$$\ddot{\mathbf{d}} = -e \dot{\mathbf{v}} \quad (5.27)$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità dell'elettrone. E' possibile fare vedere come

$$\frac{dE}{d\omega} = \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi c^3} |\Delta \mathbf{v}|^2 & \omega \tau_c \ll 1 \\ 0 & \omega \tau_c \gg 1 \end{cases} \quad (5.28)$$

dove  $\Delta \mathbf{v}$  è la variazione di velocità che avviene nella collisione,  $\tau_c = b/v$  è il tempo di collisione in cui l'elettrone e lo ione sono in interazione, e  $\omega = 2\pi\nu$ .

Dato che consideriamo deflessioni piccole, il cambio di velocità avverrà perpendicolarmente alla direzione di moto, quindi (si veda la dimostrazione completa in Appendice B a pagina 109)

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{Ze^2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2Ze^2}{mbv} \quad (5.29)$$

Quindi l'emissione da una singola collisione sarà

$$\frac{dE(b)}{d\omega} = \begin{cases} \frac{8Z^2 e^6}{3\pi c^3 m^2 v^2 b^2} & b \ll v/\omega \\ 0 & b \gg v/\omega \end{cases} \quad (5.30)$$

Possiamo ora ricavarci lo spettro totale per un mezzo composto da  $N_i$  ioni per unità di volume e  $N_e$  elettroni per unità di volume che si muovono a velocità  $v$ . Si noti come il flusso di elettroni (elettroni per unità di tempo per unità di area) incidente su di uno ione non è altro che  $N_e v$ .

L'elemento di area attorno ad uno ione è  $2\pi b db$ , quindi l'emissione totale per unità di tempo per unità di volume per unità di frequenza è

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = N_i N_e 2\pi v \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{dE(b)}{d\omega} b db \quad (5.31)$$

dove  $b_{\min}$  e  $b_{\max}$  sono il minimo e massimo valore del parametro di impatto, discussi nel Capitolo 3. Sostituendo (5.30) in (5.31) otteniamo

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = \frac{16e^6}{3c^3 m^2 v} N_i N_e Z^2 \ln \Lambda \quad (5.32)$$

Quando per  $b_{\min}$  è necessario prendere il valore  $b_{\min}(MQ)$  (vedi Eq. 4.22), la trattazione classica non è più valida. Il risultato esatto di Eq. 5.32 viene espresso in termini di un fattore correttivo, detto *fattore di Gaunt*  $g_{ff}$ :

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3 m^2 v} N_i N_e Z^2 g_{ff}(\mathbf{v}, \omega) \quad (5.33)$$

da cui si vede, confrontando (5.32) con (5.33) che

$$g_{ff}(\mathbf{v}, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \Lambda \quad (5.34)$$

Il fattore di Gaunt (5.34) è una certa funzione dell'energia dell'elettrone e della frequenza di emissione. Il suoi valori sono tabulati e reperibili in letteratura.

### 5.4.1 Bremsstrahlung termico

L'uso più interessante delle formule appena trovate è la loro applicazione al caso in cui la distribuzione delle velocità degli elettroni sia termica. Quello che quindi faremo sarà di mediare le espressioni trovate qui sopra per una singola velocità su di una distribuzione termica di velocità.

La probabilità  $dP$  che una particella abbia una velocità nell'intervallo  $d^3\mathbf{v}$  è

$$dP \propto e^{-E/kT} d^3\mathbf{v} = \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d^3\mathbf{v}$$

Dato però che per una distribuzione isotropa delle velocità abbiamo che  $d^3\mathbf{v} = 4\pi v^2 dv$ , la probabilità che una particella abbia velocità nell'intervallo  $dv$  è

$$dP \propto v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv \quad (5.35)$$

Quello che ora bisogna fare è integrare Eq. 5.33 su questa funzione. Quali sono i limiti di integrazione? A prima vista sembrerebbe  $0 \leq v < \infty$ , ma ad una frequenza  $\nu$  la velocità incidente deve essere almeno tale che

$$h\nu \leq \frac{1}{2}mv^2$$

altrimenti un fotone di energia  $h\nu$  non potrebbe essere creato. Questo limite di integrazione sulle velocità degli elettroni è detto *photon discreteness effect*. L'integrale diventa

$$\frac{dE(T, \omega)}{dV dt d\omega} = \frac{\int_{v_{\min}}^{\infty} \frac{dE(v, \omega)}{d\omega dV dt} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}{\int_0^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv}$$

dove  $v_{\min} \equiv \sqrt{2h\nu/m}$ . Dato che  $d\omega = 2\pi d\nu$  otteniamo

$$\frac{dE(T, \omega)}{dV dt d\nu} = \frac{2^5 \pi e^6}{3mc^3} \left(\frac{2\pi}{3km}\right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \bar{g}_{ff} \quad (5.36)$$

Nel caso di emissione abbiamo che il coefficiente di emissione  $j_\nu$  definito in Eq. 3.7 in unità di  $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{Hz}^{-1}$  è dato da

$$4\pi j_\nu \equiv \frac{dE(T, \omega)}{dV dt d\nu} = 6.8 \cdot 10^{-38} Z^2 N_i N_e T^{-1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \bar{g}_{ff} \quad (5.37)$$

Il termine  $\bar{g}_{ff}(T, \nu)$  è chiamato fattore di Gaunt *mediato in velocità*.

Il fattore  $T^{-1/2}$  risulta dal fatto che  $dE/dV dt d\omega \propto v^{-1}$  (vedi Eq. 5.33) e  $\langle v \rangle \propto T^{1/2}$ . Il termine  $\exp(-h\nu/kT)$  viene dal limite di integrazione sulla velocità ed alla forma della distribuzione termica delle velocità.

E' possibile far vedere come  $\bar{g}_{ff} \sim 1$  per  $u = h\nu/kT \sim 1$ , ed è 1–5 per  $10^{-4} < u < 1$ . Quindi una buona stima dell'ordine di grandezza di  $\bar{g}_{ff}$  è l'unità.

Si noti come lo spettro di bremsstrahlung sia abbastanza "piatto" (in un grafico log–log) fino al suo cutoff a circa  $h\nu \sim kT$  (in realtà questo è vero solamente per sorgenti otticamente sottili).

Per ottenere l'espressione per bremsstrahlung *non termico* è necessario conoscere la distribuzione di velocità, e la formula per l'emissione per un elettrone a singola velocità deve essere mediata su quella distribuzione.

Possiamo ora anche ottenere la potenza totale per unità di volume emessa per bremsstrahlung termico. Basta integrare in frequenza Eq. 5.36

$$\frac{dE}{dt dV} = \left(\frac{2\pi kT}{3m}\right)^{1/2} \frac{2^5 \pi e^6}{3hmc^3} Z^2 N_i N_e \bar{g}_B \quad (5.38)$$

che numericamente è uguale a (unità di  $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-3}$ )

$$4\pi j = \frac{dE}{dt dV} = 1.4 \cdot 10^{-27} T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \bar{g}_B \quad (5.39)$$

Il termine  $\bar{g}_B(T)$  è il fattore di Gaunt *mediato in frequenza e mediato in velocità*, il quale è nell'intervallo 1.1–1.5. Prendendo il valore di 1.2 si ottiene una accuratezza di circa il 20%.

## 5.4.2 Assorbimento per bremsstrahlung termico

Dalla legge di Kirchhoff (3.11) abbiamo che

$$j_\nu^{\text{ff}} = \mu_\nu^{\text{ff}} B_\nu(T)$$

dove  $\mu_\nu^{\text{ff}}$  è il coefficiente di assorbimento libero-libero. Usando l'espressione (3.10) per la funzione di Planck abbiamo che

$$\mu_\nu^{\text{ff}} = \frac{4e^6}{3mhc} \left( \frac{2\pi}{3km} \right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-3} (1 - e^{-h\nu/kT}) \bar{g}_{\text{ff}} \quad (5.40a)$$

$$= 3.7 \cdot 10^8 T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-3} (1 - e^{-h\nu/kT}) \bar{g}_{\text{ff}} \text{ cm}^{-1} \quad (5.40b)$$

Per  $u \gg 1$  l'esponenziale è trascurabile, e  $\mu_\nu$  è proporzionale a  $\nu^{-3}$ . Per  $u \ll 1$  siamo nel regime di Rayleigh-Jeans e Eq. 5.40 diventa

$$\mu_\nu^{\text{ff}} = \frac{4e^6}{3mhc} \left( \frac{2\pi}{3km} \right)^{1/2} T^{-3/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-2} \bar{g}_{\text{ff}} \quad (5.41a)$$

$$= 0.018 T^{-3/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-2} \bar{g}_{\text{ff}} \text{ cm}^{-1} \quad (5.41b)$$

## 5.5 Scattering Compton

### 5.5.1 Scattering da elettroni a riposo

Consideriamo il caso di scattering di fotoni da parte di elettroni che si trovino a riposo. Nel caso in cui l'energia del fotone  $h\nu \ll mc^2$ , ci ritroviamo nel caso classico di scattering Thomson, in cui

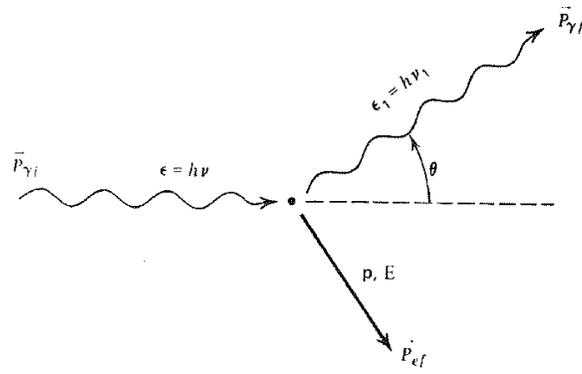


Figura 5.3: Definizione della geometria per un lo scattering di un fotone da parte di un elettrone inizialmente a riposo.

$$\epsilon = \epsilon_1 \quad (5.42a)$$

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_0^2(1 + \cos^2 \theta) \quad (5.42b)$$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}r_0^2 \quad (5.42c)$$

dove  $\epsilon$  e  $\epsilon_1$  sono l'energia del fotone incidente e scatterato,  $d\sigma_T/d\Omega$  è la sezione d'urto Thomson differenziale per radiazione incidente non polarizzata, e  $r_0 = e^2/mc^2$  è il raggio classico dell'elettrone. Quando  $\epsilon = \epsilon_1$  lo scattering è detto *coerente* o *elastico*.

Effetti quantistici hanno due effetti: (i) modificano la cinematica del processo di scattering e (ii) modificano le sezioni d'urto.

Gli effetti cinematici avvengono perché un fotone possiede, oltre la sua energia  $\epsilon = h\nu$ , anche una quantità di moto  $\mathbf{p}$ , con  $|\mathbf{p}| = \epsilon/c$ . Lo scattering quindi non sarà più elastico a causa del rinculo della carica. Consideriamo il sistema in cui un fotone di energia  $\epsilon$  incide su di un elettrone a riposo il quale, dopo l'urto, avrà acquistato una velocità  $\mathbf{v}$  (vedi Figura 5.3).

Dalla legge di conservazione dell'energia prima e dopo l'urto avremo che

$$\epsilon + mc^2 = \epsilon' + c\sqrt{m^2c^2 + p_e^2}$$

mentre dalla conservazione della quantità di moto abbiamo che

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$$

Dalla seconda segue  $\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ , che quadrando e sostituendo nella prima

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{1 + \frac{\epsilon}{mc^2}(1 - \cos \theta)} \quad (5.43)$$

che può essere riscritta in termini della lunghezza d'onda come

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) = \lambda_c(1 - \cos \theta) \quad (5.44)$$

dove  $\lambda_c = 2.4 \cdot 10^{-10}$  cm è detta lunghezza d'onda Compton. Vediamo quindi che compare una variazione in lunghezza d'onda dell'ordine di  $\lambda_c$  durante uno scattering Compton. Per lunghezze d'onda  $\lambda \gg \lambda_c$  (cioè  $h\nu \ll mc^2$ ) lo scattering è elastico, e quindi non c'è variazione nell'energia del fotone nel SdR dell'elettrone.

Diamo ora una descrizione qualitativa degli effetti quantistici sulla sezione d'urto. Si può far vedere che la sezione d'urto differenziale per radiazione non polarizzata in elettrodinamica quantistica è data dalla formula di *Klein-Nishina*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon^2} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon} - \sin^2 \theta \right) \quad (5.45)$$

Si noti che per  $\epsilon_1 \simeq \epsilon$  questa si riduce all'espressione classica (5.42b). Il principale effetto che si può ricavare dall'espressione quantistica (5.45) è che all'aumentare dell'energia del fotone la sezione d'urto si riduce rispetto a quella classica (5.42b). Quindi lo scattering Compton diventa meno efficiente all'aumentare dell'energia. La sezione d'urto totale ha l'espressione

$$\sigma = \sigma_T \frac{3}{4} \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[ \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\} \quad (5.46)$$

dove  $x \equiv h\nu/mc^2$ . Nel regime non relativistico abbiamo che

$$\sigma \simeq \sigma_T \left( 1 - 2x + \frac{26x^2}{5} + \dots \right) \quad x \ll 1 \quad (5.47)$$

mentre nel regime relativistico abbiamo

$$\sigma \simeq \frac{3}{8} \sigma_T x^{-1} \left( \ln 2x + \frac{1}{2} \right) \quad x \gg 1 \quad (5.48)$$

### 5.5.2 Scattering da elettroni in movimento

Nella sezione precedente abbiamo considerato il caso che gli elettroni che fanno da diffusori per la radiazione fossero in quiete. Trattiamo ora il caso in cui gli elettroni posseggono una propria velocità. Assumeremo che nel SdR dell'elettrone i fotoni abbiano  $h\nu \ll mc^2$ , in modo da poter trascurare le correzioni quantistiche nella sezione d'urto di Klein-Nishina.

Se l'elettrone in movimento possiede sufficiente energia cinetica rispetto al fotone, è possibile che sia l'elettrone a trasferire energia al fotone. In questo caso si parla di **scattering Compton inverso**.

Siano ora  $K$  il SdR del laboratorio (osservatore) e sia  $K'$  il SdR in cui l'elettrone si trovi a riposo. L'evento di scattering visto nei due SdR è mostrato in Figura 5.4. Si noti che tutte le formule ricavate nella sezione precedente dovrebbero essere riscritte in forma primata, dato che valgono nel SdR in cui l'elettrone è a riposo.

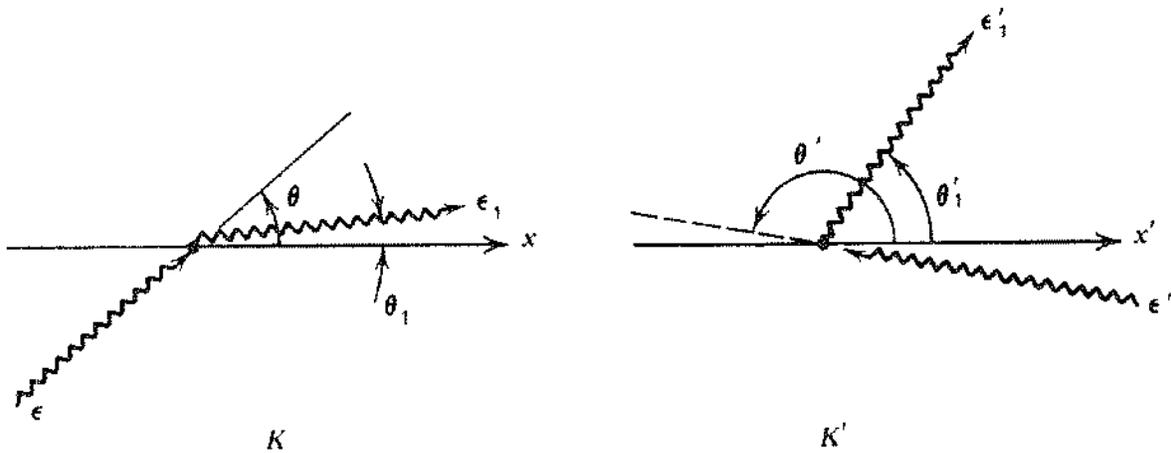


Figura 5.4: Definizione della geometria dello scattering Compton nel SdR  $K$  dell'osservatore e nel SdR  $K'$  dell'elettrone a riposo.

Dalle formule dell'effetto Doppler relativistico abbiamo che

$$\epsilon' = \epsilon \gamma (1 - \beta \cos \theta) \quad (5.49a)$$

$$\epsilon_1 = \epsilon'_1 \gamma (1 + \beta \cos \theta'_1) \quad (5.49b)$$

Dall'Eq. 5.43 abbiamo però che

$$\epsilon'_1 \simeq \epsilon' \left[ 1 - \frac{\epsilon'}{mc^2} (1 - \cos \Theta) \right] \quad (5.50a)$$

$$\cos \Theta = \cos \theta'_1 \cos \theta' + \sin \theta' \sin \theta'_1 \cos(\phi' - \phi'_1) \quad (5.50b)$$

dove  $\phi'_1$  e  $\phi'$  sono gli angoli azimutali del fotone scatterato e del fotone incidente nel SdR dell'elettrone a riposo.

Nel caso di elettroni relativistici,  $\gamma^2 - 1 \gg h\nu/mc^2$ , l'energia del fotone prima dello scattering, nel SdR  $K'$  e dopo lo scattering stanno nel rapporto

$$1 : \gamma : \gamma^2$$

sempre che venga soddisfatta la condizione per scattering Thomson nel SdR  $K'$   $\gamma\epsilon \ll mc^2$ . Questo segue direttamente dalle (5.49), dato che  $\theta \simeq \theta'_1 \simeq \pi/2$ .

Questo processo quindi converte un fotone di bassa energia in uno di alta energia moltiplicando l'energia per un fattore dell'ordine di  $\gamma^2$ . Dato che nel limite di Thomson possiamo avere fotoni fino a 100 keV, si può vedere come in questo modo si possano ottenere fotoni di energie enormi.

Se l'energia intermedia è troppo alta, allora gli effetti quantistici menzionati precedentemente agiscono riducendo l'efficienza del processo (facendo sì che  $\epsilon'_1 < \epsilon$ ) e riducendo la probabilità di scattering (riduzione di  $\sigma$ ).

Da un punto di vista cinematico abbiamo che l'energia massima raggiungibile dal fotone sarà  $\sim \gamma mc^2$ , dato che per conservazione dell'energia dobbiamo avere  $\epsilon_1 < \gamma mc^2 + \epsilon$ .

### 5.5.3 Il parametro di Comptonizzazione $y$

Prima di discutere in dettaglio quale sia l'effetto di ripetuti scattering Compton sullo spettro totale e sulla distribuzione di energia dei fotoni, determiniamo quali sono le condizioni per cui il processo di scattering altera in maniera significativa l'energia totale del fotone. Al solito ci poniamo nel limite di Thomson  $\gamma\epsilon \ll mc^2$ .

In un mezzo finito possiamo definire il parametro di Comptonizzazione  $y$  per determinare se un fotone subirà una variazione significativa della sua energia nell'attraversare un mezzo:

$$y \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{variazione di energia frazio-} \\ \text{nale media per scattering} \end{array} \right\} \times \left( \begin{array}{l} \text{numero medio di scat-} \\ \text{tering} \end{array} \right) \quad (5.51)$$

In generale, se  $y > 1$  l'energia totale del fotone, così come il suo spettro, saranno significativamente modificati; nel caso in cui  $y \ll 1$  non avremo variazioni apprezzabili.

Cerchiamo ora di dare una stima per il primo termine di (5.51). Per convenienza supporremo che la distribuzione degli elettroni sia termica. Nel caso di elettroni non relativistici, mediando la (5.50a) sull'angolo abbiamo che

$$\frac{\Delta\epsilon'}{\epsilon'} \equiv \frac{\epsilon'_1 - \epsilon'}{\epsilon'} = -\frac{\epsilon'}{mc^2} \quad (5.52)$$

Nel SdR del laboratorio, al primo ordine nei due parametri (piccoli)  $\epsilon/mc^2$  e  $kT/mc^2$ , dobbiamo avere

$$\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} = -\frac{\epsilon}{mc^2} + \alpha \frac{kT}{mc^2} \quad (5.53)$$

dove  $\alpha$  è un certo parametro da determinare. Per calcolarlo, immaginiamo che fotoni ed elettroni siano in completo equilibrio ma che interagiscano solamente per scattering. Assumiamo inoltre che la densità dei fotoni sia sufficientemente piccola che processi di emissione stimolata possano essere trascurati. In questo caso i fotoni devono seguire una funzione di distribuzione di Bose-Einstein con un certo potenziale chimico. Infatti, dato che per scattering non si possono nè creare nè distruggere fotoni, una distribuzione di Planck non può essere valida.

Per una distribuzione termica degli elettroni abbiamo che

$$N(\epsilon) = K\epsilon^2 e^{-\epsilon/kT}$$

e quindi

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\int \epsilon \frac{dN}{d\epsilon} d\epsilon}{\int \frac{dN}{d\epsilon} d\epsilon} = 3kT \quad (5.54a)$$

$$\langle \epsilon^2 \rangle = 12(kT)^2 \quad (5.54b)$$

In questo caso specifico abbiamo che non ci può essere scambio di energia tra i fotoni e gli elettroni, quindi

$$\begin{aligned} \langle \Delta \epsilon \rangle &= 0 = \alpha \frac{kT}{mc^2} - \frac{\langle \epsilon^2 \rangle}{mc^2} \\ &= \frac{3kT}{mc^2} (\alpha - 4) kT \end{aligned}$$

da cui segue che  $\alpha = 4$ . Quindi per elettroni non relativistici in equilibrio termico, l'espressione per il trasferimento di energia per scattering è

$$\Delta \epsilon|_{NR} = \frac{\epsilon}{mc^2} (4kT - \epsilon) \quad (5.55)$$

Si noti che se gli elettroni hanno una temperatura maggiore dell'energia dei fotoni incidenti, i fotoni acquistano energia. Se invece  $\epsilon > 4kT$  allora energia viene trasferita dai fotoni agli elettroni.

Nel limite ultrarelativistico  $\gamma \gg 1$ , dalle relazioni (5.49) abbiamo che

$$\Delta \epsilon|_R \simeq \frac{4}{3} \gamma^2 \epsilon \quad (5.56)$$

dove il fattore  $\frac{4}{3}$  deriva dalla mediazione sugli angoli. Con argomenti analoghi a quelli utilizzati per ricavare le relazioni (5.54) abbiamo che

$$\langle \gamma^2 \rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{(mc^2)^2} = 12 \left( \frac{kT}{mc^2} \right)^2$$

quindi Eq. 5.56 diventa

$$\Delta \epsilon|_R \simeq 16\epsilon \left( \frac{kT}{mc^2} \right)^2 \quad (5.57)$$

Ora, il secondo termine della relazione (5.51), ricordando la discussione fatta sul random walk, (relazioni (5.11) e (5.12)), sarà dato da

$$\left( \text{numero medio di scattering} \right) \simeq \max(\tau_{es}, \tau_{es}^2) \quad (5.58)$$

dove abbiamo definito la profondità ottica per scattering elettronico

$$\tau_{\text{es}} \sim \rho \kappa_{\text{es}} R \quad (5.59)$$

$\kappa_{\text{es}}$  è l'opacità per scattering elettronico, che per un gas composto da Idrogeno ionizzato vale

$$\kappa_{\text{es}} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{m_{\text{p}}} = 0.40 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (5.60)$$

mentre  $R$  è la dimensione del mezzo. Ricapitolando, l'espressione per il parametro di Comptonizzazione  $y$  per elettroni termici relativistici e non relativistici è

$$y = \max(\tau_{\text{es}}, \tau_{\text{es}}^2) \begin{cases} \left( \frac{4kT}{mc^2} \right) & \text{Non Relativistico} \\ 16 \left( \frac{kT}{mc^2} \right)^2 & \text{Relativistico} \end{cases} \quad (5.61)$$

Nel ricavare queste espressioni abbiamo trascurato il trasferimento di energia nel SdR dell'elettrone a riposo, cioè  $4kT \gg \epsilon$  nel caso non relativistico.

In situazioni in cui l'assorbimento sia un effetto importante, è conveniente definire il parametro di Comptonizzazione  $y(\nu)$  dipendente dalla frequenza. In questo caso  $\tau_{\text{es}}$  deve essere valutato a partire dalla profondità ottica effettiva  $\tau_*(\nu)$ , dell'ordine dell'unità. Quindi  $\tau_{\text{es}}(\nu) = \rho \kappa_{\text{es}} l_*(\nu)$  da cui, usando (5.17),

$$\tau_{\text{es}}(\nu) \simeq \left( \frac{\kappa_{\text{es}}/\kappa_a(\nu)}{1 + \kappa_a(\nu)/\kappa_{\text{es}}} \right)^{1/2} \quad (5.62)$$

dove  $\kappa_a(\nu)$  è l'opacità per assorbimento. Questa equazione fornisce la profondità ottica per scattering dal punto di vista di emissione di un fotone di frequenza  $\nu$ . Le definizioni del parametro di Comptonizzazione rimangono le stesse con  $\tau_{\text{es}}$  sostituito da  $\tau_{\text{es}}(\nu)$ .

#### 5.5.4 Significato fisico del parametro di Comptonizzazione $y$

L'importanza del parametro di Comptonizzazione  $y$  risiede nel fatto che esso rappresenta il fattore di amplificazione di energia nel caso di scattering Compton. Quello che ora dimostreremo è che se un fotone di energia iniziale  $\epsilon_i$  incide su di una nube composta da elettroni termici non relativistici ad una temperatura  $T$ , allora dopo scattering Compton esso emergerà con una energia  $\epsilon_f \simeq \epsilon_i e^y$  (se ovviamente  $\epsilon_f \ll 4kT$ ).

Consideriamo quindi una nube di elettroni non relativistici mantenuta ad una temperatura  $T$ . La nube è otticamente spessa per scattering elettronico, cioè  $\tau_{\text{es}} \gg 1$ , ma nello stesso tempo è otticamente sottile per assorbimento, cioè  $\tau_*(h\nu = kT) \ll 1$ . Una grossa quantità di elettroni "soffici", ognuno di energia caratteristica  $\epsilon_i \ll kT$  viene iniettata nella nube.

Come risultato di scattering Compton inverso, questi fotoni "soffici" emergeranno dalla nube con energia caratteristica  $\epsilon_f$ . Il trasferimento di energia in uno scattering singolo, come abbiamo visto in (5.55) è dato da

$$\Delta\epsilon = \epsilon \left( \frac{4kT}{mc^2} - \frac{\epsilon}{mc^2} \right)$$

Per fotoni di energia  $\epsilon \ll 4kT$  il trasferimento di energia può essere messo in forma differenziale

$$\frac{d\epsilon}{dN} \sim \epsilon \frac{4kT}{mc^2}$$

dove  $dN$  è il numero differenziale di scattering. Dopo  $N$  scattering, l'energia iniziale  $\epsilon_i$  di un fotone sarà

$$\epsilon_N \sim \epsilon_i \exp \left( \frac{4kT}{mc^2} N \right) \quad (5.63)$$

per  $\epsilon_N \ll 4kT$ . In un mezzo di profondità ottica  $\tau_{\text{es}} \gg 1$ , il numero di scattering prima che il fotone riesca ad uscire dalla nube è, come abbiamo visto  $\sim \tau_{\text{es}}^2$ , quindi la (5.63) diventa

$$\epsilon_f \sim \epsilon_i e^y \quad y \equiv \frac{4kT}{mc^2} \tau_{\text{es}}^2 \quad (5.64)$$

Dalla definizione del parametro di Comptonizzazione abbiamo che  $\epsilon_f$  aumenta rapidamente all'aumentare di  $\tau_{\text{es}}$ . Ad un certo punto però la profondità ottica raggiungerà un valore critico  $\tau_{\text{crit}}$  oltre il quale il processo di Comptonizzazione satura. Questo ovviamente avviene quando  $\epsilon_f \sim 4kT$ . Se poniamo questo valore nell'Eq. 5.64 otteniamo

$$\tau_{\text{crit}} = \left[ \frac{mc^2}{4kT} \ln \left( \frac{4kT}{\epsilon_i} \right) \right]^{1/2} \quad (5.65)$$

### 5.5.5 Regimi spettrali per scattering multipli

Una analisi dettagliata dell'evoluzione dello spettro in presenza di scattering ripetuti su elettroni relativistici è molto difficile perché il trasferimento di energia per scattering è grande, dello stesso ordine di grandezza delle energie in gioco nel processo. Se però gli elettroni sono non relativistici il trasferimento di energia razionale per scattering è in questo caso piccolo. In particolare, l'equazione di Boltzmann (che regola il comportamento della densità  $n$  dei fotoni nello spazio delle fasi dovuta a scattering di elettroni) può essere espansa al secondo ordine in questa piccola quantità dando luogo alla cosiddetta equazione di Fokker-Planck. Per fotoni scatterati da elettroni termici non relativistici l'equazione di Fokker-Planck è nota con il nome di *equazione di Kompaneets*

$$\frac{\partial n}{\partial t_c} = \left( \frac{kT}{mc^2} \right) \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 (n' + n + n^2) \right] \quad (5.66)$$

dove  $n$  è la funzione di distribuzione dei fotoni che subiscono ripetuti scattering Compton inverso non relativistici,  $n' = \partial n / \partial x$ ,  $x = h\nu / kT$ , e  $t_c = (N_e \sigma_T c) t$  è il tempo in unità di tempo medio tra scattering. In generale, Eq. 5.66 deve essere risolta numericamente.

E' però possibile considerare casi limite ( $y \ll 1 \rightarrow$  corpo nero modificato;  $y \gg 1 \rightarrow$  Comptonizzazione saturata), in cui una analisi approssimata è sufficiente. Per i casi intermedi (Comptonizzazione non saturata) bisognerà ritornare ad un trattamento più dettagliato.

Per poter meglio delineare i regimi di validità delle nostre approssimazioni, introduciamo delle frequenze (energie) caratteristiche. In astrofisica abbiamo a che fare con mezzi termici in cui i fenomeni di assorbimento ed emissione sono dovuti a processi di bremsstrahlung. In questo caso abbiamo visto che il peso dell'assorbimento è maggiore a bassa energia (si vedano le espressioni (5.40) e (5.41) per il coefficiente di assorbimento per scattering libero-libero). Se indichiamo con  $\nu_0$  la frequenza a cui i coefficienti di assorbimento e di scattering sono uguali, allora dalla definizione di opacità e dalle equazioni (5.60) e (5.40) abbiamo che

$$\kappa_{\text{es}} = \kappa_{\text{ff}}(\nu_0) \quad (5.67a)$$

$$\frac{x_0^3}{1 - e^{-x_0}} \sim 4 \cdot 10^{25} T^{-7/2} \rho \bar{g}_{\text{ff}}(x_0) \quad (5.67b)$$

dove abbiamo definito  $x_0 \equiv h\nu_0/kT$  e  $\bar{g}_{\text{ff}}(x)$  è il fattore di Gaunt libero-libero. Nel nostro intervallo di interesse  $\bar{g}_{\text{ff}}(x)$  è approssimato dalla espressione

$$\bar{g}_{\text{ff}}(x) \sim \frac{3}{\pi} \ln \left( \frac{2.25}{x} \right)$$

Se  $x < x_0$  allora lo scattering sarà trascurabile, mentre per  $x > x_0$  lo scattering modificherà lo spettro. Si noti che se  $x_0 \gtrsim 1$  allora lo scattering può essere trascurato lungo la maggior parte dello spettro. Nella discussione che seguirà assumeremo che  $x_0 \ll 1$ .

Consideriamo ora la frequenza  $\nu_t$  a cui il mezzo diventa effettivamente sottile (traslucido). Dalle equazioni (5.40) e (5.18) abbiamo che

$$\kappa_{\text{es}} = \kappa_{\text{ff}}(\nu_t) \tau_{\text{es}}^2 \quad (5.68a)$$

$$\frac{x_t^3}{1 - e^{-x_t}} \sim 4 \cdot 10^{25} T^{-7/2} \rho \bar{g}_{\text{ff}}(x_t) \tau_{\text{es}}^2 \quad (5.68b)$$

dove  $x_t \equiv h\nu_t/kT$  e  $\tau_{\text{es}}$  è la profondità ottica totale per scattering elettronico definita in (5.59). Per  $x > x_t$  l'assorbimento è trascurabile. Nell'intervallo  $x_0 < x < x_t$  sia lo scattering che l'assorbimento sono importanti.

Infine introduciamo la frequenza  $\nu_{\text{coe}}$  a cui lo scattering incoerente (inelastico, cioè effetti dovuti a Compton inverso) diventa importante.

Questa energia è definita in modo che il parametro di Comptonizzazione  $y(\nu_{\text{coe}}) = 1$ . Cioè per  $\nu > \nu_{\text{coe}}$  il processo di scattering Compton inverso diventa importante tra l'emissione e l'uscita dal mezzo. Si noti che questa frequenza è definita soltanto se il parametro  $y > 1$  (altrimenti Compton inverso è trascurabile ad ogni frequenza). Dalle equazioni (5.61), (5.62) e (5.40), per  $x_{\text{coe}} \ll 1$

$$\kappa_{\text{es}} = \left( \frac{mc^2}{4kT} \right) \kappa_{\text{ff}}(\nu_{\text{coe}}) \quad (5.69a)$$

$$x_{\text{coe}} \sim 2.4 \cdot 10^{17} \rho^{1/2} T^{-9/4} [\bar{g}_{\text{ff}}(x_{\text{coe}})]^{1/2} \quad (5.69b)$$

Dalle equazioni (5.68b) e (5.69b) segue che scattering Compton inverso è importante e  $x_{\text{coe}}$  è definito solamente quando  $x_{\text{coe}} < x_{\text{t}}$ .

Una volta definite queste energie, vediamo di studiare diversi casi limite per gli spettri di Comptonizzazione.

□ **Corpo nero modificato:**  $y \ll 1$

Nel caso in cui  $y \ll 1$  allora solo scattering coerente è importante. In questo caso è possibile dimostrare che l'intensità della radiazione emergente in un mezzo semi-infinito in cui siano presente sia scattering che assorbimento ha la forma

$$I_{\nu} = \frac{2B_{\nu}}{1 + \sqrt{\frac{\kappa_{\text{ff}} + \kappa_{\text{es}}}{\kappa_{\text{ff}}}}} \quad (5.70)$$

Nel limite  $x \ll x_0$  abbiamo che la (5.70) si riduce all'intensità di corpo nero, mentre per  $x \gg x_0$  la (5.70) diventa un corpo nero "modificato"

$$\begin{aligned} I_{\nu}^{\text{MB}} &\equiv 2B_{\nu} \sqrt{\frac{\kappa_{\text{ff}}}{\kappa_{\text{es}}}} \\ &= 8.4 \cdot 10^{-4} T^{5/4} \rho^{1/2} \bar{g}_{\text{ff}}^{-1/2} x^{3/2} e^{-x/2} (e^x - 1)^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.71)$$

dove  $I_{\nu}^{\text{MB}}$  è misurata in  $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{Ster}^{-1}$ . Per  $x_0 \ll 1$  Eq. 5.67b ci fornisce una equazione approssimata per  $x_0$ :

$$x_0 \sim 6.3 \cdot 10^{12} T^{-7/4} \rho^{1/2} [\bar{g}_{\text{ff}}(x_0)]^{1/2} \quad (5.72)$$

Si noti che nell'intervallo  $x_0 \ll x \ll 1$   $I_{\nu}^{\text{MB}} \propto \nu$  invece della legge di Rayleigh-Jeans  $I_{\nu}^{\text{RJ}} \propto \nu^2$ .

L'Equazione 5.70 vale solamente per un mezzo semi-infinito. Nel caso di un mezzo finito bisogna determinare il valore di  $x_{\text{t}}$ . Se  $x_{\text{t}} < x_0$  l'emissione è di corpo nero per  $x < x_{\text{t}}$  ed un bremsstrahlung otticamente sottile per  $x > x_{\text{t}}$  (lo scattering non è mai importante). Per  $x_0 < x_{\text{t}} < 1$  l'emissione è correttamente descritta da (5.70) per  $x < x_{\text{t}}$  e poi diventa bremsstrahlung otticamente sottile per  $x > x_{\text{t}}$ . Per  $x_{\text{t}} > 1$  il mezzo si comporta come se fosse infinito, e (5.70) può essere usata per l'intero spettro.

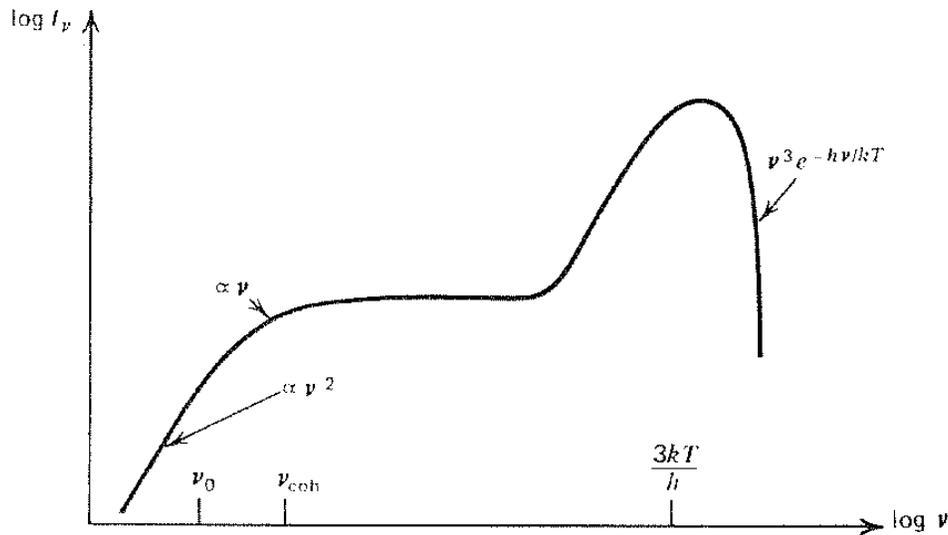


Figura 5.5: Spettro emergente da un mezzo termico, non relativistico caratterizzato da emissione ed assorbimento libero-libero e da scattering Compton inverso saturato. A basse frequenze lo spettro è un corpo nero, poi diventa un corpo nero modificato e ad alte frequenze diventa uno spettro di Wien.

□ **Spettro di Wien:**  $y \gg 1$

Quando  $y \gg 1$ , Compton inverso può essere importante, a seconda che  $x_{\text{coe}} \ll 1$  o  $x_{\text{coe}} \gg 1$ . Nell'ultimo caso Compton inverso può essere trascurato, dato che la maggior parte dei fotoni subisce scattering coerente. Lo spettro avrà in questo caso la forma di un corpo nero modificato. Per  $x_{\text{coe}} \ll 1$ , dalle relazioni (5.67b) e (5.69b), abbiamo

$$x_{\text{coe}} = \left( \frac{mc^2}{4kT} \right)^{1/2} x_0 \quad (5.73)$$

Lo spettro è descritto correttamente dalla (5.70) per  $x \ll x_{\text{coe}}$ , ma per  $x \gtrsim x_{\text{coe}}$  dobbiamo considerare effetti di scattering Compton inverso (si veda Figura 5.5). In questa regione dello spettro, se  $x_{\text{coe}} \ll 1$ , Compton inverso sarà saturato producendo uno spettro di Wien

$$I_\nu^W = \frac{2h\nu^3}{c^2} n = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\alpha} e^{-h\nu/kT} \quad (5.74)$$

dove il fattore  $e^{-\alpha}$  è funzione del tasso di produzione dei fotoni.

Il flusso totale emesso nello spettro (5.74) è

$$F^W(\text{erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-2}) = \pi \int I_\nu^W d\nu = \frac{12\pi e^{-\alpha} (kT)^4}{c^2 h^3} \quad (5.75)$$

mentre l'energia media del fotone è  $\bar{h\nu} = 3kT$ .

#### □ Comptonizzazione non saturata

Consideriamo infine il caso in cui  $y \gg 1$  ma in cui  $x_{\text{coe}} \sim 1$ , cioè mezzi in cui il processo di Compton inverso è importante ma in cui lo spettro non satura allo spettro di Wien. In questo caso è necessaria una analisi dell'equazione di Kompaneets (5.66). Senza entrare nei dettagli è possibile fare vedere come una soluzione di (5.66) in cui abbiamo un input di fotoni "soffici" ha la forma di una legge di potenza

$$\begin{aligned} n &\propto x^m \\ m(m+3) &= \frac{4}{y} \\ m &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4}{y}} \end{aligned} \quad (5.76)$$

e dove  $y$  è il parametro di Comptonizzazione definito in (5.61). La radice positiva è appropriata se  $y \gg 1$ ; per  $y \ll 1$  è invece appropriata la radice negativa. Per  $y \sim 1$  bisogna prendere una combinazione lineare delle due soluzioni e non esiste una soluzione a legge di potenza. Dalla misura della pendenza dello spettro di Comptonizzazione non saturata con fotoni "soffici" si possono determinare sia la temperatura degli elettroni che la profondità ottica di scattering della sorgente.

Lo spettro da Comptonizzazione non saturata è mostrato in Figura 5.6. L'intensità emergente nel regime di legge di potenza soddisfa la

$$I_\nu \sim I_{\nu_s} \left( \frac{\nu}{\nu_s} \right)^{3+m} \quad (5.77)$$

Lo spettro è molto sensibile alle variazioni in  $y$ . L'energia iniziale dei fotoni è significativamente amplificata per  $m \geq -4$ , cioè se  $y \geq 1$ , analogamente a quanto abbiamo visto nel caso relativistico.

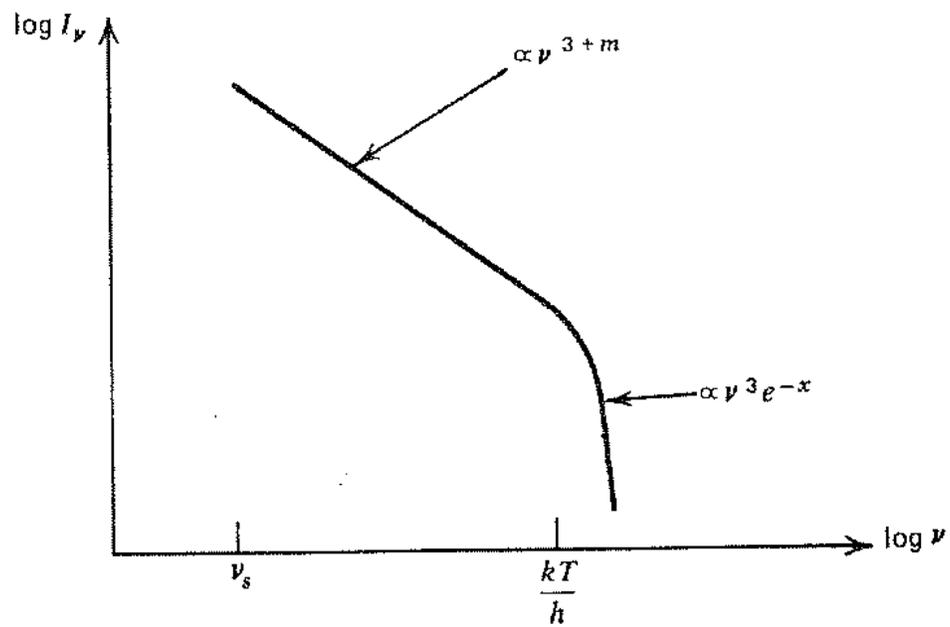


Figura 5.6: Spettro prodotto da Comptonizzazione non saturata di fotoni di bassa energia su elettroni termici.

# Capitolo 6

## Tecniche di Osservazione

### 6.1 Introduzione

Gli esperimenti per lo studio dell'emissione nella banda X da parte di oggetti celesti devono confrontarsi con due realtà: (i) a causa dell'effetto di schermo della nostra atmosfera, gli strumenti devono essere portati a grandi altezze (vedi Figura 6.1); (ii) i fotoni X possiedono una tale energia che la loro interazione con la materia produce un effetto osservabile.

In generale i dati dell'astronomia X saranno nella forma di numero di eventi (conteggi) misurati in un certo intervallo temporale, o il tempo di arrivo per un certo evento. Questi conteggi sono molto piccoli: ad esempio, il flusso della sorgente piú brillante del cielo X, Sco X-1, è circa 100 fotoni  $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ . La seconda sorgente piú brillante, la Nebulosa del Granchio, è soltanto un decimo di questa.

Il fatto che i rivelatori debbono essere portati al di sopra dell'atmosfera, fa sì che vi siano un certo numero di eventi significativi che non appartengono all'emissione della sorgente, ma che fanno da *fondo* e debbono essere discriminati dall'emissione di sorgente: ad esempio raggi X e  $\gamma$  dovuti alla interazione dei raggi cosmici con la nostra atmosfera.

Per cercare di limitare questa sorgente di fondo sono stati studiati dispositivi di collimazione meccanica, in modo da limitare il campo di vista del rivelatore, o tecniche di anti-coincidenza. Per basse energie sono inoltre a disposizione anche sistemi di focalizzazione, in modo da aumentare il rapporto segnale/rumore.

### 6.2 Rivelatori per astronomia X

Il principio di funzionamento di una classe di rivelatori di raggi X utilizzati in astronomia si basa sull'assorbimento (scattering) di fotoni incidenti provenienti dal sorgenti celesti con il materiale del rivelatore. Questi raggi X generano un elettrone che trasporta una qualche frazione dell'energia del fotone. Questo elettrone produce elettroni secondari che possono essere rivelati come una corrente, oppure luce visibile che può essere rivelata in un fotomoltiplicatore.

I contatori proporzionali sono usati principalmente per rivelare energia al di sotto dei 20 keV,

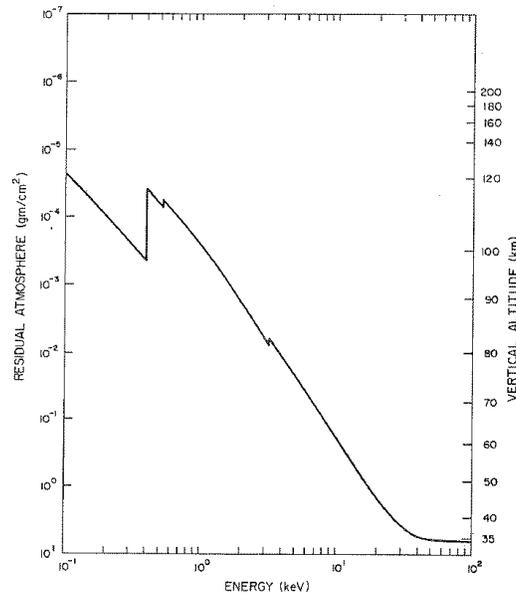


Figura 6.1: L'atmosfera terrestre attenua raggi X incidenti per assorbimento fotoelettrico e, al di sopra dei 30 keV, per scattering Compton. Questa curva rappresenta una profondità ottica unitaria in funzione dell'energia. La scala sulla sinistra indica la densità colonnare atmosferica sulla verticale che produce l'attenuazione di una profondità ottica, mentre sulla destra la scala indica l'altezza minima richiesta per produrre almeno questa attenuazione. Le discontinuità sono dovute agli *edges* di Azoto, Ossigeno ed Argon.

mentre contatori a scintillazione vengono usati al di sopra dei 10 keV. Possono inoltre essere utilizzati rivelatori a semiconduttore.

Vediamo ora di descrivere in dettaglio l'interazione tra i raggi X incidenti ed il materiale che compone il rivelatore. Fino ad una certa energia e a seconda del numero atomico  $Z$  del materiale avremo che il processo principale per cui il fotone X viene assorbito è *assorbimento fotoelettrico*. In questo processo si ha l'espulsione dell'elettrone piú interno che è energeticamente permesso.

L'energia dell'elettrone sarà  $E_x - E_s$  dove  $E_x$  è l'energia del fotone X incidente ed  $E_s$  l'energia della shell. Ad esempio, nell'Alluminio  $E_s = 1.56$  keV per elettroni della shell  $K$ . Ovviamente la transizione avverrà solamente se  $E_x \geq E_s$ . Se il fotone X possiede una energia leggermente inferiore non riuscirà ad estrarre l'elettrone dalla shell  $K$ , ma uno dalla shell  $L$  e quindi vi sarà una discontinuità (*edge*) nella sezione d'urto di assorbimento, come mostrato in Figura 6.2. Il salto è di circa un fattore 10. A parte queste discontinuità, la sezione d'urto ha un andamento  $\propto E^{-3} Z^4$ .

A seguito dell'emissione dell'elettrone, l'atomo si trova in uno stato eccitato e può liberare l'eccesso di energia  $E_s$  in due modi: può rilasciare una cascata di fotoni, uno dei quali potrebbe essere nella banda X con una energia vicina a  $E_s$ . In questo caso si parla di fluorescenza. Alternativamente, può emettere un secondo elettrone di energia prossima a  $E_s$  dovuto alla ri-

distribuzione degli elettroni nei livelli atomici (effetto Auger). Il rapporto delle probabilità dei due tipi di processi (fluorescenza e Auger) va come  $Z^{-4}$ , quindi per elementi leggeri prevarrà l'effetto Auger mentre per quelli pesanti prevarrà la fluorescenza. Nel caso dell'Alluminio, la probabilità che venga emesso un elettrone di Auger a causa dell'assorbimento di un fotone X di energia maggiore di 1.56 keV è il 96%.

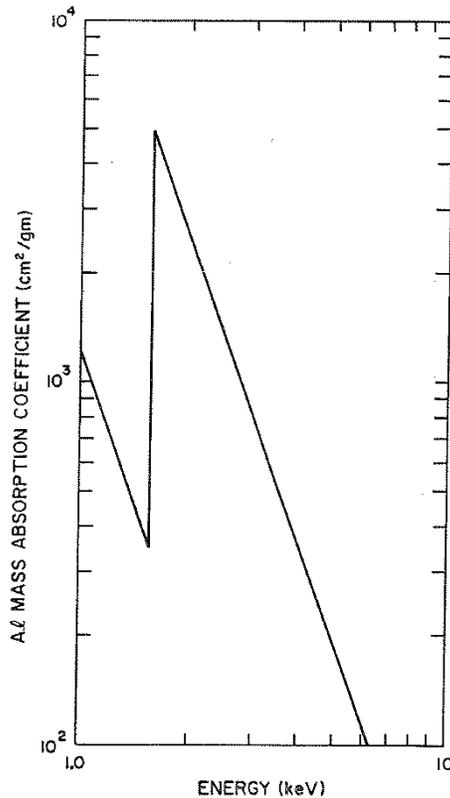


Figura 6.2: Coefficiente di assorbimento per unità di massa per l'Alluminio. Nell'intervallo di energia mostrato, tutto l'assorbimento è dovuto ad effetto fotoelettrico. L'assorbimento mostra una discontinuità a 1.56 keV perché un fotone X di maggiore energia può espellere un elettrone della shell  $K$ .

di materiale di densità colonnare  $x \text{ g cm}^{-2}$  e  $\mu$  è il coefficiente di assorbimento per unità di massa, in unità di  $\text{cm}^2 \text{ g}^{-1}$ .

La quantità  $\mu$  è legata alla sezione d'urto attraverso la relazione

$$\mu \equiv \frac{\sigma N_0}{A_x} \quad \text{cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (6.2)$$

Esiste però una probabilità significativa che il fotone X venga scatterato dagli elettroni atomici piuttosto che essere assorbito. Come abbiamo visto, per fotoni di bassa energia questo non è altro che scattering Thomson, la cui sezione d'urto (vedi Eq. 2.2) è  $6.7 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ , indipendente dall'energia. Ad alta energia lo scattering risulta in una variazione della frequenza del fotone (effetto Compton) e trasferimento di energia all'elettrone che funge da diffusore. Come abbiamo visto, la condizione affinché vi sia scattering Compton è che l'energia del fotone sia minore di  $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ . Per un atomo contenente  $Z$  elettroni, la sezione d'urto sarà  $Z$  volte maggiore. In riferimento alla Figura 6.1, scattering Compton è responsabile dell'assorbimento al di sopra dei 40 keV.

Il terzo processo di assorbimento di raggi X è la creazione di coppie, che non può avvenire al di sotto di 1.02 MeV, due volte l'energia a riposo dell'elettrone, ed è per questo che non ce ne occuperemo.

Per descrivere l'assorbimento dei fotoni X nel materiale si utilizza la relazione (vedi Eq. 3.13)

$$I = I_0 \exp(-\mu x) \quad (6.1)$$

dove  $I_0$  è il flusso incidente,  $I$  è il flusso rimanente dopo l'attraversamento di una quantità

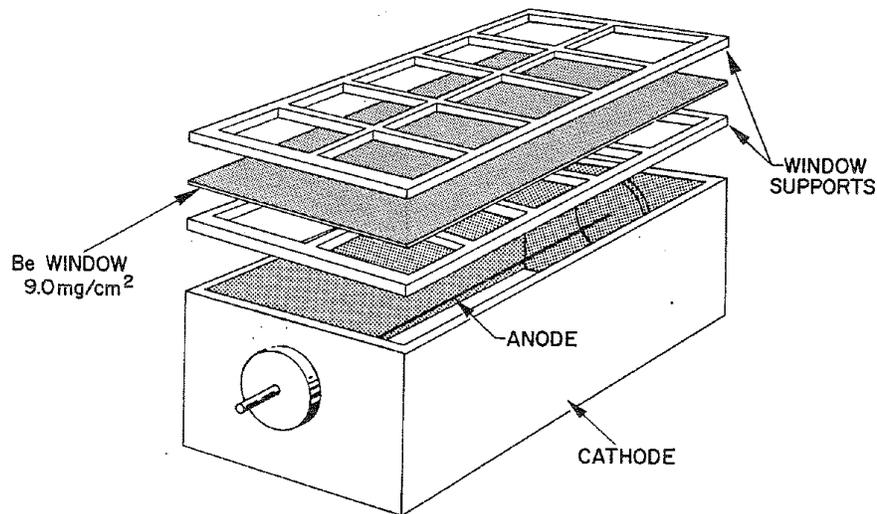


Figura 6.3: Configurazione tipica di un contatore proporzionale. La finestra di Berillio viene cementata in una struttura di supporto a *sandwich* che viene a sua volta saldata ermeticamente sul catodo per preservare l'integrità del gas. L'anodo viene tenuto in tensione da una molla. Un preamplificatore ed un generatore di alta tensione vengono montati il più vicino possibile all'ingresso dell'anodo.

dove  $N_0$  è il numero di Avogadro<sup>1</sup> e  $A_x$  è il peso atomico del materiale. Si noti come sotto certe condizioni la (6.1) possa dare risultati non corretti dato che fotoni non sono necessariamente rimossi dal fascio dalle interazioni con il materiale.

### 6.2.1 Contatori proporzionali

Un contatore proporzionale consiste essenzialmente di un gas e da elettrodi che sono sistemati in maniera tale per cui viene creato un forte gradiente di campo elettrico vicino agli elettrodi positivi che generalmente hanno la forma di fili. Il catodo può anche essere utilizzato come contenitore del gas e struttura principale del rivelatore, e contiene una sottile finestra di entrata per i fotoni X. In Figura 6.3 viene mostrata una configurazione tipica.

Un fotone X che è assorbito nel gas ionizza un atomo, che reagisce espellendo un fotoelettrone, seguito dall'espulsione di un elettrone Auger ed il rilascio di fotoni di fluorescenza. Il foto-elettrone interagirà con il gas dando luogo ad una ulteriore coppia elettrone-ione. Alla fine la sua energia verrà dissipata ed una nube di coppie elettrone-ione si formerà lungo il suo percorso. Anche gli elettroni Auger interagiranno con il gas ed anche loro formeranno coppie elettrone-ione. Se i fotoni di fluorescenza non possono uscire dal contatore, allora il numero totale di coppie elettrone-ione sarà in media proporzionale all'energia del fotone incidente.

<sup>1</sup>Numero di atomi contenuti in un grammo-atomo, che è la quantità di sostanza chimicamente semplice la cui massa è uguale al suo peso atomico.  $N_0 = 6.023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

Gli elettroni secondari, sotto l'influenza del forte campo elettrico, si sposteranno verso l'anodo nelle cui vicinanze vi sarà una ulteriore ionizzazione del gas, con la conseguente formazione di ulteriori elettroni secondari. Il numero di elettroni continua perciò ad aumentare fino a quando non sono raccolti sull'anodo. Il moto degli elettroni verso il filo centrale produce, per induzione, il segnale misurato sul catodo. In questo modo si riesce ad ottenere un guadagno tra  $10^3$  a  $10^5$ . Per avere il massimo guadagno si utilizzano gas nobili, in modo da ridurre al massimo meccanismi di perdita di energia non dovuti a ionizzazione, quali eccitazione di stati rotazionali o vibrazionali molecolari. Un gas nobile *puro* è però un contatore instabile, dato che piccolissime tracce di impurità possono dominare il comportamento del gas. Inoltre un gas nobile è trasparente alla radiazione ultravioletta emessa dagli atomi eccitati del gas nobile che hanno energia sufficiente per espellere elettroni dal catodo ed iniziare una nuova sequenza di moltiplicazione. Nel processo di moltiplicazione degli elettroni gli atomi di un gas nobile potrebbero essere eccitati in stati metastabili di lunga vita media, i quali si dis-eccitano con collisioni con le pareti del contatore. Per assorbire questa radiazione ultravioletta e dis-eccitare gli stati metastabili viene aggiunto al gas nobile un gas poliatomico, come metano, propano, alcol. Questo gas viene chiamato *quenching gas* (*smorzatore*). L'introduzione del quenching gas non introduce cascate di elettroni, dato che il libero cammino medio per questi eventi è piccolo.

L'efficienza di rivelazione di un contatore è la probabilità che un fotone non venga assorbito nella finestra e sia così assorbito nel gas. Dato che la sezione d'urto per effetto fotoelettrico, nella banda al di sotto del 20 keV, è proporzionale a  $Z^4 E^{-8/3}$ , è importante avere **una finestra sottile di basso  $Z$  ed un gas spesso di alto  $Z$** . Per energie nella banda 1–10 keV viene utilizzato il Berillio come elemento costituente la finestra. Per energie più basse bisogna usare altri materiali, per poter rendere le finestre più sottili, come formvar, polipropilene. Il problema è però che questi film sottili non sono in grado di trattenere il gas, quindi in questi casi è necessaria una riserva di gas.

L'efficienza di un contatore proporzionale nella rivelazione di un fotone X di energia  $E$  è

$$\epsilon(E) = \exp\left(-\frac{t_w}{\lambda_w}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\lambda_g}\right)\right] \quad (6.3)$$

dove  $t_w$  e  $t_g$  sono lo spessore della finestra e del gas, e  $\lambda_w$  e  $\lambda_g$  sono il libero cammino medio di assorbimento nella finestra e nel gas all'energia  $E$ .

La carica che viene raccolta all'anodo è proporzionale al numero iniziale di elettroni secondari ed al guadagno, e può essere usata per misurare l'energia del fotone incidente. A causa però della possibile fuga della radiazione di fluorescenza può esserci una diminuzione della carica.

## 6.2.2 Contatori proporzionali a scintillazione

In questo tipo di rivelatori la rivelazione avviene misurando la radiazione ultravioletta prodotta dalla nube di elettroni nel suo spostamento verso l'anodo. In questo caso **non** viene utilizzato un quenching gas ma solamente un gas nobile. I fotoni UV vengono rivelati da fotomoltiplicatori. La quantità di luce non è solo proporzionale all'energia del fotone incidente, ma anche alla profondità che il fotone X è riuscito a raggiungere prima di essere foto-assorbito. Questo

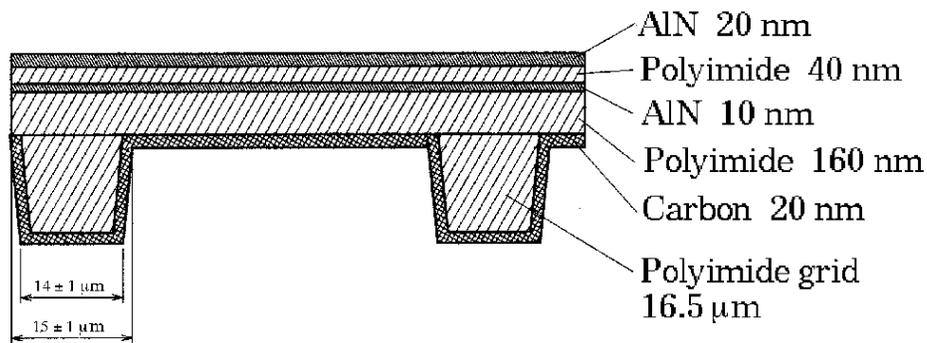


Figura 6.4: Sezione della finestra di ingresso del rivelatore LECS a bordo del satellite BeppoSAX.

spessore viene determinato misurando la durata della luce di scintillazione e prende il nome di *burstlength*.

I contatori proporzionali a bordo di BeppoSAX erano di questo tipo: tre avevano una finestra di Berillio dello spessore di  $50\mu\text{m}$  (MECS) ed un intervallo operativo tra 2 e 10 keV. Il quarto rivelatore, LECS, aveva una finestra sottile la cui composizione è mostrata in Figura 6.4 e che permetteva l'allargamento dell'intervallo operativo a 0.1 keV. Tutti e quattro i rivelatori usavano lo Xenon come gas di rivelazione.

### 6.2.3 Tecniche di reiezione del fondo

Esiste un numero sostanziale di eventi di fondo non dovuti a raggi X che limitano la sensibilità delle osservazioni di sorgenti cosmiche. La maggior parte di questo fondo è dovuto a raggi cosmici che incidono la parte alta della nostra atmosfera ad un tasso di 0.2–0.5 particelle per  $\text{cm}^2$  per secondo, a seconda della latitudine geomagnetica. Ogni raggio cosmico che penetra attraverso il contatore X può essere eliminato con una tecnica di anti-coincidenza. Purtroppo però questo non elimina il fondo dovuto a raggi  $\gamma$  prodotti dai raggi cosmici sia nell'atmosfera che nel veicolo che trasporta l'esperimento. L'efficienza di conversione di questi fotoni  $\gamma$  nel gas del contatore è molto piccola, dato che la loro energia è tale che lo scattering Compton è l'effetto dominante. Nel caso di un contatore riempito di Argon ( $\sigma_C = 0.05 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$  ad 1 MeV) e di spessore  $t_g = 6 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-2}$  la probabilità di conversione è di solo  $3 \cdot 10^{-4}$ . Però verranno prodotti un gran numero di elettroni nelle pareti e nella struttura di supporto del contatore, e questi elettroni avranno una energia tale da essere rivelati.

Un'altra fonte importante di radiazione di fondo è la presenza di particelle di bassa energia, principalmente elettroni, che provengono dal vento solare e sono intrappolati nel campo magnetico terrestre (le cosiddette fasce di radiazione). Vi sono inoltre zone particolari in cui particelle vengono intrappolate: le zone aurorali ai poli magnetici e l'anomalia sud atlantica (SAA) al largo delle coste orientali del sudamerica.

Una tecnica, a parte l'uso di anti-coincidenze, che è molto efficiente nel reiettare eventi di fondo è la *discriminazione di forma*, il cui principio di funzionamento è il seguente: un fotone X convertito nel gas è essenzialmente un evento puntiforme; gli elettroni secondari prodotti in quel punto si muovono verso l'anodo senza una dispersione significativa e quindi il tempo di salita del segnale sarà molto breve, dell'ordine di 10–100 ns a seconda del gas utilizzato. Un elettrone che invece proviene da raggi cosmici o fotoni  $\gamma$  secondari lascerà nel contatore una traccia lunga. Gli elettroni secondari si muoveranno verso l'anodo da tutti i punti lungo la traccia così che il tempo di transito dalla traccia all'anodo non è unico ed il corrispondente tempo di salita del segnale sarà molto più lungo di quello di un evento X reale. Questa differenza in tempi di salita viene determinata dall'elettronica.

### 6.2.4 Rivelatori a scintillazione

Cristalli scintillatori sono dei sali alcalini che hanno la proprietà di emettere luce visibile quando sono colpiti da fotoni X. I processi di assorbimento fotoelettrico e scattering Compton convertono l'energia trasportata dal fotone X in energia cinetica di uno o più elettroni, come nel caso dei contatori proporzionali. Nel cristallo però ogni elettrone di alta energia eccita molti elettroni dalla banda di valenza alla banda di conduzione. Per fare in modo che la transizione avvenga nella banda della luce visibile si introducono delle impurità (dette anche attivatori) che catturano alcuni di questi elettroni.

Affinché un cristallo sia di qualche uso pratico è necessario che sia trasparente alla sua stessa radiazione. Il cristallo che ha avuta la massima applicazione in campo astronomico è lo Ioduro di Sodio in cui l'attivatore sono tracce di Tallio, NaI(Tl), in cui circa 8% della energia dell'elettrone originale è convertita in fotoni con lunghezze d'onda tra 4200 e 4350 Å.

Una faccia del cristallo deve essere accoppiata otticamente ad un tubo fotomoltiplicatore o direttamente, o attraverso una guida di luce. Il resto della superficie viene ricoperta con una vernice riflettente per ottimizzare la collezione di luce al fototubo. Il guadagno nella parte di moltiplicazione elettronica varia da  $10^5$  a  $10^8$ . L'importanza dei rivelatori a scintillazione è la loro maggiore efficienza rispetto a quella dei contatori proporzionali al di sopra di 10 keV. Ad esempio, 50 mm di NaI hanno una efficienza praticamente unitaria fino a 100 keV, mentre per avere la stessa efficienza in un contatore proporzionale sarebbero necessari 4 m di Xenon o 200 m di Argon (ad 1 atm). Questo è dovuto alla maggiore numero e densità del cristallo rispetto al gas.

Dato che l'efficienza di conversione dell'energia cinetica in luce,  $\sim 1$  fotone per 400–500 eV, è molto minore dei  $\sim 30$  eV per ione dei contatori proporzionali, la risoluzione energetica (definita come  $R(E) = \Delta E/E$ , dove  $\Delta E$  è la Full Width at Half Maximum (FWHM) di una riga rivelata all'energia  $E$ ) degli scintillatori è minore di quella dei proporzionali: per il PDS, lo strumento di alta energia (15–100 keV) a bordo del satellite BeppoSAX, essa è  $R(E) = 0.15 \sqrt{60/E}$  dove  $E$  è espressa in keV.

Il limite pratico di utilizzo per ogni rivelatore è definito dall'energia a cui la sezione d'urto per effetto fotoelettrico diventa minore di quello per scattering Compton (a causa della complessità dello studio delle perdite di energia parziali. Nel caso dei cristalli di NaI e CsI questo limite è

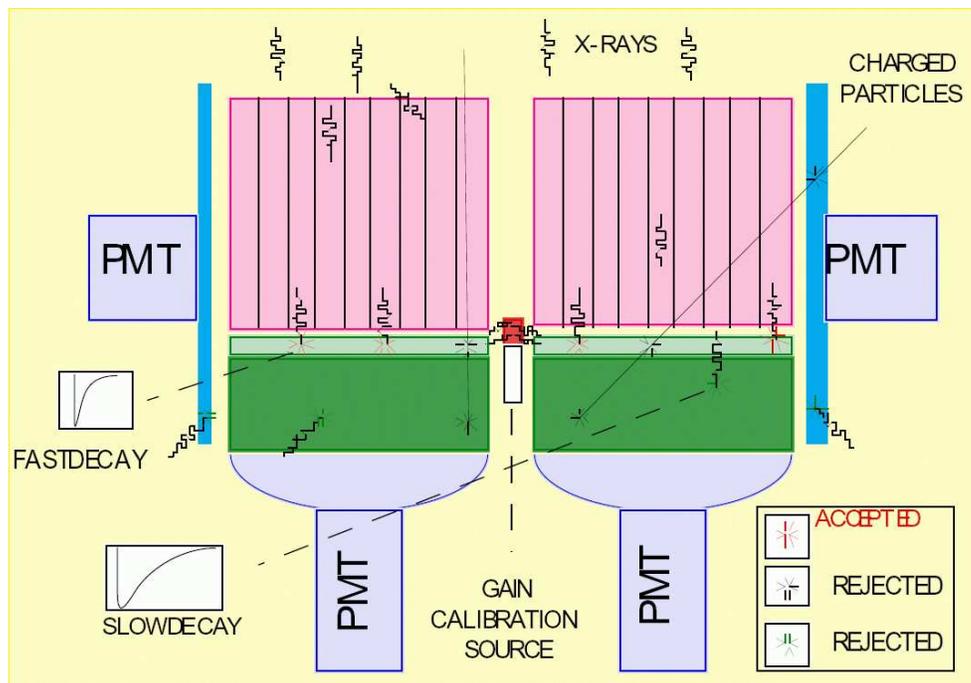


Figura 6.5: Funzionamento dell'anticoincidenza del rivelatore PDS a bordo di BeppoSAX. Il rivelatore è formato da un phoswich di due cristalli: 3 mm di NaI(Tl) che funge da rivelatore vero e proprio, e 50 mm di CsI(Na) che funge da schermo attivo.

$\sim 300$  keV (Si veda Tabella 7.1). Il limite di utilizzo a bassa energia è invece determinato dal rumore nel fotomoltiplicatore, che diventa importante nell'intervallo 5–10 keV.

La più importante sorgente di fondo per gli scintillatori proviene dai raggi  $\gamma$  prodotti localmente o dall'atmosfera. Circondare il rivelatore con uno schermo **passivo** di materiale pesante, come ad esempio Piombo, ha il risultato opposto di **aumentare** il fondo, a causa dell'interazione dei raggi  $\gamma$  con lo schermo. La soluzione è quella di circondare il rivelatore con schermi **attivi**. A questo scopo viene utilizzato CsI che è più denso del NaI e può essere lavorato più facilmente. Infine, una sorgente di fondo sono i protoni che si trovano nella SAA. L'interazione di questi protoni con il materiale del rivelatore provoca l'espulsione di neutroni di energia  $\sim$  MeV, che vengono catturati dai cristalli producendo nuclei radioattivi, quali  $I^{128}$  e  $Cs^{134}$ , i cui elettroni di decadimento vengono interpretati come prodotti da assorbimento fotoelettrico.

In Figura 6.5 viene mostrato la geometria di una delle quattro unità PHOSWICH (acronimo di PHOSphor sandWICH) dell'esperimento di alta energia PDS a bordo di BeppoSAX. Gli eventi rivelati in ogni phoswich possono essere suddivisi in tre classi: (i) eventi che depositano energia solamente nel cristallo NaI (eventi "buoni"); (ii) eventi che depositano energia solamente nel cristallo CsI; (iii) eventi che depositano energia sia in NaI che in CsI. Gli eventi nella prima classe vengono accettati, mentre quelli delle altre due sono rigettati. La reiezione viene compiuta usando i diversi tempi di decadimento delle scintillazioni prodotte nei due materiali ( $0.25 \mu s$  in NaI e  $0.6 \mu s$  in CsI).

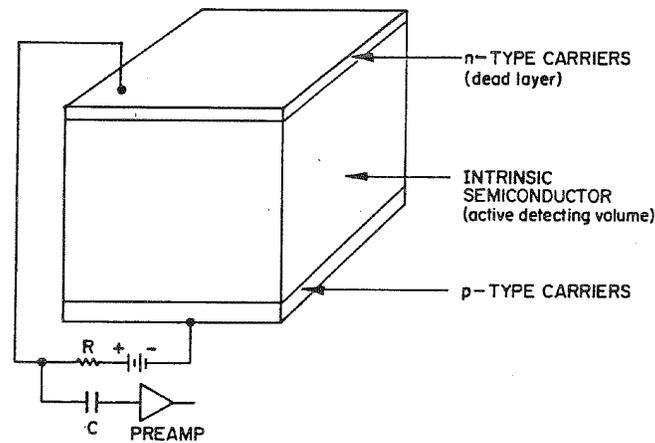


Figura 6.6: Diagramma di funzionamento di un rivelatore a semiconduttore.

### 6.2.5 Rivelatori a semiconduttore

Rivelatori a stato solido di Silicio o Germanio possono dare risoluzione energetica molto migliori di quelle di contatori proporzionali o a scintillazione. Il loro principio di funzionamento è il seguente (vedi Figura 6.6): il cristallo viene drogato per controllare la densità dei portatori di carica. I contatti vengono effettuati con due strati sottili di portatori di carica negativa (tipo- $n$ ) e di buche (tipo- $p$ ). La regione possiede densità di carica positiva e negativa uguale e quindi riesce a sostenere il campo elettrico attraverso di essa. Interazioni nel cristallo, dovute al fotone X incidente, producono elettroni che possono essere raccolti come impulsi di carica che, a differenza dei contatori proporzionali o dei fototubi, **non sono amplificati**.

La risoluzione energetica di questo tipo di rivelatore è la migliore attualmente possibile (2.3 keV a 1.3 MeV per lo strumento SPI a bordo del satellite INTEGRAL). Lo svantaggio da un punto di vista sperimentale è che questo tipo di rivelatore deve essere raffreddato per evitare l'eccitazione termica degli elettroni nella banda di conduzione.

### 6.2.6 Microcalorimetri

In un microcalorimetro, la determinazione dell'energia del fotone X incidente avviene misurando la variazione di temperatura associata al suo assorbimento.

Schematicamente il suo funzionamento è illustrato nella Figura 6.7: esso consiste in un assorbitore (HgTe o Si), di capacità termica  $C$  che viene collegato ad una temperatura di riferimento (*heat sink*), dell'ordine di qualche centesimo di grado K, attraverso un collegamento termico di conduttanza  $G$ . L'assorbimento di un fotone di energia  $E$  nell'assorbitore crea una variazione di temperatura  $\Delta T$  data da

$$\Delta T = \frac{E}{C} \quad (6.4)$$

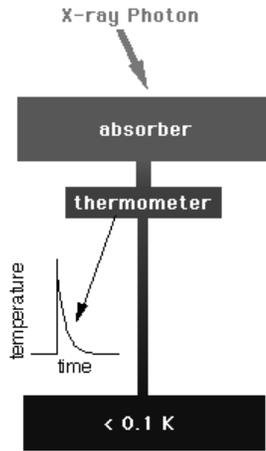


Figura 6.7: Principio operativo di un microcalorimetro.

misurata con un termistore<sup>2</sup> impiantato nell'assorbitore.

L'assorbitore ritornerà alla temperatura di riferimento del *heat sink* con un decadimento esponenziale con costante di tempo data da

$$\tau = \frac{C}{G} \tag{6.5}$$

Il limite sulla risoluzione energetica del rivelatore è determinato dal trasporto caotico di fononi tra il rivelatore ed il bagno termico nella giunzione. Si può fare vedere che il  $\Delta E$  limite che si può ottenere con un microcalorimetro è

$$\Delta E = 2.35 \eta \sqrt{C kT^2} \tag{6.6}$$

e la variabile  $\eta$  dipende dal termometro utilizzato. Nel caso del rivelatore XRS che volerà a bordo del satellite giapponese ASTRO-E2 si ha  $\eta = 2$ .

### 6.3 Collimatori meccanici

La funzione di un collimatore in astronomia X è quella di limitare l'angolo solido di cielo visto dal rivelatore. Il piú semplice tipo di collimatore consiste semplicemente da una scatola o un tubo aperto da entrambe le parti e posizionato sopra il rivelatore (si veda Figura 6.8). L'angolo solido di cielo che sarà osservabile sarà circa  $a \times b/h^2$ ; fotoni che provengono da regioni al di fuori del campo di vista colpiranno le pareti del collimatore e verranno assorbiti. Il collimatore è caratterizzato da un asse centrale  $e$ , nel caso mostrato in Figura 6.8 la radiazione verrà trasmessa all'interno degli angoli  $\pm a/h$  e  $\pm b/h$  attorno all'asse centrale. La funzione di trasmissione  $f(\theta - \theta_0)$  (e equivalentemente la  $f(\phi - \phi_0)$ ) del collimatore avrà una forma triangolare

$$f(\theta - \theta_0) = \begin{cases} 1 - \frac{|\theta - \theta_0|}{\theta_{1/2}} & \text{per } |\theta - \theta_0| < \theta_{1/2} \\ 0 & \text{per } |\theta - \theta_0| > \theta_{1/2} \end{cases} \tag{6.7}$$

dove  $\theta_{1/2}$  (e  $\phi_{1/2}$ ) rappresenta l'angolo per cui la risposta del collimatore diminuisce del 50%. Nel nostro caso saranno  $a/h$  e  $b/h$  nelle due direzioni. In Figura 6.9 mostriamo la funzione di trasmissione dei collimatori dell'esperimento PDS a bordo di BeppoSAX.

I collimatori meccanici sono stati costruiti con varie tecniche, ma i requisiti importanti che devono essere soddisfatti sono (i) minimo spessore possibile delle pareti in modo da ottenere la

<sup>2</sup>Un termistore è un dispositivo che cambia significativamente la sua resistenza con piccole variazioni di temperatura.

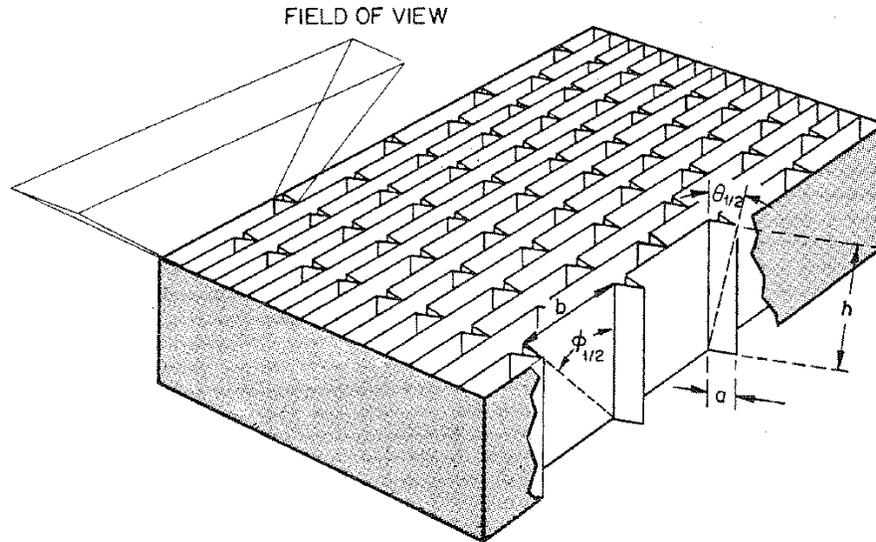


Figura 6.8: Un semplice collimatore formato da tubi rettangolari di altezza  $h$  e sezione  $a \times b$ . I raggi X che colpiscono le pareti dei tubi non possono raggiungere il rivelatore. La risposta all'interno il campo di vista avrà una forma triangolare in ognuna delle due direzioni ortogonali. Gli angoli per cui si ha solamente metà intensità trasmessa sono determinati dalla geometria:  $\tan \theta_{1/2} = a/h$  e  $\tan \phi_{1/2} = b/h$ .

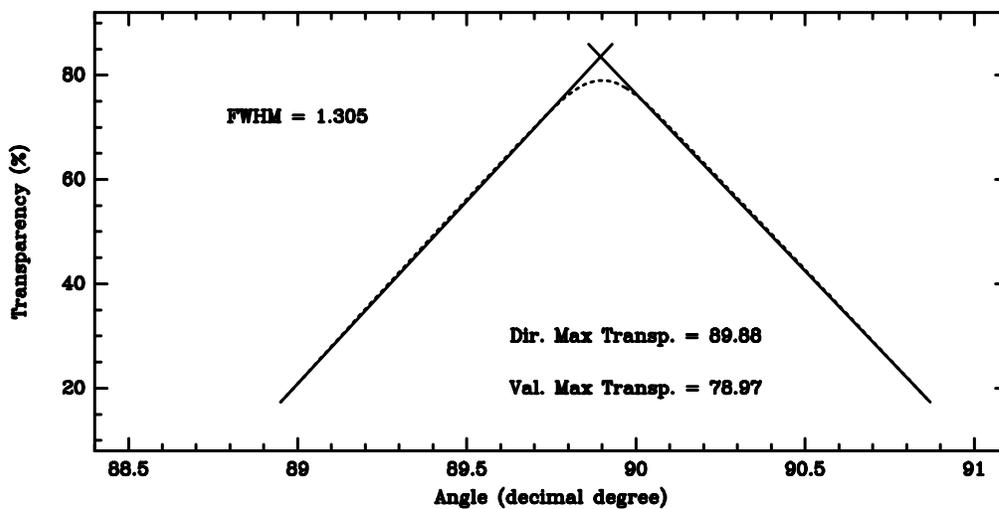


Figura 6.9: Funzione di trasmissione dei collimatori dell'esperimento di alta energia (15–200 keV) PDS a bordo del satellite BeppoSAX. Questi collimatori definiscono un campo di vista esagonale di  $1.3^\circ$  (FWHM).

massima apertura possibile; (ii) adeguato spessore delle pareti in modo da poter fermare fotoni X della massima energia possibile. Dato che questi due requisiti sono in contraddizione tra loro è necessario trovare il giusto compromesso.

Non entreremo nei dettagli costruttivi, ma vogliamo evidenziare come la scelta del materiale che costituisce un collimatore è importante. Infatti bisogna evitare che i fotoni X interagiscano con questo materiale e si venga a produrre radiazione che può essere rivelata dallo strumento. Nel caso dei collimatori dell'esperimento PDS (si veda Figura 6.10) essi erano costituiti da tubi in Tantalio, a sezione esagonale, della lunghezza di 20 cm e dello spessore di 50  $\mu\text{m}$ . La parte interna dei tubi, nei primi 4 cm a partire dalla base, era ricoperta da un bi-strato di Stagno (100  $\mu\text{m}$ ) e Rame (50  $\mu\text{m}$ ). Lo strato di Stagno aveva lo scopo di attenuare l'emissione di fluorescenza dalla shell K del Tantalio ( $K_\alpha = 57.07$  keV;  $K_\beta = 65.56$  keV), mentre lo strato di Rame doveva attenuare l'emissione di fluorescenza dallo Stagno ( $K_\alpha = 25.1$  keV;  $K_\beta = 28.5$  keV). Questa configurazione viene detta *schermatura graduale (grading shielding)*, ed ha permesso la perdita di solo il 20% dell'area efficace del rivelatore.

## 6.4 Tecniche di focalizzazione di raggi X e $\gamma$

Introdurremo ora due tecniche di focalizzazione di raggi X: specchi ad incidenza radente e diffrazione cristallina (Bragg e Laue). L'interazione dei raggi X con la materia avviene essenzialmente attraverso processi incoerenti, con conseguente perdita di informazione sulla radiazione incidente. Quindi la strumentazione utilizzata in astronomia X/ $\gamma$  ha utilizzato processi di interazioni inelastici attraverso maschere codificate o telescopi Compton. Il problema con questi rivelatori risiede nell'elevato flusso del fondo, dato che l'area in cui la radiazione viene raccolta è della stessa dimensione dell'area del rivelatore. Dato che la sensibilità di uno strumento è direttamente proporzionale all'area di raccolta della radiazione, fare strumenti di elevata sensibilità diventa subito impraticabile, visti i problemi di dimensione e, quindi, di massa. E' tuttavia possibile utilizzare l'informazione sulla fase della radiazione incidente se questi subiscono diffrazione di Bragg o di Laue su materiali cristallini di alto  $Z$ . In questo caso si avrà una piccola area di raccolta della radiazione, con una significativa diminuzione del fondo.

### 6.4.1 Ottiche di focalizzazione di raggi X

L'uso di specchi per raggi X che focalizzano un fascio incidente offre due vantaggi significativi rispetto all'uso di collimatori meccanici:

- ① Gli specchi permettono la costruzione di strumenti con risoluzione angolare dell'ordine del second d'arco, con conseguente localizzazione di sorgenti puntiformi con precisione paragonabile;
- ② Dato che l'area di rivelazione è una piccola frazione dell'area di raccolta, il rapporto segnale/rumore è significativamente migliore di quello di uno strumento a collimazione meccanica, in cui il rivelatore è piú grande dell'area di raccolta.

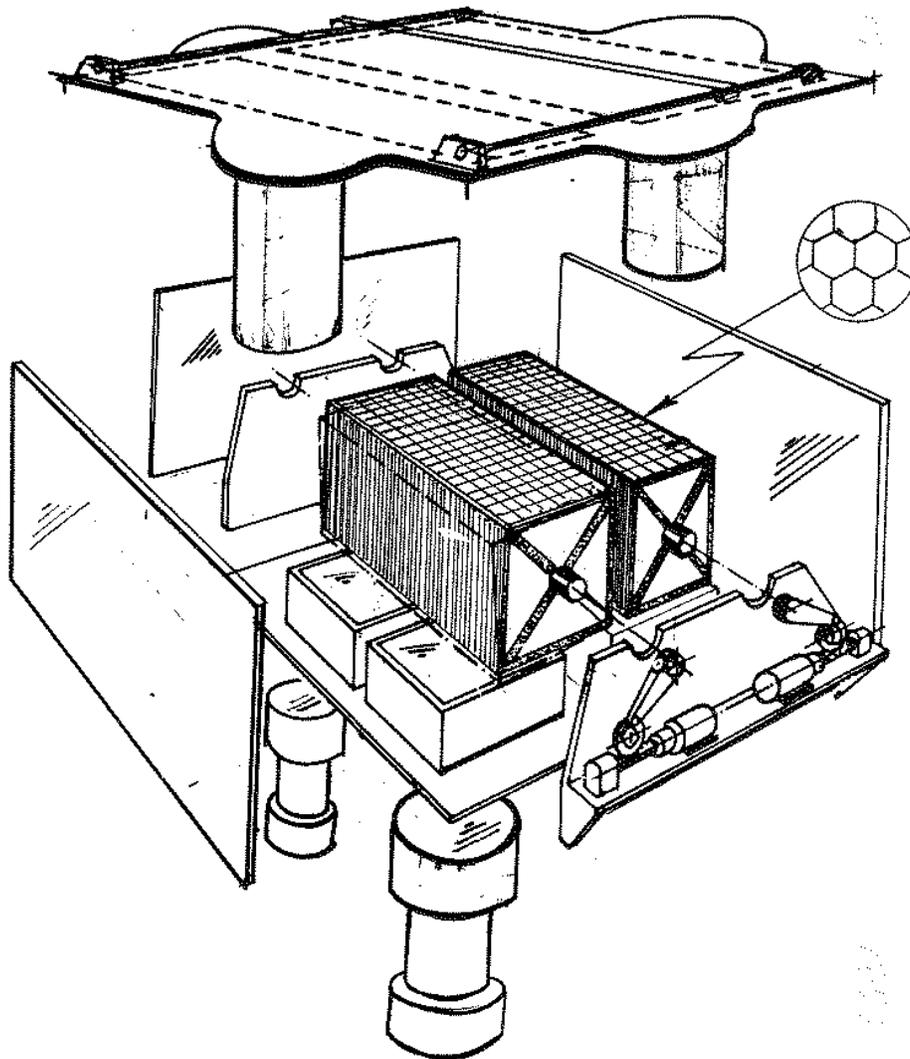


Figura 6.10: Visione esplosa dell'esperimento di alta (15–200 keV) energia PDS a bordo di BeppoSAX. Lo schermo frontale è formato da materiale scintillatore organico (BC-434) dello spessore di 1 mm ed ha lo scopo di intercettare particelle cariche. I fotoni sono rivelati da due fotomoltiplicatori indipendenti. Gli schermi laterali, quattro lastre di CsI(Na) delle dimensioni di  $275 \times 402$  mm e dello spessore di 1 cm, sono viste ognuna da quattro fotomoltiplicatori (nel loro insieme formano il Gamma Ray Burst Monitor GRBM). I due banchi di collimatori meccanici basculanti limitano il campo di vista di quattro unità phoswich. Sono formati da tubi di forma esagonale (per ottimizzare la tassellatura del piano) di Tantalio la cui base è stata ricoperta di un bi-strato di  $100 \mu\text{m}$  di Stagno e  $50 \mu\text{m}$  di Rame per assorbire fotoni di fluorescenza generati dall'interazione con i fotoni X incidenti.

Questi vantaggi permettono un sensibile miglioramento della risoluzione e della sensibilità dello strumento.

Vediamo ora di ricavarci le condizioni affinché un fotone X venga riflesso. Innanzi tutto i fotoni X vengono riflessi da delle superfici per lo stesso motivo per cui la luce visibile viene riflessa.

Nel passaggio attraverso la materia, che possiamo rappresentare come un gran numero di punti, lo scattering dei fotoni X da parte di questi punti si somma in maniera coerente lungo direzioni specifiche. Dato che i fotoni X hanno energie molto maggiori dell'energia di legame degli elettroni atomici, l'indice di rifrazione è leggermente minore dell'unità (a parte vicino alle edge di assorbimento). Allora, applicando la legge di Snell, si ha riflessione solamente fino ad un certo angolo critico di incidenza  $\theta_c$  dato da

$$\cos \theta_c = n \quad (6.8)$$

dove  $\theta_c$  è definito come il complemento dell'angolo fatto con la normale. Se definiamo  $\delta$  tale per cui  $n = 1 - \delta$ , allora

$$\theta_c \simeq \sqrt{2\delta} \quad (6.9)$$

Per energie diverse da quelle degli edge di assorbimento abbiamo che

$$\delta = 2\pi r_0 \lambda^2 N_e \quad (6.10)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della radiazione incidente,  $r_0 = e^2/mc^2$  è il raggio classico dell'elettrone e  $N_e$  è la densità elettronica nel materiale. Dalle (6.9) e (6.10) vediamo che l'angolo critico è direttamente proporzionale alla lunghezza d'onda della radiazione incidente, o inversamente proporzionale alla sua energia. Quindi per riflettere fotoni di alta energia servono angoli di incidenza radente sempre più piccoli. Inoltre, l'angolo critico dipende dalla densità elettronica, che è approssimativamente il numero atomico del materiale che compone la superficie: quindi per avere migliore riflessione saranno preferibili materiali ad alto  $Z$ .

In Figura 6.11 mostriamo le curve (teoriche) di riflessione in funzione dell'energia del fotone incidente per vari materiali. Gli specchi reali sono meno efficienti a causa del livello di politura delle superfici. Come si vede, le curve presentano delle discontinuità vicino alle energie degli edge di assorbimento. Inoltre possiamo vedere come la transizione all'angolo critico non sia netta. Ricapitolando abbiamo che

- La riflettività è molto alta fino all'angolo critico  $\theta_c$ ;
- L'angolo critico  $\theta_c$  diminuisce all'aumentare dell'energia;
- E' preferibile usare materiali ad alto  $Z$  per le superfici;
- A causa della presenza di edge di assorbimento, la riflettività è una funzione complessa dell'energia del fotone incidente.

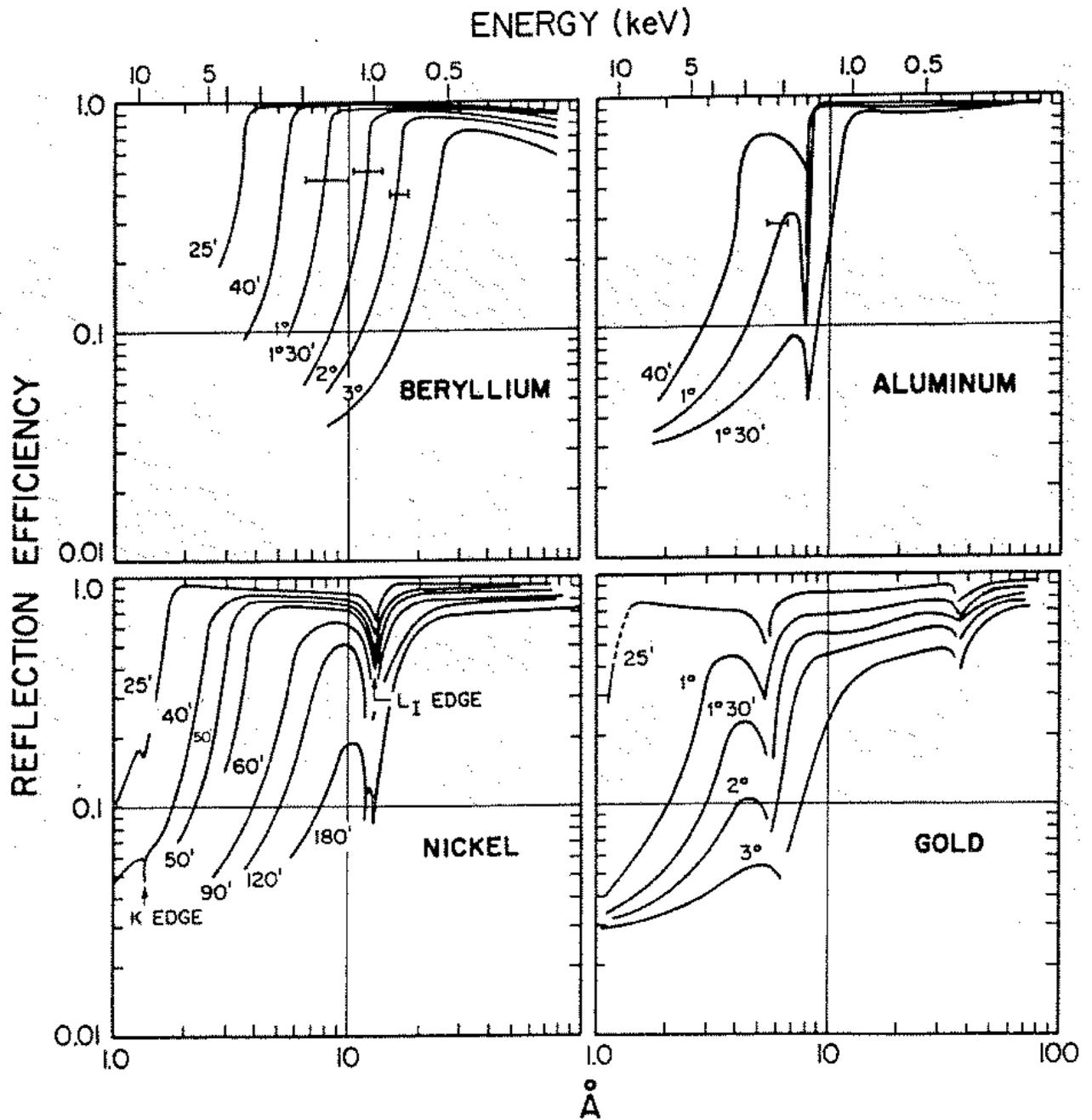


Figura 6.11: Efficienze di riflessione teoriche superficiali in funzione dell'energia (scala superiore) o della lunghezza d'onda (scala inferiore) per diversi angoli di incidenza radente e per diversi materiali: Be ( $Z = 4$ ), Al ( $Z = 13$ ), Ni ( $Z = 28$ ) e Au ( $Z = 79$ ). L'angolo critico per ogni energia può essere definito come quell'angolo a cui la riflettività diminuisce di un certo valore, per esempio 10%. La complessità delle curve è dovuta ad effetti negli edge di assorbimento.

I primi tre punti hanno importanti conseguenze nella costruzione di specchi per raggi X, mentre l'ultimo punto è importante per l'interpretazione di dati spettrali ottenuti dagli strumenti sul piano focale degli specchi.

Per quello che riguarda la forma degli specchi, l'elemento base per focalizzare radiazione parallela è una parabola, come mostrato in Figura 6.12.

Se indichiamo con  $\alpha$  l'angolo medio tra la sezione della parabola e la direzione del fascio incidente, e se questo angolo varia poco lungo la sezione, allora  $\alpha$  definisce l'energia massima che può essere riflessa. La lunghezza focale è data da  $F = R/2\alpha$ , dove  $R$  è la distanza dello specchio dall'asse centrale della parabola. Nel caso di doppia riflessione, ottenuta con due superfici, una parabolica e l'altra iperbolica, la lunghezza focale sarà  $F = R/4\alpha$ .

Per quello che riguarda la risoluzione angolare  $\sigma$  per questo tipo di specchi, da studi effettuati si ha che

$$\sigma = \frac{(\zeta + 1)}{10} \frac{\tan^2 \theta}{\tan \alpha} \left( \frac{L}{F} \right) + 4 \tan \theta \tan^2 \alpha \quad \text{radianti} \quad (6.11)$$

dove  $\zeta$  è il rapporto tra gli angoli di incidenza nel paraboloide e nell'iperboloide,  $L$  è la lunghezza dello specchio e  $\theta$  è l'angolo di incidenza rispetto all'asse ottico. In un caso tipico  $\sigma$  aumenta monotonicamente da 0 a 10'' per  $\theta$  che varia da 0 a 30''.

In Figura 6.13 viene mostrato il principio costruttivo degli specchi per raggi X (si ringrazia il Prof. Citterio, INAF-Osservatorio Astronomico di Brera), mentre in Figura 6.14 sono mostrati gli specchi utilizzati nel satellite per astronomia X XMM-Newton.

## 6.4.2 Diffrazione di Bragg e Laue

Come abbiamo detto, esiste la possibilità di utilizzare l'informazione sulla fase dei fotoni incidenti su cristalli ad alto  $Z$  se questi subiscono diffrazione di Bragg o di Laue. La differenza che esiste tra i due tipi di diffrazione è che nel caso di diffrazione di Bragg i fotoni diffratti lasciano il cristallo attraverso la stessa superficie da cui erano entrati (vengono cioè "riflessi"), mentre nel caso di diffrazione di Laue i fotoni diffratti vengono trasmessi attraverso il cristallo, ed escono da una superficie diversa da quella da cui erano entrati.

Nella Figura 6.15 viene mostrato il principio della diffrazione di Bragg: affinché due fotoni incidenti su due piani cristallini successivi escano in fase è necessario che la differenza di cammino sia tale da contenere un numero intero di lunghezze d'onda, cioè

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (6.12)$$

dove  $d$  è la distanza tra due piani cristallini successivi,  $\theta$  è l'angolo di riflessione (noto anche come angolo di Bragg),  $n$  è un numero intero e  $\lambda$  la lunghezza d'onda della radiazione incidente. Eq. 6.12 è nota come legge di Bragg e si noti come questa dipenda da  $\lambda$  (e quindi dall'energia dei fotoni incidenti) e dalla distanza tra i piani cristallini (e quindi dal materiale).

Nel caso in cui il fotone incidente attraversi il cristallo si parla, come abbiamo detto, di diffrazione di Laue. In questo caso il percorso effettuato da un fotone sarà come quello mostrato in Figura 6.16, in cui l'angolo  $\theta$  soddisfa la legge di Bragg (Eq. 6.12). Il fatto che un raggio possa

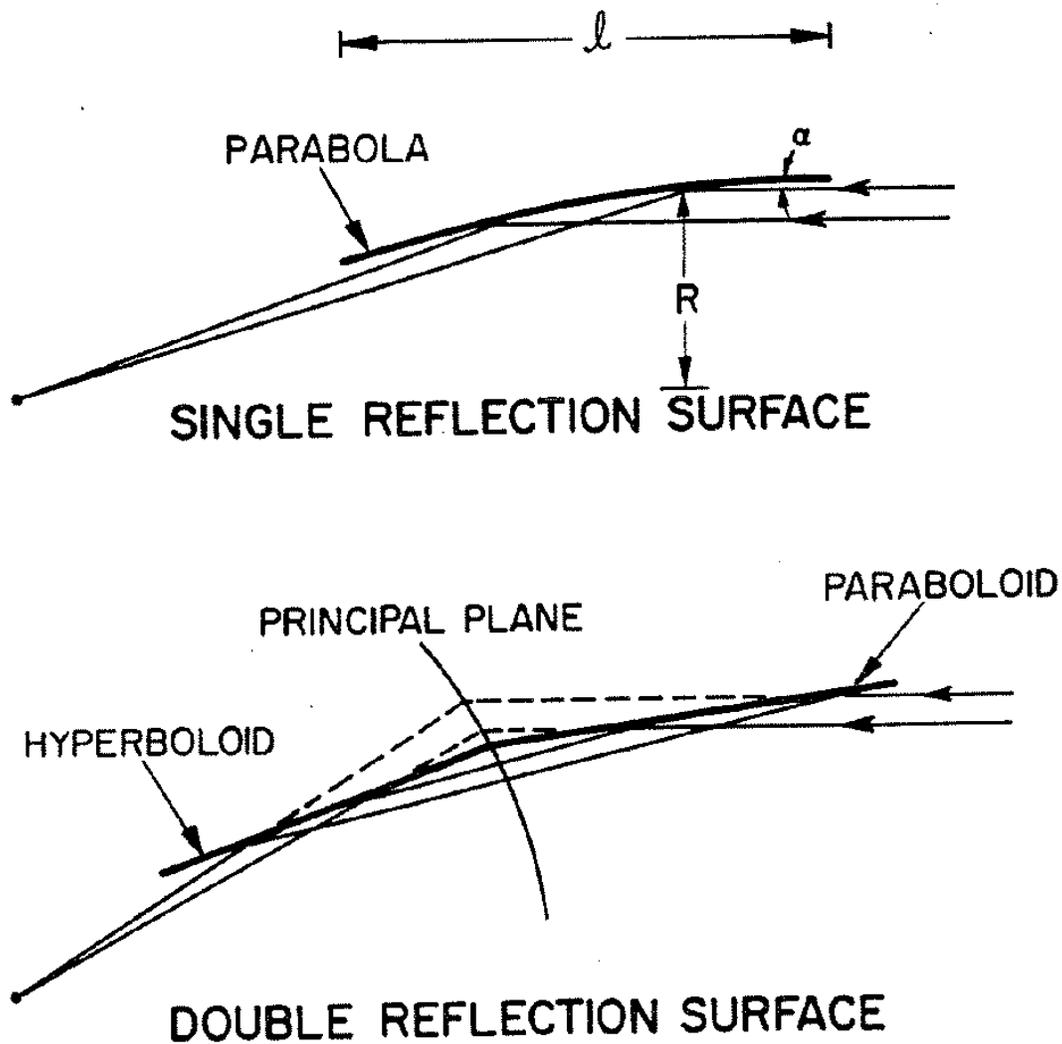


Figura 6.12: Sezioni di superfici riflettenti per specchi di raggi X. Nel caso di sezione parabolica il fotone viene riflesso una sola volta prima di essere focalizzato, mentre nella figura inferiore viene mostrato un profilo formato da un segmento di parabola ed uno di iperbole. In questo caso avvengono due riflessioni.

## PROCESSO DI ELETTROFORMATURA

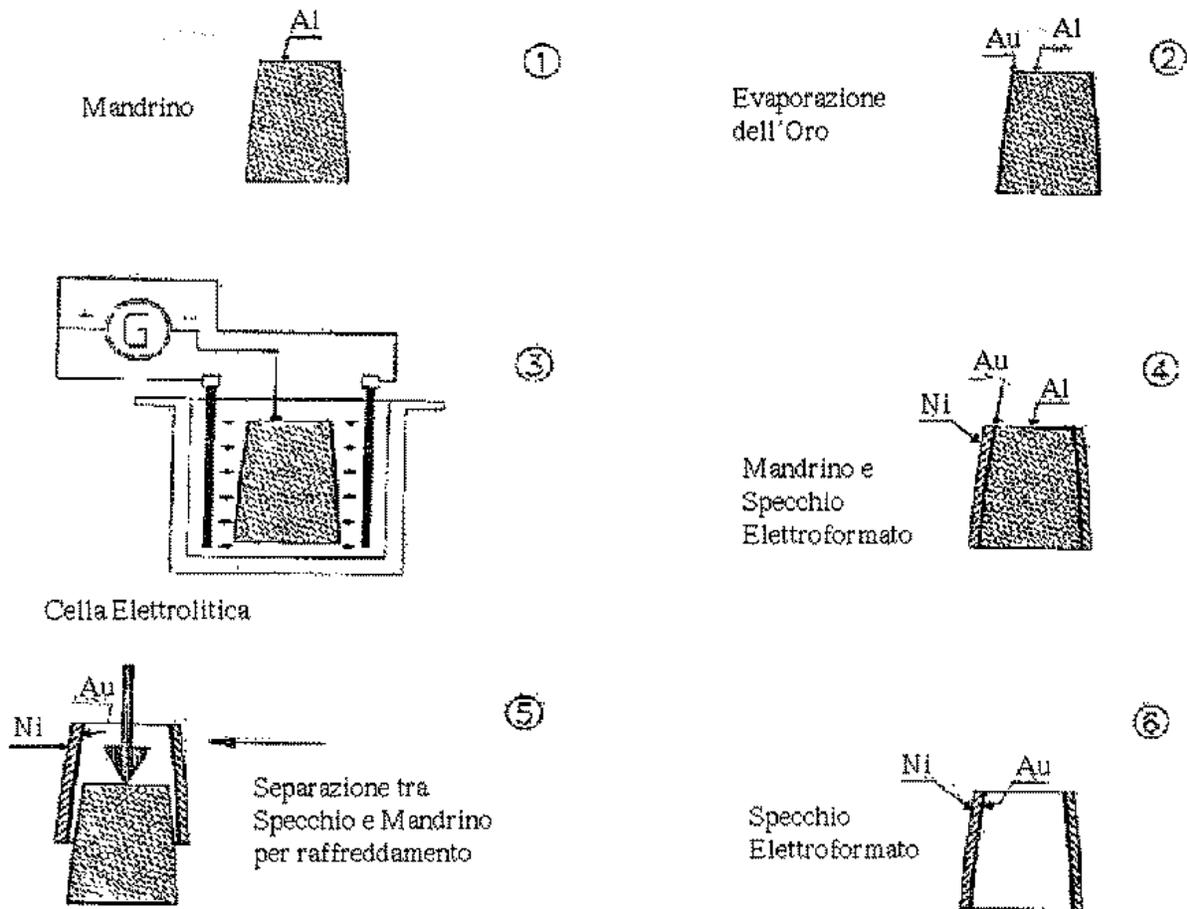


Figura 6.13: Processo costruttivo di uno specchio per raggi X per elettroformatura. ① Un mandrino di Alluminio rivestito di uno strato di Nichel viene sagomato con il profilo parabolico-iperbolico e sottoposto a poltura per raggiungere una microrugosità minore di  $0.05 \mu\text{m}$ . ② Il mandrino viene posto in un crogiolo con dell'Oro. Per bombardamento elettronico l'Oro viene fatto evaporare. L'Oro si deposita sul mandrino formando uno strato di circa  $0.1 \mu\text{m}$ . ③ Lo strato di Oro viene rivestito di un ulteriore strato di Nichel ( $0.1-1.0 \text{ mm}$ ) per bagno elettrolitico. ④ La superficie riflettente dello specchio è formata dallo strato di Oro, mentre lo strato di Nichel funge da supporto meccanico. ⑤ La separazione tra lo specchio ed il mandrino avviene per raffreddamento: il coefficiente di espansione termica del Nichel è circa la metà di quello dell'Alluminio. Inoltre l'adesione tra l'Oro e l'Alluminio è molto piccola, facilitando la separazione. ⑥ Diversi specchi vengono innestati tra loro in modo da aumentare l'area di raccolta.

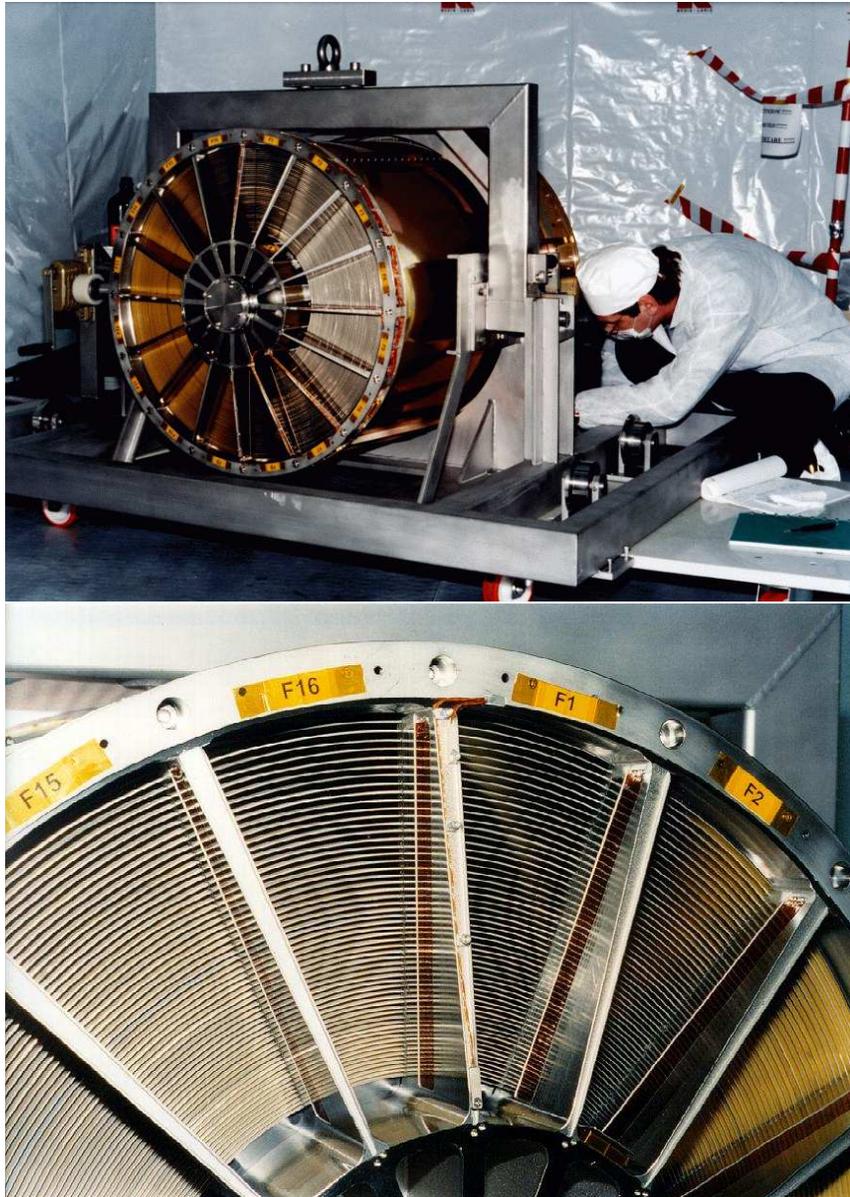


Figura 6.14: Immagini di uno dei tre specchi per raggi X a bordo di XMM-Newton. Ognuno è formato da 58 specchi ad incidenza radente di forma Wolter I, innestati in una configurazione coassiale e cofocale. La geometria delle ottiche deriva dalla necessità di ottenere la maggiore area effettiva possibile sul più ampio intervallo di energia, con particolare enfasi alla regione attorno a 7 keV. A causa di ciò, gli specchi utilizzano un angolo di incidenza molto piccolo,  $30'$ , per avere una riflettività sufficiente ad alta energia. La lunghezza focale dei telescopi è di 7.5 metri, ed il diametro dello specchio più esterno è di 70 cm, in modo da poter essere alloggiato nel vano di carico del lanciatore.

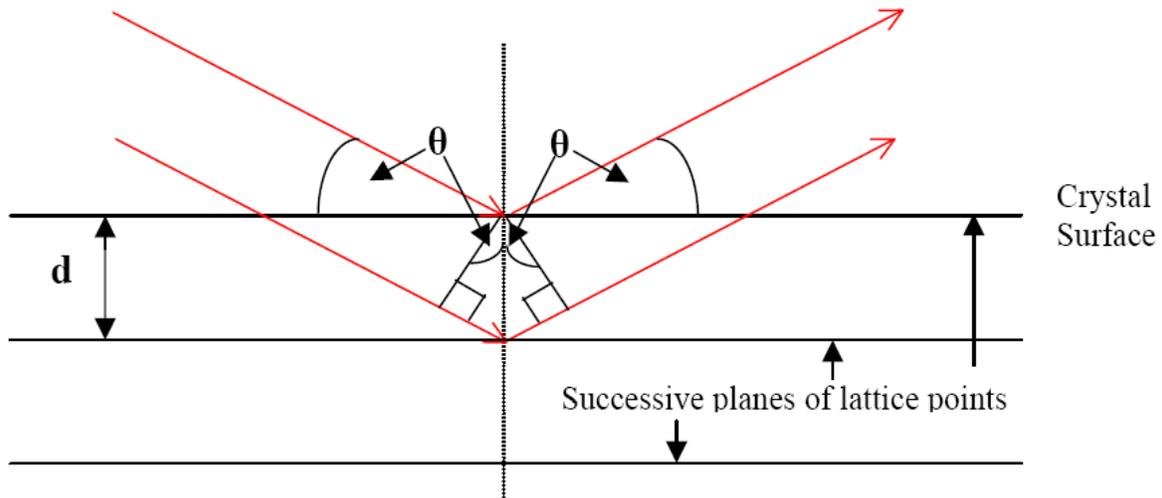


Figura 6.15: Geometria della diffrazione di Bragg: due raggi di alta energia vengono diffratti da due piani cristallini adiacenti alla superficie di un cristallo.

emergere dal cristallo dipenderà dalla geometria del cristallo stesso, cioè dall'orientamento dei piani cristallini rispetto alla direzione del fotone incidente.

Utilizzando la legge di Bragg e gli indici di Miller  $h, k, l$  per descrivere l'orientamento dei piani cristallini, abbiamo che

$$\frac{2a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \sin \theta = n\lambda \tag{6.13}$$

dove  $a$  è la costante reticolare del cristallo (si veda Figura 6.17).

Dall'Eq. 6.13 è possibile ricavare la direzione del fotone diffratto se è nota l'energia del fotone incidente e la natura del cristallo.

Un'altra importante proprietà è il rendimento (*throughput*) del processo di diffrazione di Laue, definito come il rapporto tra l'intensità del fotone diffratto  $P(\tau)$  che attraversa un cristallo di spessore  $\tau$  e l'intensità del fotone incidente  $P(0)$ . E' possibile dimostrare che

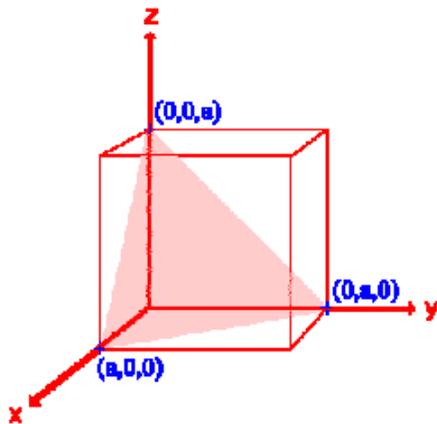


Figura 6.17: Definizione degli indici di Miller per l'orientamento dei piani reticolari di un cristallo. In figura è mostrato il piano (111).

$$\frac{P(\tau)}{P(0)} \equiv \epsilon = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sigma\tau}) e^{-\mu\tau} \tag{6.14}$$

dove  $\epsilon$  è definita l'efficienza del cristallo,  $\sigma$  è il coefficiente di diffrazione,  $\mu$  in coefficiente di attenuazione dovuto ad uno spessore  $\tau$ . Utilizzando questa relazione è possibile ottimizzare lo

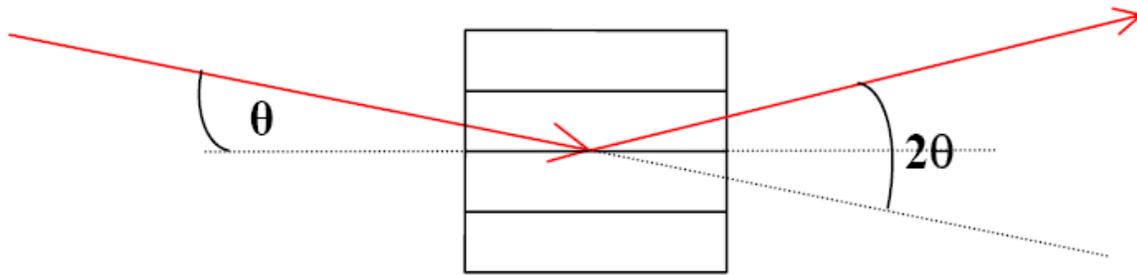


Figura 6.16: Geometria della diffrazione di Laue: un raggio di alta energia attraversa un cristallo e subisce diffrazione di Bragg sui piani cristallini, emergendo con un angolo pari a  $\theta$ .

spessore dei cristalli per avere la massima efficienza. In Figura 6.18 vengono mostrate delle curve di ottimizzazione relative al piano cristallino (440) del Germanio.

Si noti che quando si parla di efficienza del cristallo è necessario distinguere tra efficienza di picco (*peak efficiency*), espresso normalmente come una percentuale, e la riflettività integrata (*integrated reflectivity*), espressa in fotoni/secondo. La riflettività integrata non è altro che il flusso totale diffratto, e misura il flusso di fotoni diffratti dall'intero cristallo in un dato intervallo di tempo. Ad esempio, misure effettuate su cristalli di Germanio e Rame danno efficienze di  $\sim 30\%$  e  $\sim 20\%$  per fotoni nella banda 300–900 keV.

Vediamo ora di introdurre il concetto di *mosaicità*. Un cristallo perfetto è quello in cui gli atomi si trovano al centro di un reticolo cristallino regolare. In questo caso, raggi X verrebbero diffratti come mostrato in Figura 6.19: fino ad un certo angolo  $\theta'$ , alcuni arcosecondi dall'angolo di Bragg  $\theta$ , l'intensità della radiazione diffratta è zero. Tra  $\theta'$  e  $\theta$  l'intensità aumenta rapidamente ad efficienza 100%, vi rimane per un certo intervallo angolare  $\Delta\theta_0$ , e poi diminuisce rapidamente ad intensità zero. Questo però accade per cristalli perfetti, mentre in natura il reticolo cristallino presenta delle imperfezioni (dette *dislocazioni*) che fanno sì che il valore di  $\Delta\theta_0$  sia molto maggiore di quello previsto nel caso di cristalli perfetti.

Questo ha portato allo sviluppo di un modello noto come Cristallo Idealmente Imperfetto (*Ideally Imperfect Crystal*): questo cristallo viene costruito a partire da un elevato numero di minuscoli frammenti di cristallo posizionati in una configurazione con i loro piani reticolari quasi paralleli. Questa configurazione prende il nome di *cristallo a mosaico*. La distribuzione statistica degli angoli è considerata Gaussiana, e la *mosaicità*  $\Delta\theta_B$  viene definita come la Ampiezza a Mezzo Massimo (Full Width at Half Maximum, FWHM) della distribuzione (vedi Figura 6.20). La mosaicità non è quindi altro che una misura delle imperfezioni di un cristallo. Ovviamente all'aumentare della mosaicità corrisponde una diminuzione dell'efficienza di picco, mentre l'efficienza integrata rimane pressochè costante. Altri parametri che sono influenzati dalla mosaicità sono il campo di vista, la risoluzione angolare e l'intervallo operativo in energia. In prima approssimazione abbiamo che la mosaicità è circa 1.5 volte il campo di vista.

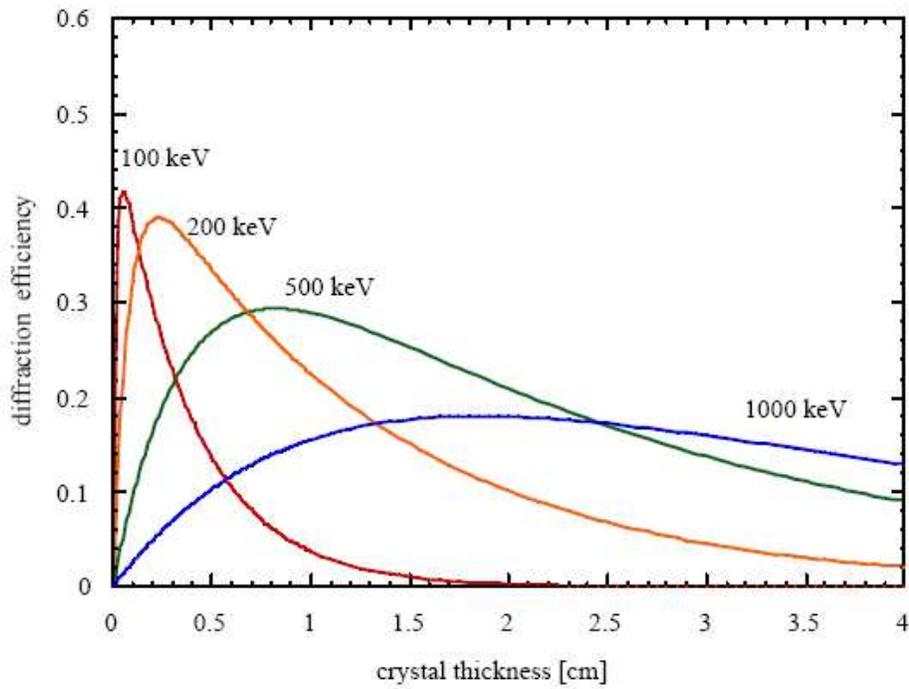


Figura 6.18: Curve teoriche di ottimizzazione dello spessore di cristalli di Germanio per diffrazione di Laue sul piano cristallino (440).

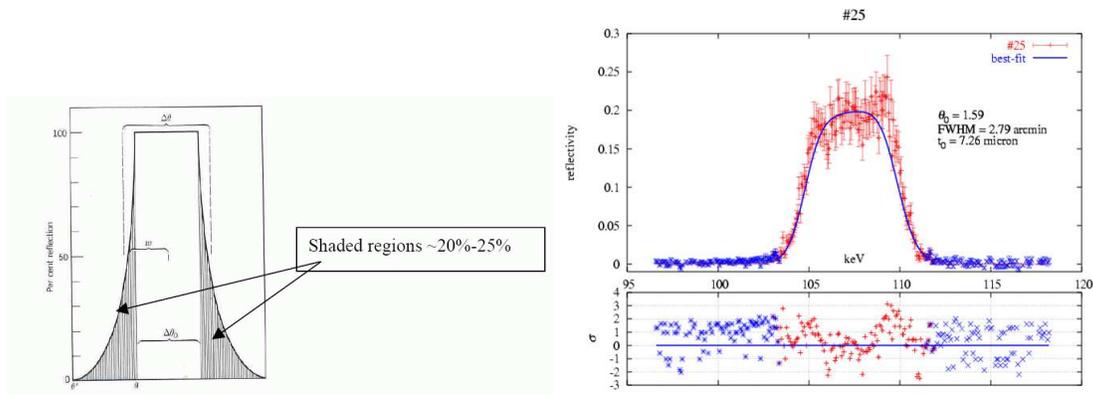


Figura 6.19: Confronto tra la diffrazione di Bragg da un cristallo perfetto (a sinistra) ed un cristallo di Rame (111) (a destra).

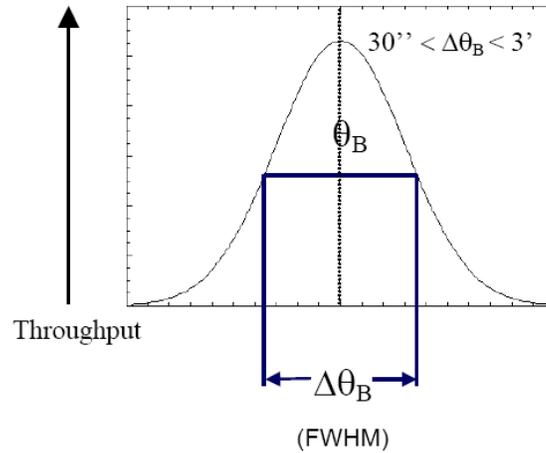


Figura 6.20: Definizione della mosaicità  $\Delta\theta_B$  di un cristallo.

Misurata la mosaicità di un cristallo è possibile ricavare l'intervallo operativo in energia utilizzando la legge di Bragg (Eq. 6.12) e la definizione di mosaicità:

$$2d\theta_B = \frac{hc}{E} \quad (6.15a)$$

$$\frac{\Delta\theta_B}{\theta_B} = \frac{\Delta E}{E} \quad (6.15b)$$

dove  $h$  è la costante di Planck e  $c$  la velocità della luce (abbiamo assunto  $n = 1$  e  $\theta$  piccolo nella legge di Bragg). Otteniamo quindi che l'intervallo operativo in energia di un cristallo di mosaicità  $\Delta\theta_B$  è

$$\Delta E = \frac{2dE^2}{hc} \Delta\theta_B \quad (6.16)$$

### Le lenti di Laue

Le lenti di Laue si basano sull'utilizzo di più di un cristallo per focalizzare fotoni di alta energia, ed il principio di funzionamento è schematizzato in Figura 6.21, dove viene mostrata la configurazione di cristalli orientati tutti nella stessa direzione  $\theta$  e posizionati su di un anello di raggio  $R$ . I raggi incidenti di una certa energia verranno focalizzati ad una certa distanza focale  $F$  data da

$$F = \frac{R}{\tan 2\theta} \quad (6.17)$$

Combinando Eqs. 6.15a e 6.17 abbiamo che l'energia  $E$  del fotone focalizzato alla distanza focale  $F$  è data da

$$E = \frac{hc}{dR} F \quad (6.18)$$

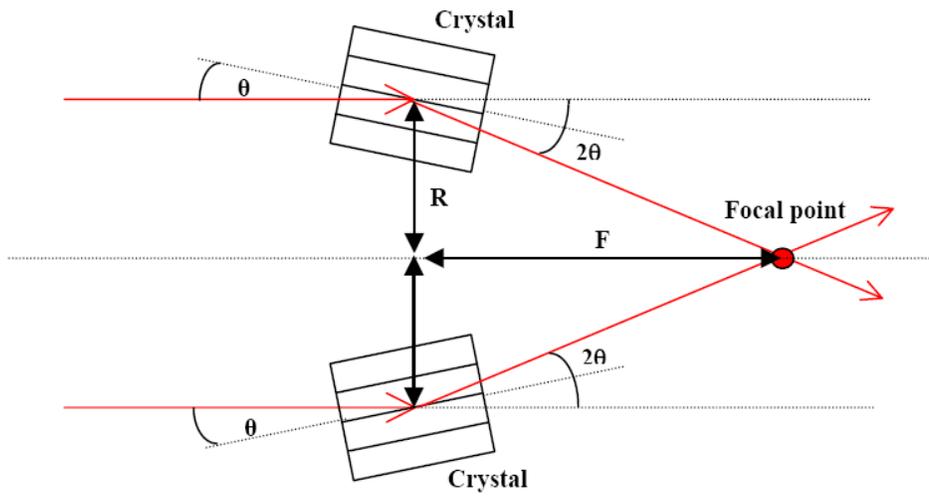


Figura 6.21: Principio di funzionamento di una lente di Laue: i cristalli sono posizionati su di un anello di raggio  $R$ , hanno tutti lo stesso orientamento  $\theta$  e focalizzano fotoni di una certa energia ad una distanza focale  $F$ .

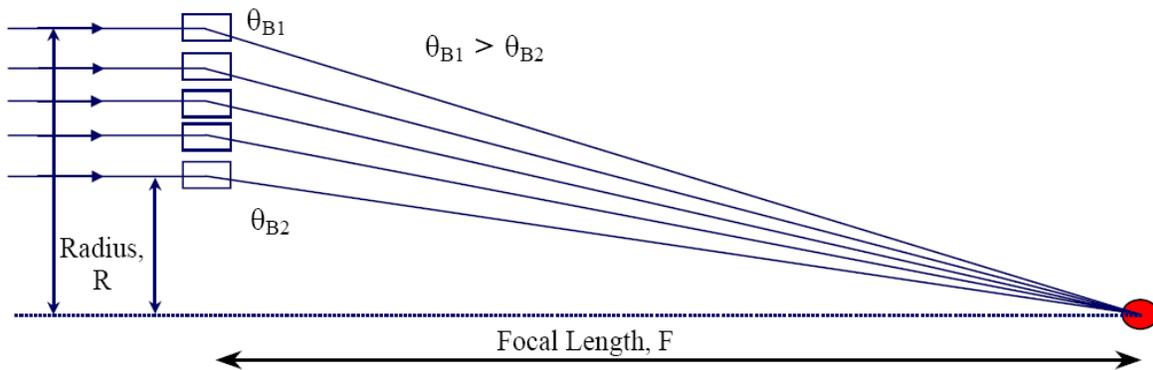


Figura 6.22: Lente di Laue con cristalli innestati in anelli concentrici.

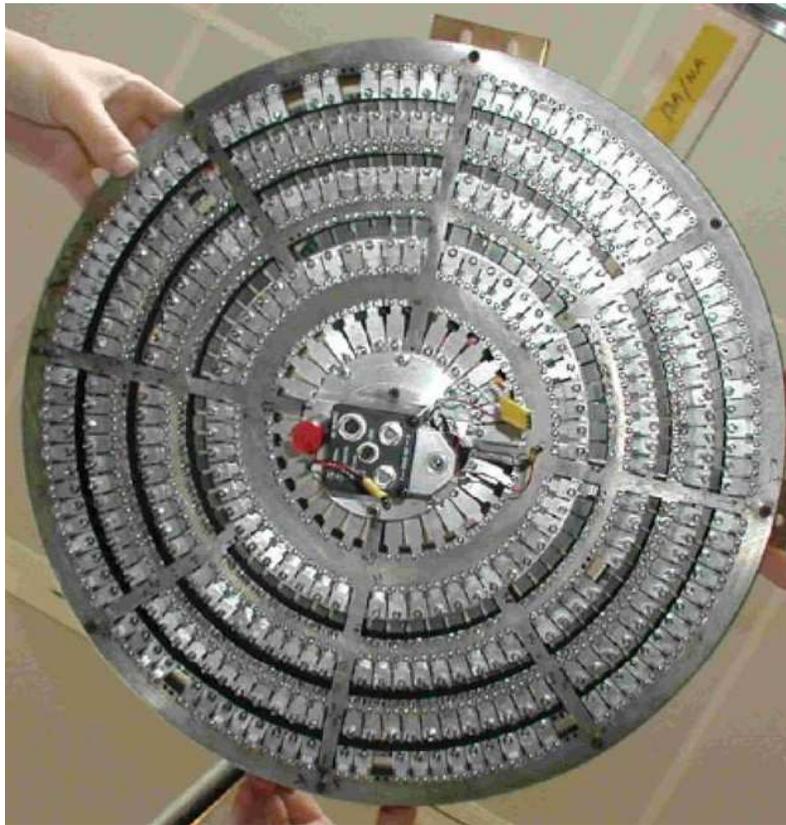


Figura 6.23: Foto di una lente di Laue realizzata per l'esperimento CLAIRE, consistente in 556 cristalli di Germanio Ge(111) montati su 8 anelli concentrici (si ringrazia Peter von Balmoos).

cioè cristalli posizionati a raggi  $R$  diversi focalizzeranno fotoni di energia diversa. Questo permette di aumentare l'intervallo operativo in energia se innestiamo in anelli concentrici più cristalli, come mostrato in Figura 6.22.

Dall'Eq. 6.13 vediamo come sia possibile variare l'angolo di Bragg, e quindi la focalizzazione della Lente, agendo sulla costante reticolare  $a$  (cioè variando  $d$  in Eq. 6.18). Quindi cambiando il tipo di cristallo si varia la distanza focale della lente. Ad esempio, per una data energia, il Rame riflette con un angolo di Bragg maggiore di quello prodotto dal Germanio.

## 6.5 Rivelazione di raggi X da sorgenti cosmiche: Considerazioni statistiche

Un rivelatore collimato registrerà (conterà) eventi che provengono da un piccolo angolo solido del cielo. A questi si aggiungeranno eventi di fondo. Possiamo quindi considerare tre differenti tipi di conteggi:

- ① il flusso di fotoni  $j_s$ , proveniente dalla sorgente all'interno del campo di vista;
- ② il flusso di fotoni  $dj_d/d\Omega$ , proveniente dal fondo diffuso che cade all'interno dell'angolo solido del collimatore;
- ③ il flusso  $j_b$  di fondo non dovuto all'emissione diffusa, assunto omnidirezionale e non collimato (cioè è di energia così elevata che penetra il rivelatore indipendentemente dalla direzione).

Quindi il tasso di conteggi *netto* osservato ad un certo istante sarà

$$R = \left[ j_s f(\theta - \theta_0) + \frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b \right] \epsilon A \quad \text{cts sec}^{-1} \quad (6.19)$$

dove  $f(\theta - \theta_0)$  è la funzione di trasmissione del collimatore,  $\theta - \theta_0$  è la distanza angolare tra l'asse centrale del collimatore e la direzione della sorgente,  $\delta\Omega$  è l'angolo solido del collimatore,  $\epsilon$  è l'efficienza del rivelatore, e  $A$  è la sua area.

Nel caso di collimatori meccanici,  $f(\theta - \theta_0)$  ha la forma triangolare già descritta (Eq. 6.7)

$$f(\theta - \theta_0) = \begin{cases} 1 - \frac{|\theta - \theta_0|}{\theta_{1/2}} & \text{per } |\theta - \theta_0| < \theta_{1/2} \\ 0 & \text{per } |\theta - \theta_0| > \theta_{1/2} \end{cases}$$

dove  $\theta_{1/2}$  è una caratteristica del collimatore.

Per le sorgenti più intense  $j_s$  è dell'ordine di 100 fotoni  $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ , mentre per le sorgenti più deboli arriva a  $\sim 10^{-4}$  fotoni  $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ . Il flusso al di sopra di 1 keV dovuto ad emissione diffusa è circa 10 fotoni  $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ , mentre quello non diffuso,  $\epsilon j_b$ , è dell'ordine di 0.01 cts  $\text{sec}^{-1}$  in 1–10 keV, ma dipende in modo significativo dalle tecniche di discriminazione usate per eliminarlo (che discuteremo dopo).

Vediamo ora di studiare l'accumulo di dati: nel caso piú semplice una sorgente sar  visibile nel campo di vista del collimatore per un certo tempo  $t_1$ , dando luogo ad un conteggio netto di  $N_1 = R_1 t_1$  conteggi. Il fondo verr  quindi accumulato durante un periodo  $t_2$ , producendo un conteggio  $N_2 = R_2 t_2$ . Il tasso di conteggio netto dalla sorgente sar  quindi

$$R_1 - R_2 = j_s f(\theta - \theta_0) \epsilon A = N_1/t_1 - N_2/t_2 \quad (6.20)$$

L'errore statistico associato a  $j_s$    semplicemente

$$\frac{\delta j_s}{j_s} = \frac{\sqrt{N_1 t_2^2 + N_2 t_1^2}}{N_1 t_2 - N_2 t_1} \quad (6.21)$$

dato che  $N_1$  e  $N_2$  hanno distribuzioni normali con deviazione standard  $\sqrt{N_1}$  e  $\sqrt{N_2}$ . Se il numero di conteggi   minore di circa 10   necessario utilizzare la statistica di Poisson per ottenere la deviazione piú probabile.

Nel caso di osservazione *scanning*, quella in cui l'asse dello strumento   ruotato sopra la sorgente di un angolo maggiore del campo di vista, il conteggio netto accumulato sar 

$$N_s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} j_s \epsilon A \frac{f(\theta - \theta_0)}{\omega} d\omega \quad (6.22)$$

dove  $\omega$    la velocit  di rotazione. Utilizzando la forma triangolare (6.7) per  $f(\theta - \theta_0)$  l'integrazione della (6.22) fornisce

$$N_s = j_s \epsilon A \frac{\theta_{1/2}}{\omega} \quad \text{cts} \quad (6.23)$$

La quantit   $\theta_{1/2}/\omega$  non   altro che il tempo di transito della sorgente nel campo di vista del collimatore.

Vediamo ora di determinare l'errore associato alla misura del conteggio da una sorgente, in modo di estrarre il rapporto segnale rumore. Trattiamo due casi limite:  $j_s$  maggiore del fondo e  $j_s$  minore del fondo. Nel primo caso avremo che

$$\delta N_s = \sqrt{N_s} = \sqrt{j_s \epsilon A \frac{\theta_{1/2}}{\omega}} \quad (6.24)$$

mentre nel secondo

$$\delta N_s = \sqrt{N_B} = \sqrt{\left( \frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b \right) \epsilon A t} \quad (6.25)$$

dove  $t$    il tempo durante cui   stata osservata la sorgente. Per osservazioni *scanning*  $t = 2\theta_{1/2}/\omega$ . Il rapporto segnale/rumore   allora dato da

$$S/N = \frac{N_s}{\delta N_s} = \frac{N_s}{\sqrt{N_B}} = j_s \sqrt{\frac{\epsilon A t}{\left( \frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b \right)}} \quad (6.26)$$

La quantità  $S/N$  è formalmente il numero di deviazioni standard ( $\sigma$ ) per cui i conteggi dalla sorgente sono maggiori del fondo. Le due espressioni (6.24) e (6.26) determinano il modo in cui i parametri dell'esperimento influenzano i risultati delle osservazioni, come la sensibilità e gli errori.

Data la dipendenza dalla radice quadrata, per raddoppiare la sensibilità sarà necessario quadruplicare il tempo di osservazione o l'area dello strumento.

Si definisce sensibilità di uno strumento il flusso piú debole (il piú piccolo  $j_s$ ) che produce un certo numero di deviazioni standard al di sopra del fondo. Tradizionalmente questo numero è tre, quindi

$$j_{\min} = 3 \sqrt{\frac{\left(\frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b\right)}{\epsilon A t}} \quad (6.27)$$

## 6.6 Il rocking come tecnica per la determinazione del fondo

Come abbiamo visto (si veda Eq. 6.7) il segnale netto da una sorgente è dato dalla differenza tra uno spettro accumulato puntando sulla sorgente ed uno spettro di fondo. Una possibilità è quella di accumulare lo spettro di fondo prima e/o dopo l'osservazione sulla sorgente in regioni "vicine", ma questa tecnica ha lo svantaggio che se il fondo mostra variabilità (ad esempio a causa di flussi variabili di particelle dovuti alla SAA o a cicli solari) allora non siamo sicuri che il fondo accumulato ad istanti diversi sia lo stesso di quello accumulato durante l'osservazione puntata. Ovviamente questo vale per sorgenti il cui conteggio sia dominato dal fondo.

Per ovviare a questo problema, e per essere sicuri di avere un monitoraggio del fondo contemporaneo alla osservazione puntata è stata messa a punto una tecnica, detta di *rocking*, che permette di misurare contemporaneamente i conteggi dalla sorgente ed i conteggi da una regione vicina a quella del puntamento spostando il collimatore sopra il rivelatore (come nel caso del PDS a bordo di BeppoSAX, o l'intero blocco collimatore+rivelatore, come nel caso dell'esperimento HEXTE a bordo di RXTE) alternativamente da una parte all'altra della direzione di puntamento. I collimatori a bordo del PDS avevano la possibilità di basculare su cinque posizioni simmetriche rispetto alla posizione neutra di puntamento, a  $\pm 30'$ ,  $\pm 60'$ ,  $\pm 90'$ ,  $\pm 150'$  e  $\pm 210'$ . In Figura 6.24 viene mostrato il tasso di conteggio accumulato dai rivelatori sotto i due diversi blocchi di collimatori (si veda Figura 6.10), e come questi vengano poi fusi insieme per ottenere il tasso di conteggio della sorgente+fondo e del fondo. A causa della particolare orbita di BeppoSAX (a bassa inclinazione rispetto all'equatore, in modo da evitare i passaggi attraverso la SAA) il fondo è molto stabile e non mostra alcuna modulazione.

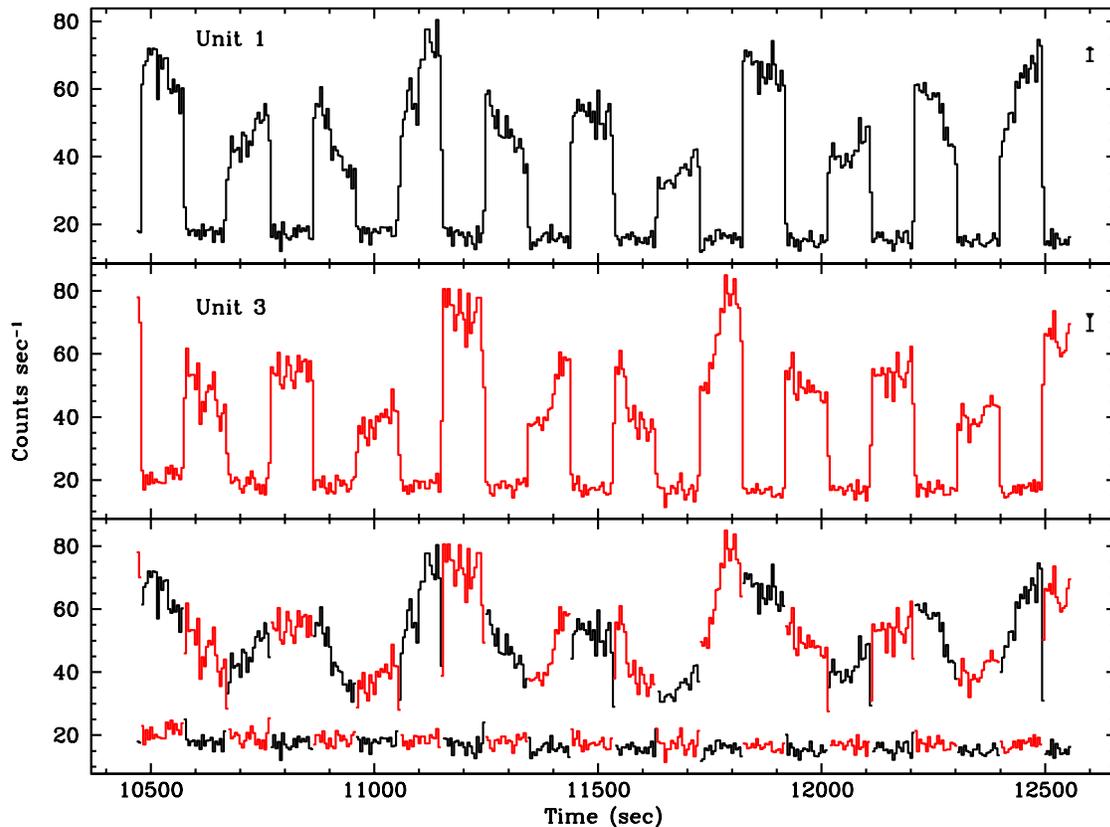


Figura 6.24: Serie temporale della pulsar X GX301–2 (periodo di pulsazione di  $\sim 700$  sec) accumulata dallo strumento PDS. La sorgente viene puntata per 96 sec, poi per altri 96 sec il collimatore si sposta di  $3.5^\circ$  da una parte, poi ritorna sulla sorgente ed ancora  $3.5^\circ$  dalla parte opposta, per poi ricominciare il ciclo. Nei primi due pannelli sono mostrate le serie temporali relative a rivelatori sottostanti collimatori diversi. Nel momento che le due serie temporali vengono “fuse” (terzo pannello) si ottengono due serie temporali complete: una con il flusso di sorgente e l’altra con il flusso del fondo. In maniera analoga si ottengono gli spettri della sorgente+fondo e del fondo.



# Capitolo 7

## Fit Spettrale e XSPEC

### 7.1 Introduzione

Ci occuperemo ora di tecniche che permettono il confronto tra i modelli teorici che abbiamo incontrato nella prima parte del corso (e che ci forniscono i conteggi aspettati se l'emissione fosse dovuta al processo di cui stiamo valutando l'emissione) con le misure sperimentali (cioè i conteggi misurati) ottenibili con le classi di strumenti che abbiamo brevemente descritto nel Capitolo precedente. Purtroppo, come vedremo in dettaglio, non è possibile ricavarci in maniera univoca la forma dello spettro dai conteggi osservati, quindi è necessaria una tecnica statistica che mi permetta di decidere, tra tutti i possibili modelli, quale sia quello che meglio descrive le osservazioni.

### 7.2 Fondamenti di fitting spettrale

La procedura standard per l'analisi di dati spettrali è quella di assumere una certa forma dello spettro avente un certo numero di parametri liberi, calcolare la risposta del rivelatore per valori prestabiliti dei parametri, e testare la bontà con dei test di verosimiglianza, il più usato dei quali è quello del  $\chi^2$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(N_i - C_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (7.1)$$

dove  $C_i$  sono i conteggi previsti e  $N_i$  sono quelli misurati dalla sorgente in un insieme di  $M$  bin in energia indipendenti. Le varianze predette in ogni bin saranno  $\sigma_i^2 = C_i$  se consideriamo solamente la statistica di conteggio dei fotoni. Se però il conteggio del fondo non è trascurabile allora i  $C_i$  devono essere interpretati come la differenza tra il vero conteggio totale  $T_i$  ed il vero conteggio dovuto al fondo  $B_i$  e quindi dovremo usare la stima  $\sigma_i^2 = T_i + B_i$ . Inoltre bisognerà aggiungere a  $\sigma_i$  ogni errore sistematico, quali ad esempio le incertezze nella misura dell'area del rivelatore ed incertezze nella determinazione dell'efficienza (si ricordino le (6.24) e (6.25)). La probabilità di ottenere un valore del  $\chi^2$  maggiore o uguale a quello osservato è dato da

$$P(> \chi^2) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_{\chi^2}^{\infty} e^{-\mu/2} \mu^{(n/2-1)} d\mu \quad (7.2)$$

dove la quantità  $n$  è il *numero dei gradi di libertà*, uguale a  $M$  meno il numero dei parametri utilizzati nel modello spettrale. Se  $P$  è sufficientemente piccolo, diciamo dell'ordine del 5%, l'ipotesi usata per calcolare i  $C_i$  può essere scartata. Generalmente i parametri che danno la probabilità più grande vengono indicati come la rappresentazione spettrale migliore (*best fit*). Se vogliamo, questo è l'equivalente di un fit ai minimi quadrati.

E' però necessario a questo punto una chiarificazione importante. Il test del  $\chi^2$  ci dice che alcuni modelli **non possono** rappresentare correttamente i nostri dati e che invece altri modelli **potrebbero** rappresentarli correttamente; quello che però il test del  $\chi^2$  **non può** dirci è quale, tra tutti i modelli (diversi) che sono permessi per il test, sia quello "migliore tra i migliori". Ad esempio, la sotto-stima delle varianze  $\sigma_i$  (ottenuta trascurando gli errori sistematici) condurrà ad un alto valore del  $\chi^2$  e quindi alla possibile reiezione, sbagliata, di certi modelli.

Per cercare di dare una risposta a questo problema si utilizza un altro test, il cosiddetto F-test, il quale misura se le varianze ottenute da due collezioni di dati (nel nostro caso due modelli) sono statisticamente differenti. Se lo sono, allora non potremmo dire nulla su quale delle due sia "migliore" rispetto all'altra, ma se le loro varianze sono statisticamente uguali, allora potremmo dire che i due modelli sono equivalenti. In altre parole, andremo a calcolare quale è la probabilità che la differenza dei  $\chi^2$  misurati con modelli **differenti** sia casuale. Da un punto di vista computazionale, l'F-test testa l'ipotesi che due campioni abbiano varianza differente cercando di rigettare l'ipotesi che le loro varianze siano consistenti, ed utilizza come variabile il rapporto dei  $\chi^2$  normalizzati (cioè il  $\chi^2$  diviso per il numero di gradi di libertà).

I conteggi previsti  $C_i$  vengono calcolati secondo la

$$C_i = \int_0^{\infty} \frac{dN}{dE_0} P_i(E_0) dE_0 \quad (7.3)$$

dove  $dN/dE_0$  è lo spettro incidente che viene assunto, e  $P_i(E_0)$  è la probabilità che un fotone incidente di energia  $E_0$  risulti in un conteggio in un canale del rivelatore  $i$  che è tarato in una banda di energia nominale tra  $E_i|_{\min}$  e  $E_i|_{\max}$ , cioè

$$P_i(E_0) = \int_{E_i|_{\min}}^{E_i|_{\max}} P(E, E_0) dE \quad (7.4)$$

Veniamo quindi ridotti al problema di determinare la funzione densità di probabilità che un fotone incidente di energia  $E_0$  risulti in un segnale (impulso) corrispondente ad un'energia tra  $E$  e  $E + dE$ . Separiamo questa densità di probabilità in due parti: la prima,  $P_L(E', E_0)$ , che un fotone incidente di energia  $E_0$  depositi un'energia compresa tra  $E'$  e  $E' + dE'$  nel rivelatore (con  $E' \leq E_0$ ) e la seconda,  $P_R(E, E')$ , densità di probabilità di risoluzione, che una perdita di energia  $E'$  risulti in un impulso equivalente nell'intervallo tra  $E$  e  $E + dE$ . Allora avremo che

$$P(E, E_0) = \int_0^{E_0} P_R(E, E') P_L(E', E_0) dE' \quad (7.5)$$

In generale, la risoluzione può essere considerata una funzione Gaussiana

$$P_R(E, E') = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(E')} \exp \left[ -\frac{(E - E')^2}{2\sigma^2(E')} \right] \quad (7.6)$$

dove la varianza  $\sigma(E')$  è legata alla FWHM dalla relazione  $\sigma = 0.42$  (FWHM).

Descriviamo ora brevemente i vari contributi alla funzione  $P_L$ , che sono (i) la probabilità che un fotone riesca a penetrare nel volume del rivelatore, (ii) la probabilità che avvenga un certo tipo di interazione tra il fotone ed il rivelatore e (iii) la distribuzione di perdita di energia per quel particolare processo. Vediamo quindi che  $P_L$  può essere determinato da una combinazione di calcoli analitici, simulazione Monte Carlo e misure sperimentali. Nel caso di un contatore a scintillazione (ma il principio si può estendere anche ad apparecchi a gas e a semiconduttore) possiamo scrivere

$$P_L(E', E_0) = \exp[-\mu_w(E_0) t_w] \times \left\{ \frac{\mu_p(E_0)}{\mu(E_0)} P_L(E', E_0)|_{\text{photo}} + \frac{\mu_c(E_0)}{\mu(E_0)} P_L(E', E_0)|_{\text{Comp}} \right\} \quad (7.7)$$

La frazione  $\mu_p/\mu$  corrisponderà ad interazioni via effetto fotoelettrico, la frazione  $\mu_c/\mu$  ad interazioni via effetto Compton, dove  $\mu_p$  è il coefficiente di assorbimento dovuto ad assorbimento via fotoelettrico e  $\mu_c$  quello dovuto ad assorbimento via effetto Compton.  $\mu_w$  e  $t_w$  sono il coefficiente di assorbimento e lo spessore della finestra.

Una interazione via effetto fotoelettrico può depositare nel rivelatore tutta la sua energia, od una parte di essa corrispondente alla fuga dal rivelatore dei raggi X della shell  $K$  o  $L$  che risultano dalla diseccitazione dell'atomo originale che aveva assorbito il fotone. Diventa allora importante determinare il numero relativo di raggi X che vengono assorbiti via effetto fotoelettrico nel rivelatore. Per semplicità assumeremo che il fascio incida perpendicolarmente il rivelatore e che questi sia di grandi dimensioni.

Di queste interazioni una certa frazione  $\delta_k$  avverrà nella shell  $K$ , e di questa frazione il guadagno di fluorescenza  $\omega_k$  è la probabilità che l'atomo si disecciti emettendo un raggio X dalla shell  $K$  (si vedano i valori di  $\omega_k$  per alcuni materiali usati in astronomia X in Tabella 7.1). Assumendo emissione isotropa, si può integrare la probabilità di penetrazione di un raggio X proveniente dalla shell  $K$  sul percorso di fuga dal rivelatore in funzione dell'angolo solido. La frazione di tutte le interazioni che hanno come risultato la fuga dalla finestra frontale e quella posteriore del rivelatore sono

$$f_1(E_0) = \frac{1}{2} \frac{\omega_k \delta_k}{P_I} \left\{ 1 - \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_0)} \ln \left( 1 + \frac{\mu(E_0)}{\mu(E_k)} \right) \right\} \quad (7.8a)$$

$$f_2(E_0) = \frac{1}{2} \frac{\omega_k \delta_k}{P_I} \exp[-\mu(E_0) t] \left\{ \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_0)} \ln \left( \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_k) - \mu(E_0)} \right) - 1 \right\} \quad (7.8b)$$

Tabella 7.1: Proprietà di materiali utilizzati in sistemi di rivelazione per astronomia X

	Numero Atomico $Z$	Densità $\rho$ (g cm <sup>-3</sup> )	Energia Shell $E_s$ (keV)	Energia Riga X (keV)	Guadagno Fluoresc. $\omega_s$	Frazione Interaz. $\delta_s$	Energia ( $\mu_c = \mu_p$ ) (keV)
<i>Gas Contatori Proporzionali</i>							
Metano	6	$0.713 \cdot 10^{-3}$	0.284	0.277		0.96	20
Ne	10	$0.901 \cdot 10^{-3}$	0.867	0.849, 0.858	0.01	0.94	38
Ar	18	$1.780 \cdot 10^{-3}$	3.203 0.285, 0.246, 0.244	2.96	0.105	0.90	72
Kr	36	$3.740 \cdot 10^{-3}$	14.32 1.92, 1.73, 1.67	12.64, 14.12	0.625 0.04	0.88	170
Xe	54	$5.850 \cdot 10^{-3}$	34.56 5.45, 5.10, 4.78	29.67, 33.78 4.10, 4.49, 5.30	0.875 0.14	0.86	300
<i>Cristalli Scintillatori</i>							
Nal	53	3.61	33.16 5.19, 4.86, 4.56	28.47, 32.30 3.93, 4.22, 4.80	0.865 0.13	0.84	260
CsI	55	4.54	35.97	30.81, 34.99 4.28, 4.62, 5.28	0.885 0.15	0.68	300
Si	14	2.33	1.84	1.74, 1.83	0.04	0.92	53
Ge	32	5.36	11.10 1.42, 1.41, 1.21	9.88, 10.98 1.19, 1.22	0.49 0.01	0.91	145
<i>Finestre</i>							
Be	4	1.82	0.111	0.109		0.97	14
Mylar	8	1.4	0.532	0.525		0.65	
Formvar	8	1.2	0.532	0.525		0.65	
Poliprop.	6	0.95	0.284	0.277		0.92	
Aria <sup>a</sup>	18	$1.29 \cdot 10^{-3}$	3.20	2.96	0.105	0.54	27
Aria <sup>b</sup>	8		0.532	0.525			
Aria <sup>c</sup>	7		0.400	0.392			
<i>Collimatori</i>							
Mg	12	1.74	1.30	1.25, 1.30	0.02	0.93	46
Al	13	2.7	1.56	1.49, 1.55	0.03	0.93	50
Fe	26	7.87	7.11 0.849, 0.722, 0.709	6.40, 7.06	0.31	0.90	135
Ni	28	8.9	8.33 1.01, 0.877, 0.858	7.47, 8.27	0.38	0.89	140
Cu	29	8.96	8.99 1.10, 0.954, 0.935	8.04, 8.91	0.40	0.89	145

<sup>a</sup> 1.3% Ar;    <sup>b</sup> 23.2% O;    <sup>c</sup> 75.5% N

Il contributo a  $P_L$  diventa quindi

$$P_L(E', E_0)|_{\text{photo}} = \left\{ [1 - f(E_0)] \delta(E' - E_0) + \sum_k f_k(E_0) \delta(E' - (E_0 - E_k)) \right\} \quad (7.9)$$

dove abbiamo definito  $f = \sum_k f_k = \sum_k (f_1 + f_2)_k$  e la somma su  $k$  considera tutti i raggi X che devono essere considerati individualmente.

Per calcolare la perdita di energia per scattering Compton bisogna “seguire” il fotone scatterato per vedere se esso subisce ulteriori interazione nel rivelatore.

In un trattamento rigoroso si dovrebbero seguire (attraverso un Monte Carlo) tutti i fotoni ed elettroni secondari prodotti da ogni processo iniziale per determinare la perdita totale di energia.

Nel regime di interesse per l'astronomia X, per contatori a gas l'energia di utilizzo è tale per cui il termine  $\mu_c/\mu$  è trascurabile, mentre per i cristalli scintillatori possiamo usare l'approssimazione

$$P_L(E', E_0)|_{\text{Comp}} = a_1(E_0) \delta(E' - E_0) + a_2(E_0) \delta(E' - (E_0 - E_k)) + \frac{a_3(E_0)}{E_C} H(E_C - E') \quad (7.10)$$

dove  $H(x)$  è la funzione scalino definita come

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

I coefficienti  $a_1(E_0)$  rappresentano la frazione di fotoni Compton che alla fine depositeranno tutta la loro energia; i coefficienti  $a_2(E_0)$  la frazione di fotoni Compton che terminano con un assorbimento fotoelettrico che porterà ad una fuga di un fotone X dalla shell  $K$ . Ciò che rimane, cioè

$$a_3(E_0) = 1 - a_1(E_0) - a_2(E_0) \quad (7.11)$$

viene approssimato con un deposito di energia a spettro costante da zero fino ad una energia massima  $E_C$  che può essere perduta in uno scattering singolo.

E' bene mettere in evidenza che finora abbiamo sempre considerato fotoni che incidono sulla finestra del rivelatore. Vi sono altri affetti di cui bisogna tenere conto, quali fotoni che vengono scatterati via Compton dal collimatore, e fotoni che penetrano il rivelatore senza subire interazioni e sono poi scatterati indietro. Per sorgenti puntiformi si tiene conto di questi effetti nella determinazione del fondo, ma possono diventare importanti nello studio del fondo cosmico diffuso.

### 7.3 Fitting spettrale e XSPEC

XSPEC è il programma che viene utilizzato dalla maggior parte degli studiosi che si occupano di studi spettrali nella banda X. E' stato sviluppato al Goddard Space Flight Center della NASA

da Keith Arnaud, ed ora il suo sviluppo viene portato avanti da una squadra di programmatori e/o astrofisici sia al Goddard che in altre parti del mondo. Per una trattazione particolareggiata rimandiamo al suo manuale, disponibile sia on-line che come aiuto a linea di comando. Quello che tratteremo qui sarà solamente la “filosofia” che sta alla base del programma e che, alla luce di quanto abbiamo detto nella sezione precedente, ci sarà del tutto naturale.

Da un punto di vista operativo, un qualsiasi spettrometro non ci fornisce lo spettro di una sorgente ma conteggi  $C$  per canale strumentale  $I$ . Questo spettro osservato è in relazione con lo spettro vero della sorgente  $f(E)$  attraverso la relazione (vedi la (7.3))

$$C(I) = \int_0^{\infty} f(E) R(I, E) dE \quad (7.12)$$

La funzione  $R(I, E)$  viene detta *risposta del rivelatore* e, come abbiamo visto, è proporzionale alla probabilità che un fotone incidente di energia  $E$  venga rivelato nel canale  $I$ .

Da un punto di vista teorico, si dovrebbe essere in grado di determinare lo spettro della sorgente  $f(E)$  invertendo Eq. 7.12. Sfortunatamente questo non è in generale possibile perché queste inversioni non sono univoche e sono instabili a piccole variazioni in  $C(I)$ .

La maniera alternativa è quindi quella di scegliere un modello spettrale  $f(E)$  che possa essere descritto da un (piccolo) numero di parametri e “concordarlo” (*fit*) ai dati (conteggi) ottenuti dallo spettrometro. Si calcola quindi una statistica di fit che ci permetta di giudicare se il modello “concorda” con i dati sperimentali.

I parametri del modello sono poi variati per trovare l'insieme dei parametri che fornisca la migliore statistica di fit. Questi valori diventeranno i *parametri del fit migliore (best fit parameters)* e lo spettro ottenuto con questi parametri verrà detto il *best fit model*  $f_b(E)$ .

Abbiamo già visto che la statistica di fit più comunemente utilizzata per determinare il *best fit* è quella del  $\chi^2$ , definita dall'Eq. 7.1 Una volta ottenuto un modello di *best fit* abbiamo visto che un test utile per determinare, tra tutti i possibili diversi modelli di *best fit* possibili quello “migliore” è attraverso il F-test.

Un altro importante argomento da considerare è la determinazione dell'intervallo di valori di un parametro di *best fit* all'interno del quale si possa essere confidenti che giaccia il vero valore del parametro. Questo intervallo viene detto *intervallo di confidenza* e viene calcolato variando il valore del parametro fino a quando il  $\chi^2$  aumenta di una certa quantità al di sopra del valore minimo o di *best fit*.

La quantità di cui il  $\chi^2$  viene aumentato (detto  $\Delta\chi^2$  critico) dipende dal livello di confidenza che viene richiesto e dal numero di parametri su cui lo si vuole calcolare. Il  $\Delta\chi^2$  critico per alcune situazioni standard è mostrato in Tabella 7.2

Riassumendo abbiamo che per effettuare un fit spettrale abbiamo bisogno di (i) uno spettro osservato  $C(I)$ ; (ii) una risposta del rivelatore  $R(I, E)$ ; (iii) un modello spettrale  $f(E)$ . Con queste tre componenti la procedura per ottenere il modello di *best fit* sarà:

- Si crea un modello spettrale parametrizzato che ci si aspetta rappresenti lo spettro vero della sorgente.
- Vengono dati dei valori iniziali ai parametri del modello.

Tabella 7.2: Intervalli di confidenza vs  $\Delta\chi^2$ 

Intervallo	Nr Parametri		
	1	2	3
Confidenza (%)			
68	1.00	2.30	3.50
90	2.71	4.61	6.25
99	6.63	9.21	11.3

- ❑ In base ai valori dei parametri assegnati, si predice quale sia lo spettro in conteggi in ogni canale che sarebbe rilevato dal nostro spettrometro per il modello dato.
- ❑ Si confronta lo spettro predetto con quello osservato dallo strumento.
- ❑ I valori dei parametri del modello vengono variati fino a quando non si ottiene il *best fit* tra il modello teorico ed i dati osservati.
- ❑ Si calcola la bontà del fit per determinare come il nostro modello descrive bene i dati osservati, e si calcolano gli intervalli di confidenza per i parametri del modello.

Vediamo ora di dettagliare le tre componenti di cui sopra.

#### ❑ **C(I): Lo spettro osservato**

Per ottenere lo spettro osservato  $C(I)$  per una data osservazione XSPEC utilizza due files: un file di dati (*data file*) ed un file di fondo (*background file*). Entrambi i files sono scritti in un formato binario denominato FITS<sup>1</sup>. Il file di dati contiene, tra le altre cose, la lista dei conteggi rivelati in ogni canale. XSPEC usa il file di fondo per determinare un tasso di conteggio (*count rate*) netto a fondo sottratto in unità di conteggi al secondo. Il fondo viene scalato ai dati per il rapporto delle keyword BACKSCAL contenute nei files dati e fondo. Inoltre il file di dati viene scalato per il tempo di esposizione (keyword EXPOSURE). Quindi il tasso di conteggio netto a fondo sottratto è dato da

$$C(I) = \frac{D(I)}{t_D} - \frac{b_D}{b_B} \frac{B(I)}{t_B} \quad (7.13)$$

dove  $D(I)$  e  $B(I)$  sono i conteggi nei due files di dati e fondo, e  $t_D$  e  $t_B$  sono i tempi di esposizione nei due files di dati e fondo.  $b_D$  e  $b_B$  sono i valori di BACKSCAL nei due files.

#### ❑ **R(I, E): La risposta dello strumento**

<sup>1</sup>La loro manipolazione può essere effettuata con i programmi contenuti nel pacchetto FTOOLS.

Prima che XSPEC possa prendere un insieme di valori dei parametri e predire lo spettro che sarebbe rivelato dallo strumento, è necessario che il programma conosca le caratteristiche specifiche dello strumento. Questa informazione è nota come *risposta del rivelatore*. Come abbiamo già visto,  $R(I, E)$  è proporzionale alla probabilità che un fotone incidente di energia  $E$  venga rivelato nel canale  $I$  del rivelatore. Con questa definizione  $R(I, E)$  è una funzione continua di  $E$ . Questa funzione continua viene convertita in una funzione a valori discreti dal programma che genera la cosiddetta **matrice di risposta**, che definisce gli intervalli di energia  $E_J$  tali che

$$R_D(I, J) = \int_{E_{J-1}}^{E_J} R(I, E) dE \quad (7.14)$$

XSPEC quindi legge gli intervalli di energia  $E_J$  e la matrice di risposta  $R_D(I, J)$  da un file di risposta (*response file*) che è scritto in un formato compresso che contiene solamente gli elementi non nulli della matrice. Con XSPEC è inoltre possibile utilizzare un file di risposta ausiliario (*auxiliary response file*) che contiene un vettore  $A_D(J)$  che XSPEC moltiplica con  $R_D(I, J)$  nel seguente modo

$$R_D(I, J) \rightarrow R_D(I, J) * A_D(J) \quad (7.15)$$

Per convenzione, la matrice di risposta è in unità di  $\text{cm}^2$ .

#### □ **f(E): Il modello di spettro**

Il modello di spettro  $f(E)$  viene calcolato all'interno di XSPEC utilizzando gli intervalli di energia definiti nella matrice di risposta

$$f_D(J) = \int_{E_{J-1}}^{E_J} f(E) dE \quad (7.16)$$

ed è in unità di fotoni  $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ . XSPEC permette la costruzione di modelli composti composti di componenti additive (ad esempio leggi di potenza, corpi neri, ecc) e componenti moltiplicative che modificano le componenti additive moltiplicandole per un fattore dipendente dall'energia (ad esempio assorbimento fotoelettrico, edges, ecc). I modelli possono essere definiti con una notazione algebrica. Ad esempio, la seguente espressione

$$\text{phabs}(\text{power} + \text{phabs}(\text{bbody}))$$

definisce un corpo nero assorbito ( $\text{phabs}(\text{bbody})$ ) aggiunto ad una legge di potenza. Il risultato è poi modificato da un'altra componente di assorbimento.

### □ Fit e intervalli di confidenza

Una volta che i dati sono stati letti ed il modello è stato definito, XSPEC usa un algoritmo di Levenberg-Marquard modificato (basato sulla routine CURFIT di Bevington) per trovare i valori di *best fit* dei parametri del modello. L'algoritmo usato, lavorando su di un intervallo ristretto nello spazio dei parametri, potrebbe ancorarsi in un minimo locale e non trovare il *best fit* globale. Ovviamente il processo di convergenza è molto più veloce se vengono dati dei valori iniziali ai parametri vicini ai valori attesi.

Alla fine del processo XSPEC mostrerà i valori dei parametri di *best fit*, insieme con gli intervalli di confidenza al 68% stimati dalle derivate rispetto ai parametri del modello. Questi intervalli di confidenza sono dati a puro titolo indicativo. Per calcolare gli intervalli di confidenza per un parametro di interesse XSPEC ha il comando `error` che fissa il parametro di interesse ad un particolare valore e fa un fit su tutti gli altri parametri. Vengono presi nuovi valori del parametro di interesse fino a quando non si è ottenuto il  $\Delta\chi^2$  richiesto. Per calcolare i nuovi valori del parametro di interesse a partire dal valore dato XSPEC usa un algoritmo di interpolazione cubica iterativa. Per calcolare intervalli di confidenza per diversi parametri contemporaneamente XSPEC può lavorare su di una "griglia" di valori dei parametri.

Vogliamo concludere questa breve introduzione all'analisi spettrale con XSPEC discutendo il caso in cui il nostro spettro sia stato accumulato da una sorgente molto debole e quindi il numero di conteggi in ogni (qualche) canale sia molto piccolo. In questo caso non è possibile utilizzare la statistica del  $\chi^2$  perché questa assume che i conteggi nei singoli canali seguano una distribuzione Gaussiana (in altre parole si assume che  $\sigma^2(I) = C(I)$ ). Una statistica alternativa, detta statistica C (dal nome dell'autore Cash), utilizza una funzione di verosimiglianza diversa dalla (7.1)

$$C = 2 \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i \ln y(x_i) + \ln y_i!) \quad (7.17)$$

dove  $y_i$  sono i dati osservati e  $y(x_i)$  i valori della funzione. I parametri di *best fit* si ottengono minimizzando  $C$  per qualche funzione modello  $y$ . E' importante sottolineare che nel caso pratico di dati spettrali, a questi **non deve essere stato sottratto il fondo**. Un approccio alternativo è quello di continuare ad usare la statistica di  $\chi^2$  ma di cambiare il peso dei singoli dati (utilizzando i comandi `weight gehrels` oppure `weight Churazov`).



# Appendice A

## Spettri X di Sorgenti Celesti

In questa appendice vengono mostrati gli spettri di alcune sorgenti celesti di raggi X, la cui analisi ed interpretazione è il fine ultimo di questo corso. Per ogni sorgente viene presentata una breve descrizione dei modelli utilizzati per concordare lo spettro.

I dati provengono dai cosiddetti strumenti a campo stretto (*Narrow Field Instruments*) a bordo del satellite BeppoSAX.

### A.1 CI Cam

Il giorno 1 Aprile 1998 una sorgente celeste fino ad allora al di sotto del limite di sensibilità degli strumenti a bordo dei satelliti per astronomia X allora in orbita, la stella simbiotica CI Cam, è improvvisamente diventata la sorgente piú luminosa del cielo X. Sono stati immediatamente allertati tutti i telescopi a Terra, per tenere sotto osservazione la sorgente sia nella banda ottica che in quella radio. Dopo pochi giorni la sorgente è ritornata al suo stato originario. La curva di luce (cioè la variazione della luminosità in funzione del tempo) nelle varie bande (X, ottica, radio) è mostrata in Figura A.1, con marcate le due osservazioni BeppoSAX (TOO1 e TOO2) di cui mostriamo gli spettri in Figura A.2 e A.3. Si noti come in pochi giorni lo spettro sia cambiato notevolmente (vedi Figura A.4 per il confronto): nella seconda osservazione è stata osservata la comparsa di una forte componente di bassa energia. Lo spettro è stato modellato con un processo di bremsstrahlung a due temperature ( $T_1 = 1.3$  keV,  $T_2 = 6.8$  keV per la prima osservazione e  $T_1 = 0.2$  keV,  $T_2 = 2.8$  keV per la seconda), con una serie di linee di emissione di fluorescenza relative agli elementi O, Ne/Fe-L, Si, S, Ca, Fe-K.

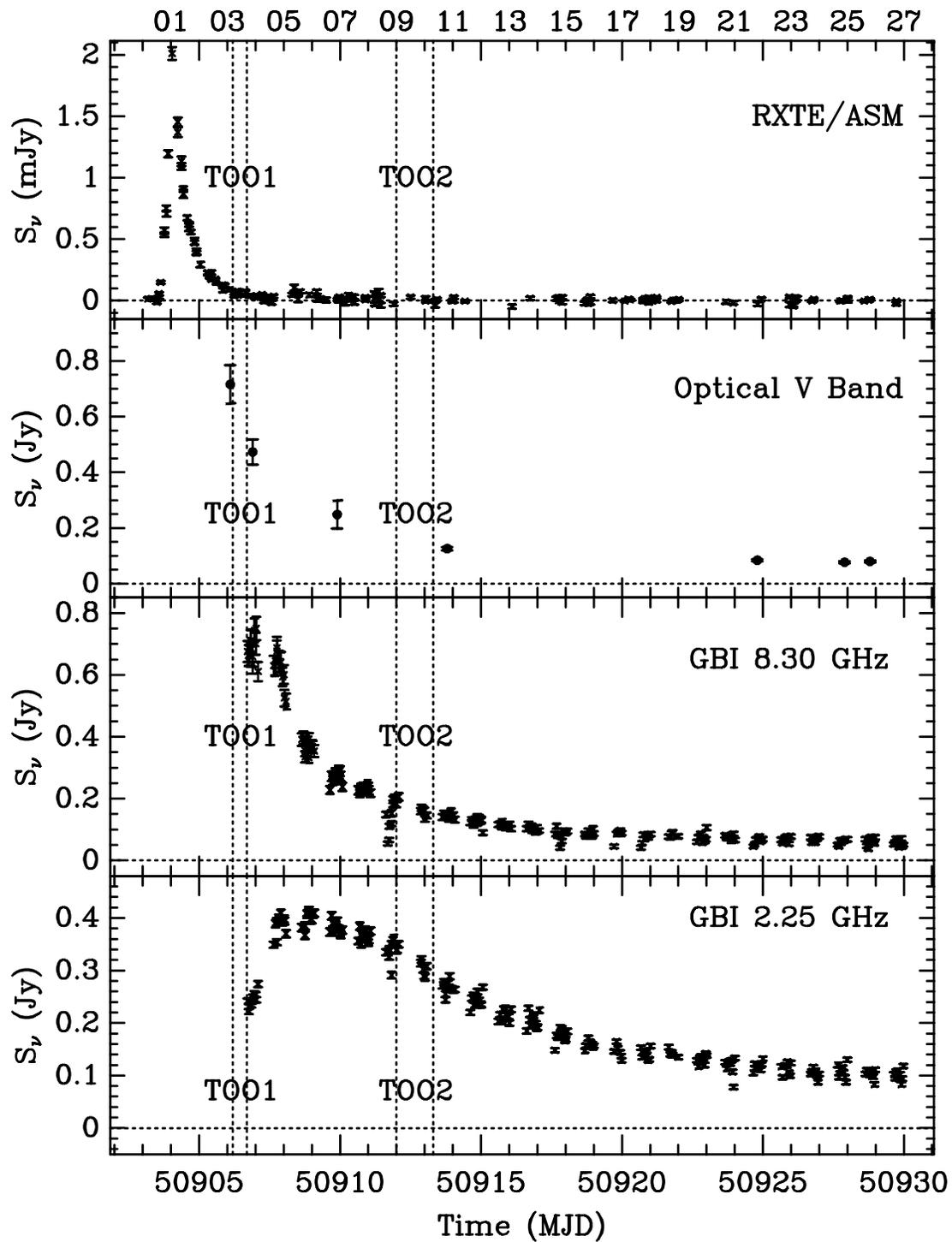


Figura A.1: Curve di luce di CI Cam in varie bande: raggi X (2–12 keV; RXTE/ASM), ottica V (Osservatorio di Loiano), e radio (8.3 GHz and 2.25 GHz, GBI). Le osservazioni BeppoSAX sono marcate con linee verticali. La scala in alto si riferisce ai giorni dell'Aprile 1998.

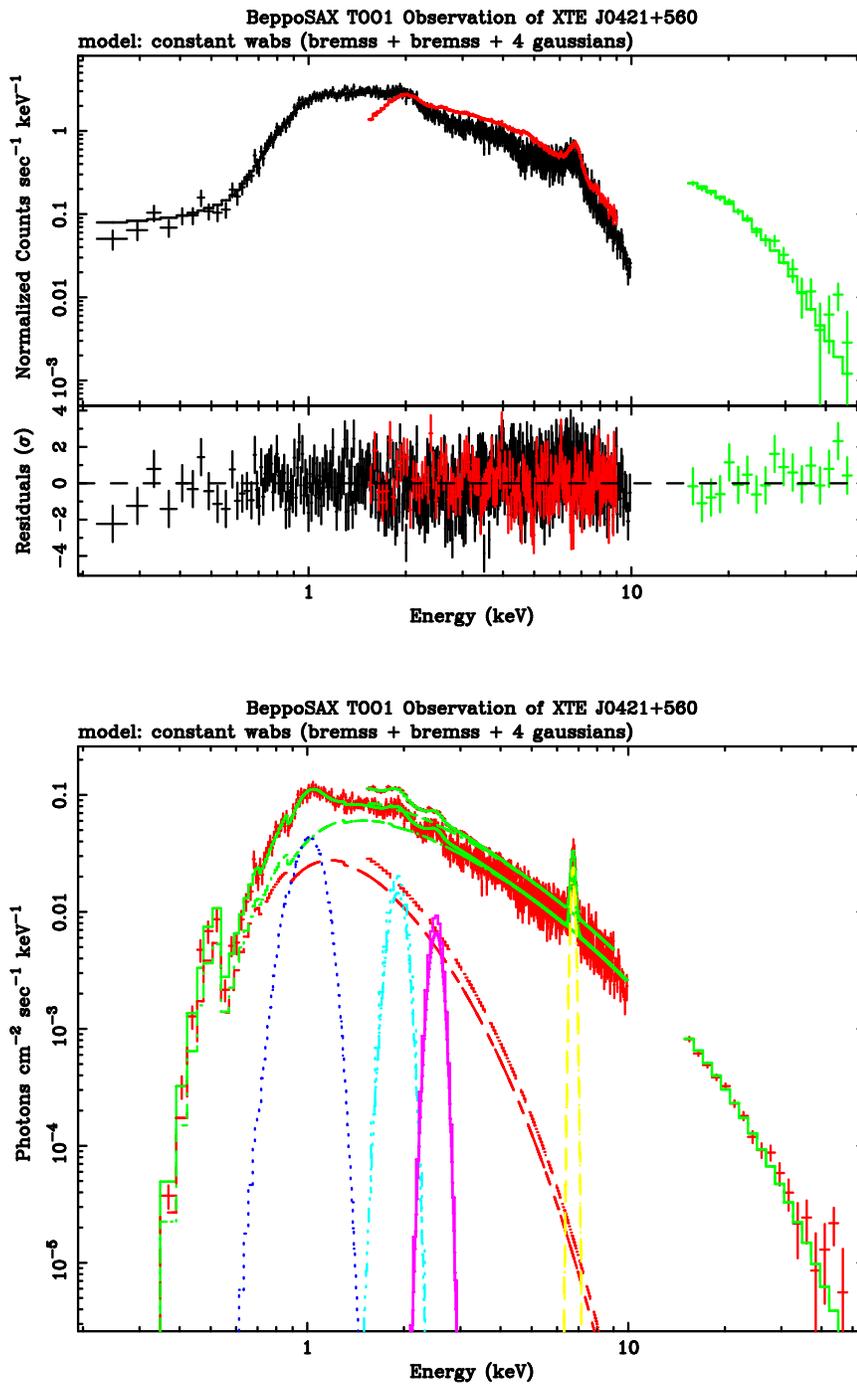


Figura A.2: Spettro di CI Cam osservato da BeppoSAX nella prima osservazione: in alto lo spettro in conteggi, in basso i modelli utilizzati per modellare lo spettro.

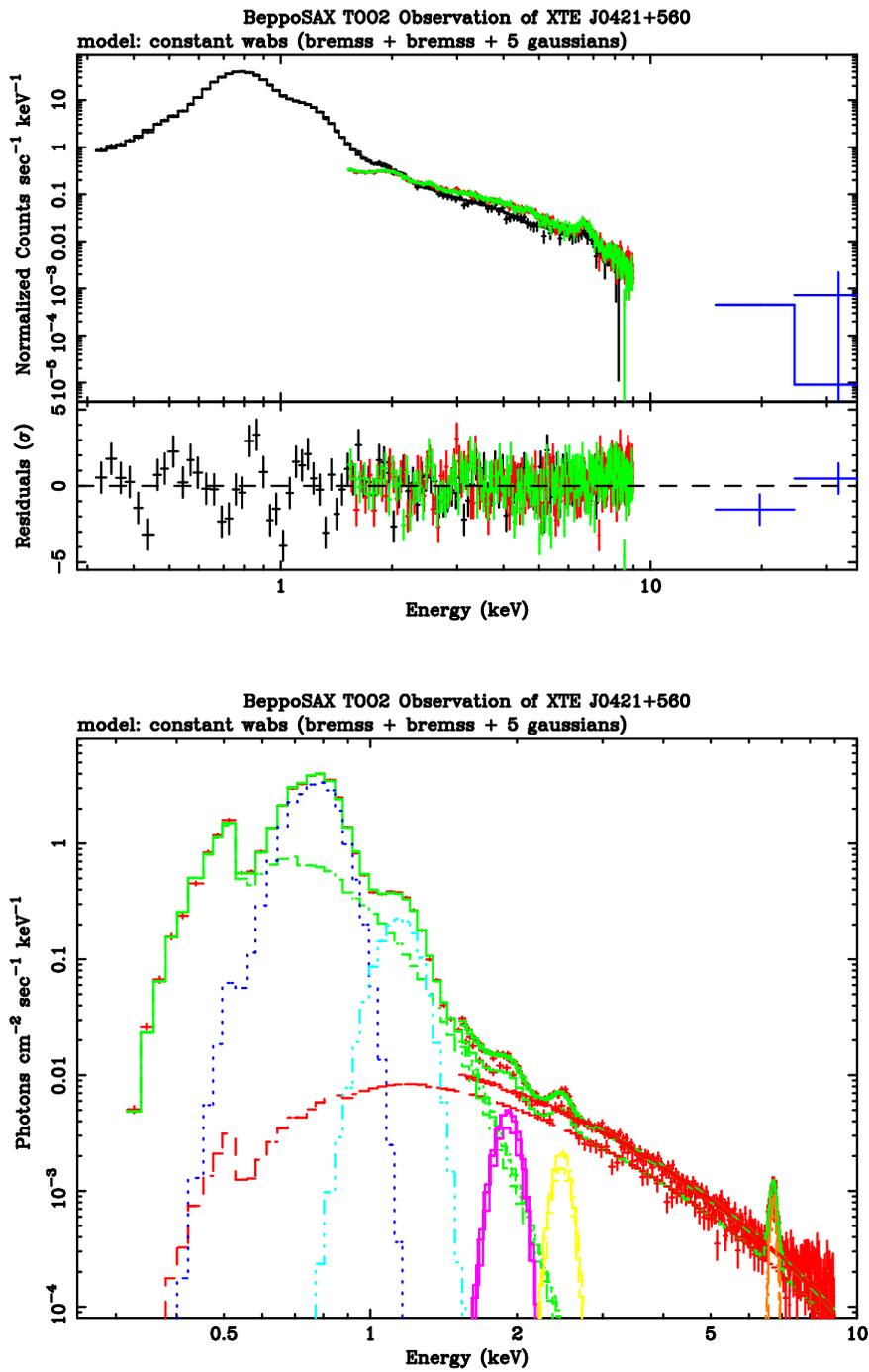


Figura A.3: Spettro di CI Cam osservato da BeppoSAX nella seconda osservazione: in alto lo spettro in conteggi, in basso i modelli utilizzati per modellare lo spettro.

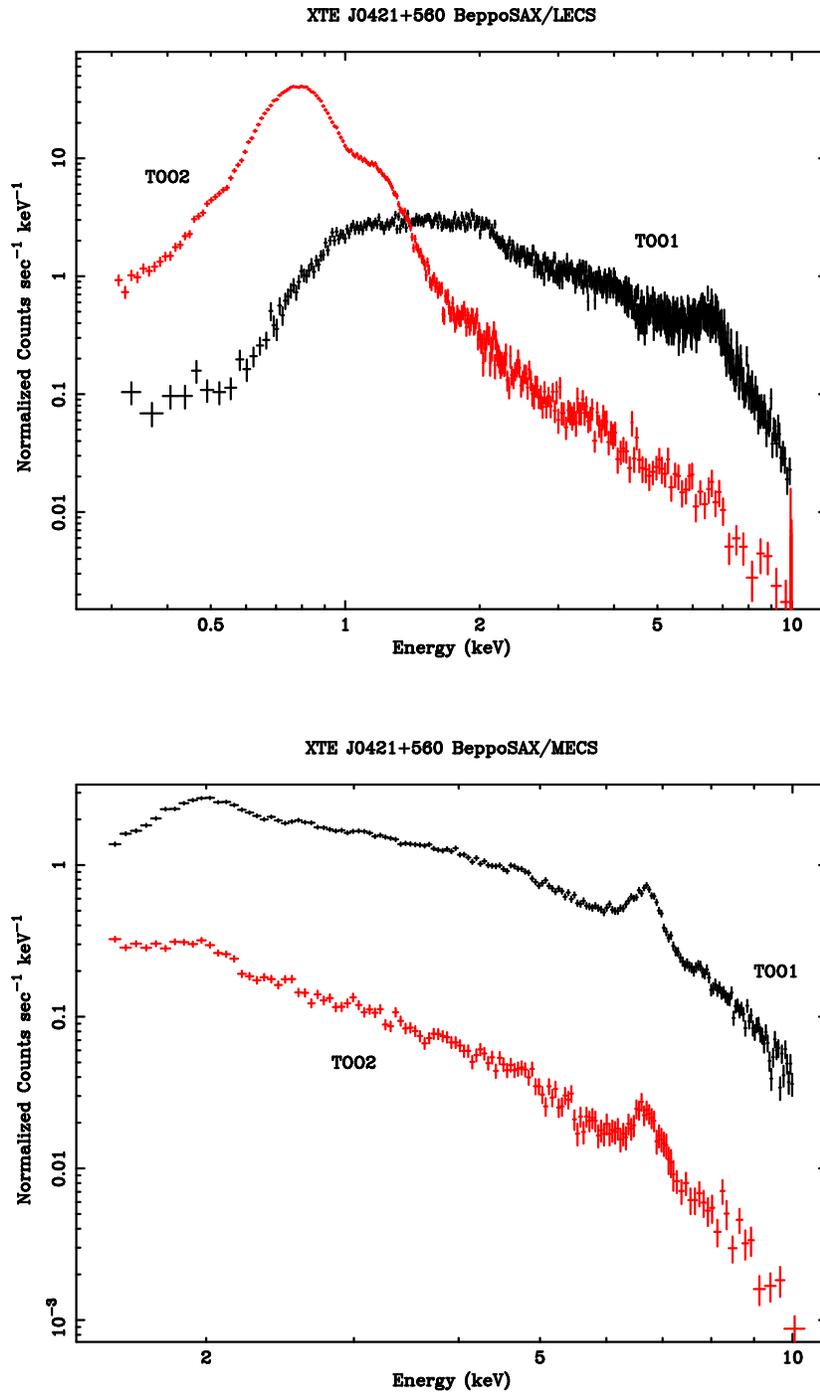


Figura A.4: Confronto tra gli spettri di CI Cam osservati nelle due osservazioni BeppoSAX: in alto gli spettri dello strumento LECS, sensibile nella banda 0.1–10 keV, in basso gli spettri misurati con lo strumento MECS, sensibile nella banda 1.8–10 keV. Si noti lo sviluppo di una componente di bassa energia (*soft component*) nella seconda osservazione (T002).

## A.2 Vela X-1

Vela X-1 è una pulsar X binaria, di periodo di pulsazione di 282 secondi, che accresce materia direttamente dal vento stellare proveniente dalla stella HD77581, di classe spettrale B0 Ib. Durante la sua orbita attorno al compagno (periodo orbitale di 8.96 giorni) l'emissione dalla pulsar mostra un elevato assorbimento fotoelettrico che aumenta fino a quando la sorgente viene eclissata per circa 1.7 giorni. Dallo studio della dipendenza orbitale dell'assorbimento fotoelettrico è stata rilevata la presenza di flussi di accrescimento. Lo spettro, tipico delle pulsar X, è mostrato in Figura A.5 e consiste in una legge di potenza modificata ad alta energia da un cutoff (che da un punto di vista fisico viene interpretato in termini di uno scattering Compton (vedi Sezione 5.5.5)). E' inoltre presente una intensa linea di fluorescenza dovuta al Ferro ed una riga di ciclotrone a  $\sim 57$  keV. Quest'ultima corrisponde ad una intensità del campo magnetico alla superficie della stella di neutroni di  $4.9 \times 10^{12}$  Gauss. In Figura A.6 si vede come la forma e l'energia della riga di ciclotrone siano fortemente dipendenti dal tipo di modello utilizzato per l'emissione continua.

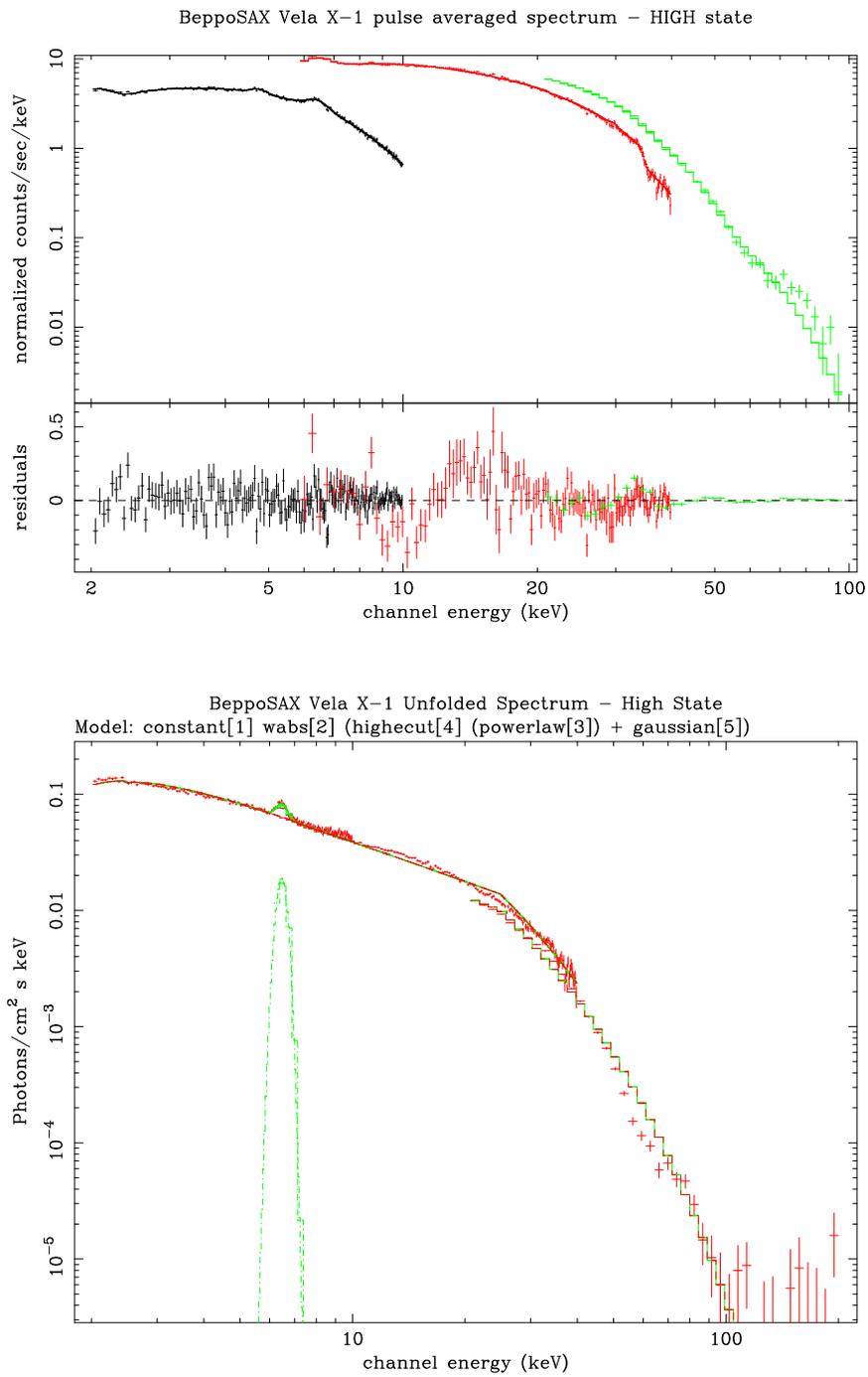


Figura A.5: Spettro della pulsar X binaria Vela X-1, con evidenziate nel pannello in basso le tipiche componenti.

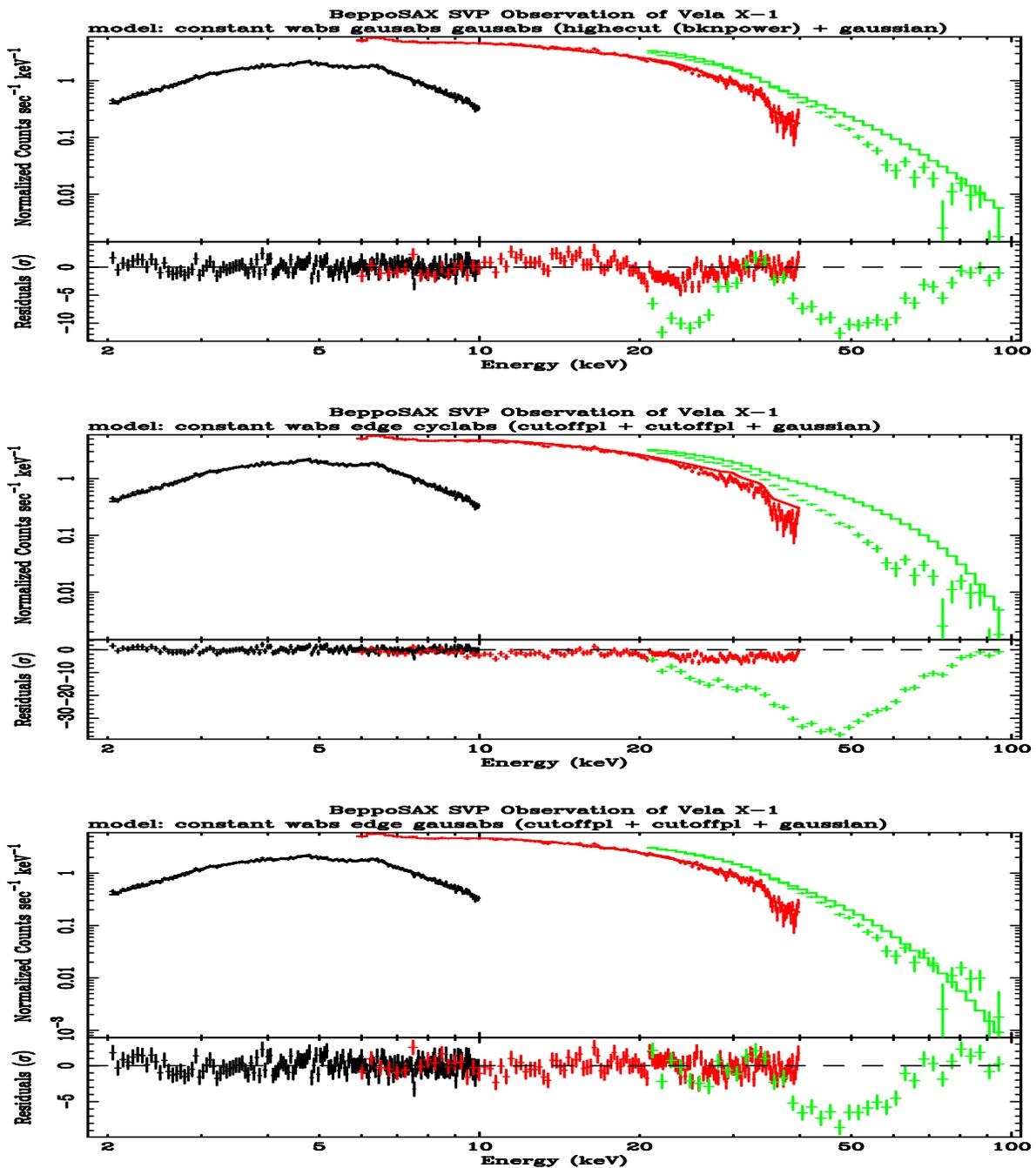


Figura A.6: Dipendenza della riga di ciclotrone nello spettro di Vela X-1 al variare del modello. Nel primo pannello l'emissione continua è stata modellata con una doppia legge di potenza con cutoff esponenziale; nel pannello centrale con due leggi di potenza con cutoff esponenziale e la risonanza di ciclotrone con un profilo Lorentziano; nel terzo pannello si è utilizzato lo stesso modello per l'emissione continua, ma si è modellata la risonanza con un profilo Gaussiano.

### A.3 4U1626–67

La pulsar X binaria 4U1626–67 (periodo di pulsazione 7.7 secondi) è uno dei pochi pulsatori X appartenente al gruppo delle *Low Mass X-ray Binaries* (LMXRBs), cioè sistemi in cui il compagno dell'oggetto compatto è una stella di piccola massa. Infatti, il sistema è composto da una stella di massa  $0.02\text{--}0.08 M_{\odot}$  e periodo orbitale di 42 minuti. In Figura A.7 vengono mostrate le componenti dello spettro misurato dagli strumenti a bordo di BeppoSAX. La componente di bassa energia, modellata come emissione di corpo nero di temperatura di  $\sim 300$  eV, viene interpretata come dovuta all'emissione termica dalla superficie della stella di neutroni. La riga di ciclotrone a 38 keV corrisponde ad un campo magnetico alla superficie della stella di neutroni di  $3.2 \times 10^{12}$  Gauss.

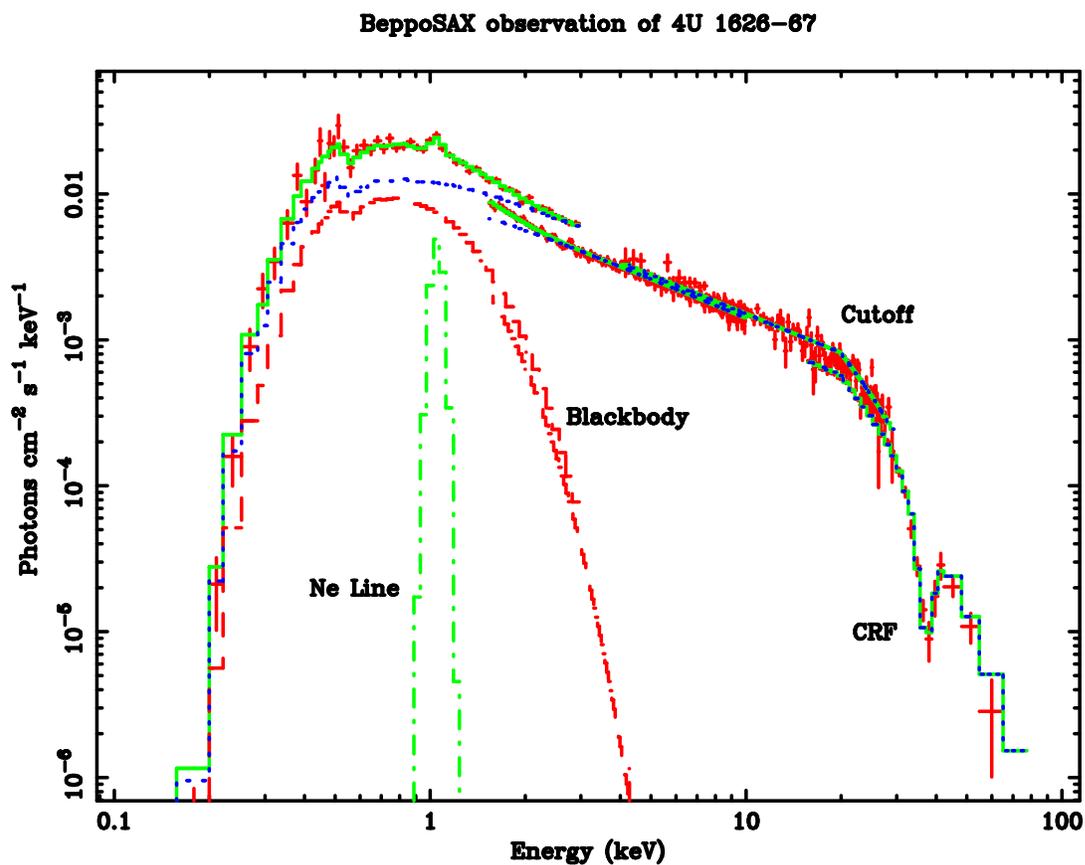


Figura A.7: Componenti dello spettro della pulsar X binari 4U1626–67 osservato dagli strumenti a bordo di BeppoSAX.



## Appendice B

### Derivazione di Eq. 5.29

In questa appendice deriveremo nel dettaglio la variazione della velocità subita da una particella (elettrone), di carica  $-e$ , che si muove nel campo di uno ione di carica  $Ze$  (si veda la discussione riguardante il processo di bremsstrahlung, Sezione 5.4). Vogliamo cioè dimostrare Eq. 5.29 di pagina 43. Dato che la traiettoria è quasi rettilinea (abbiamo supposto piccole deflessioni) il cambio di velocità avverrà essenzialmente in direzione perpendicolare al moto della particella. Pertanto avremo che durante la collisione

$$m \Delta \mathbf{v} = Z e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \theta}{r^2} dt \quad (\text{B.1})$$

dove abbiamo utilizzato la legge di Coulomb e considerato soltanto la componente perpendicolare della velocità (da cui il termine  $\cos \theta$ ). Dalla Figura B.1 possiamo vedere come

$$r = \sqrt{b^2 + v^2 t^2} \quad (\text{B.2a})$$

$$\cos \theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + v^2 t^2}} \quad (\text{B.2b})$$

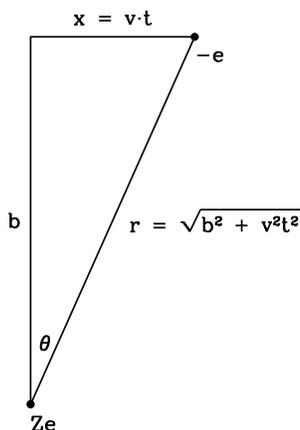


Figura B.1: Collisione di un elettrone con uno ione ed emissione di bremsstrahlung.

quindi, sostituendo queste relazioni in Eq. B.1, otteniamo

$$\Delta v = \frac{Ze^2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \quad (\text{B.3})$$

Se operiamo il cambio di variabile  $x = v \cdot t$ , allora l'integrale diventa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{b}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{b}{v} \left[ \frac{x}{b^2 \sqrt{b^2 + x^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{b}{v} \frac{2}{b^2} = \frac{2}{vb}$$

Eq. B.3 diventa quindi

$$\Delta v = \frac{2Ze^2}{mvb}$$