

# **Misure Astrofisiche**

## **Parte II**

Mauro Orlandini

[orlandini@iasfbo.inaf.it](mailto:orlandini@iasfbo.inaf.it)

# Introduzione

Con il termine “Astrofisica delle Alte Energie” si intende quella parte dell’astrofisica che studia i processi fisici che avvengono in sorgenti celesti che hanno il loro picco di emissione nella banda dei raggi X/ $\gamma$ . I processi maggiormente coinvolti saranno quindi scattering Compton e bremsstrahlung e nella maggior parte dei casi interesseranno oggetti compatti, oggetti cioè il cui parametro di compattezza, definito come il rapporto tra la loro massa ed il loro raggio, è molto grande.

La prima evidenza osservativa che in sorgenti che emettono raggi X sono presenti oggetti “compatti” nel senso proprio del termine — cioè oggetti di piccole dimensioni e di enormi densità — è avvenuta nel 1971 con la scoperta di emissione pulsata a 4.8 sec da parte della sorgente X-3 nella costellazione del Centauro. Assumendo che la pulsazione osservata fosse dovuta al moto di rotazione della stella su se stessa (ipotesi poi rivelatasi corretta), affinché la superficie della stella non venga distrutta dalla forza centrifuga è necessario che

$$\frac{GM}{R^2} \gtrsim \Omega^2 R$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale,  $\Omega$  la velocità angolare e  $M$  e  $R$  sono la massa ed il raggio dell'oggetto. Da questa espressione segue che  $G \langle \rho \rangle \gtrsim \Omega^2$ , dove  $\langle \rho \rangle$  è la densità media dell'oggetto. Un periodo di rotazione di 4.8 sec implica che  $\langle \rho \rangle \gtrsim 10^7 \text{ g cm}^{-3}$ , da cui la natura compatta dell'oggetto.

Questa scoperta ha aperto un nuovo orizzonte di ricerca perché, per la prima volta, si potevano studiare contemporaneamente gli effetti sulla materia dovuti sia a forti campi gravitazionali<sup>1</sup> che ad enormi campi magnetici<sup>2</sup>. Le due discipline che li studiano, la teoria della relatività (sia generale che ristretta) e la magnetoidrodinamica (quantistica), trovavano quindi il loro laboratorio ideale nelle cosiddette pulsar X. Proprio per questo, un termine più appropriato per questa branca della fisica dovrebbe essere *Astrofisica Relativistica*, ma la dizione "Astrofisica delle Alte Energie" viene ancora mantenuta per ragioni storiche.

<sup>1</sup>Il rapporto tra la forza di gravità su di una stella di neutroni ( $M \sim M_\odot$  e  $R_{\text{ns}} \sim 10 \text{ Km}$ ) e quella sulla superficie della Terra è  $(M_\odot/M_\oplus)(R_\oplus/R_{\text{ns}})^2 \sim 10^{10}$ .

<sup>2</sup>Per conservazione del flusso magnetico, una stella di neutroni che abbia avuto come progenitore una stella di tipo solare con campo magnetico  $\sim 100$  gauss, possederà un campo magnetico dell'ordine di  $100 \cdot (R_\odot/R_{\text{ns}})^2 \sim 10^{12}$  gauss.

Il fatto che questi oggetti producano la maggior parte della loro energia nella banda dei raggi X implica che il loro “motore” non sia la conversione dell’energia gravitazionale in energia termica (attraverso le reazioni nucleari la cui emissione viene termalizzata dall’atmosfera stellare, come nel nostro Sole) dato che gli spettri osservati non sono termici. Subito dopo la loro scoperta ci si è reso conto che il loro “motore” è la conversione in energia elettromagnetica dell’energia cinetica della materia che viene catturata dal campo gravitazionale dell’oggetto compatto: il cosiddetto *accrescimento di materia*. Infatti l’evidenza di moto orbitale dell’oggetto compatto di Cen X-3 è stata la prima prova osservativa che questo tipo di sorgenti sono sistemi binari contenenti un oggetto compatto (nana bianca, stella di neutroni o buco nero) ed una stella “normale” a cui strappano materia; a questi sistemi è stato dato il nome di binarie X.

Tra le tante “Misure Astrofisiche” che possono essere effettuate ho scelto ***la misura di uno spettro X emesso da un oggetto compatto***. Alla luce di quanto detto sopra, il corso si occuperà quindi dello studio dell'emissione da parte di oggetti compatti, della determinazione dei processi che hanno dato origine all'emissione osservata, e la determinazione delle proprietà fisiche della materia in questi sistemi.

Dopo l'introduzione del concetto di accrescimento nel primo capitolo, nel secondo e nel terzo vengono dati i fondamenti di dinamica dei gas e dei plasmi che servono a descrivere le condizioni del flusso di materia che viene catturato ed accresciuto. Nel successivo capitolo vengono descritti i processi radiativi che sono alla base dell'emissione osservata in questi sistemi.

Dopo l'introduzione "teorica" dei processi fisici, viene data una panoramica sui sistemi di rilevazione dei raggi X di natura cosmica, per poter comprendere quali sono le problematiche sperimentali e capire la maniera in cui gli spettri vengono prodotti. Particolare rilievo è stato dato alla descrizione dei rivelatori a bordo del satellite per Astronomia X BeppoSAX, ideato e costruito dagli Istituti di Astrofisica del CNR (ora confluiti nell'INAF) in collaborazione con un Istituto del CNR Olandese e lo Science Department dell'Agenzia Spaziale Europea. Lo strumento di alta energia PDS era sotto la responsabilità del Professor Frontera ed è stato realizzato dal gruppo di Astronomia X dell'Istituto TeSRE (ora IASF) del CNR di Bologna, di cui faccio parte.

Lo strumento informatico di analisi spettrale in raggi X, il programma XSPEC, viene brevemente descritto nell'ultimo capitolo, in cui vengono dati i rudimenti dell'analisi spettrale ed una brevissima introduzione di statistica per comprendere come ottenere lo spettro che meglio si concorda con i dati, ed i parametri fisici ad esso associato.

Infine, copia di queste dispense è disponibile online al sito <http://www.iasfbo.inaf.it/~mauro/Didattica/corsoX>

## Bibliografia essenziale

- ❑ **Accretion Power in Astrophysics**, Frank J., King A., and Raine D., Cambridge University Press (2002)
- ❑ **Radiative Processes in Astrophysics**, Rybicki G.B. and Lightman A.P., Wiley Publication (1979)
- ❑ **X-ray Astronomy**, Giacconi R. and Gursky H. (eds), Reidel Publishing (1974)
- ❑ **Astrofisica delle Alte Energie**, Vietri M., Bollati Boringhieri (2006)
- ❑ **Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing**, Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A. and Vetterling W.T., Cambridge University Press (1992) disponibile anche online al sito <http://www.nr.com>
- ❑ **SAX Observers' Handbook**, disponibile online al sito <ftp://ftp.asdc.asi.it/pub/sax/doc/handbook>
- ❑ **The Gamma Ray Lens**, disponibile online al sito <http://sci.esa.int/science-e/www/object/index.cfm?fobjectid=38094>



❑ **XSPEC User Manual** disponibile online al sito <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/xanadu/xspec>

# **Accrescimento come Sorgente di Energia**

## 2.1 Fonti di energia per sorgenti cosmiche di raggi X

Per i fisici del 19° secolo l'unica fonte di energia in grado di spiegare l'emissione da sorgenti cosmiche era la gravità. Fu lo stesso Lord Kelvin a ricavare un tempo scale di durata della vita del nostro Sole assumendo che la sua luminosità  $L_{\odot}$  venga prodotta da contrazione gravitazionale:  $\tau_{\text{KH}} = GM_{\odot}^2 / R_{\odot} L_{\odot} \simeq 3 \cdot 10^7$  anni. Già allora questo valore era troppo piccolo rispetto all'età della stessa Terra. Nel 20° secolo, con la scoperta delle reazioni nucleari, la fonte di energia del nostro Sole è stata identificata con la reazione nucleare di fusione di quattro atomi di Idrogeno in un atomo di Elio ( $4\text{H}_1^1 \rightarrow \text{He}_2^4 + 2e^+ + 2\nu_e + n\gamma$ ). Questa reazione avviene inoltre al ritmo "giusto", producendo il giusto equilibrio tra forze di radiazione e forze gravitazionali.

Con lo sviluppo di tecniche di rivelazione in altre bande dello spettro elettromagnetico, dal radio ai raggi X e  $\gamma$ , ci si è resi conto sia dell'esistenza di oggetti compatti (previsti teoricamente), sia che la gravità ricopre un ruolo fondamentale per la produzione di radiazione ad alta energia.

In particolare, **l'accrescimento** di materia, cioè la conversione dell'energia cinetica della materia che viene accresciuta in radiazione elettromagnetica, è stato riconosciuto come il motore principale in grado di spiegare l'emissione per sistemi contenenti oggetti compatti.

Possiamo dare una stima, per ordine di grandezza, dell'energia prodotta per unità di massa nel caso in cui la fonte sia energia gravitazionale

$$\frac{\Delta E_{\text{acc}}}{m} = G \left( \frac{M_*}{R_*} \right) \simeq \begin{cases} 10^{20} \text{ erg g}^{-1} & \text{SN} \\ 10^{17} \text{ erg g}^{-1} & \text{NB} \end{cases} \quad (2.1)$$

Se l'oggetto che accresce è una stella di neutroni (SN), allora  $M_* \sim 1M_{\odot}$  e  $R_* \sim 10 \text{ Km}$ ; per una nana bianca (NB) avremo invece  $M_* \sim 1M_{\odot}$  e  $R_* \sim 10^9 \text{ cm}$ .

Per confronto, l'energia prodotta per unità di massa per fusione nucleare ( $4\text{H}_1^1 \rightarrow \text{He}_2^4$ ) è:

$$\frac{\Delta E_{\text{nuc}}}{m} = 0.007 c^2 \simeq 6 \cdot 10^{18} \text{ erg g}^{-1} \quad (2.2)$$

Come vediamo, l'efficienza del processo di accrescimento è funzione del **parametro di compattezza**  $M/R$ .

## 2.2 Il limite di Eddington

Per un dato valore del parametro di compattezza, la luminosità di un sistema la cui fonte principale è l'accrescimento di massa dipenderà dal tasso di accrescimento  $\dot{M}$ . Per alte luminosità lo stesso tasso di accrescimento potrebbe essere controllato dal momento della quantità di moto (da ora in poi momento) trasferito dalla radiazione alla materia che accresce attraverso processi di scattering e assorbimento. Questo può dar luogo ad una luminosità limite.

Si consideri il caso di accrescimento **stazionario** ed a **simmetria sferica**.

Assumiamo inoltre che la materia in accrescimento **sia composta principalmente da Idrogeno e sia completamente ionizzata**. Lo scattering

Thomson dei fotoni<sup>3</sup> avverrà principalmente sugli elettroni, dato che

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \simeq 6.7 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

---

<sup>3</sup>Quando radiazione investe una particella carica, questa verrà accelerata e quindi emetterà radiazione a sua volta, con la stessa frequenza della radiazione incidente nel caso non relativistico

dove  $r_0 = e^2/mc^2 \sim 2.8 \cdot 10^{-13}$  cm per un elettrone, misura la “dimensione” di una carica puntiforme assumendo che tutta l’energia a riposo sia di origine elettromagnetica.

Se indichiamo con  $S$  il flusso di energia (in unità di  $\text{erg cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ ) allora la forza dovuta alla radiazione sarà data da

$$F_{\text{rad}} = \sigma_{\text{T}} \frac{S}{c}$$

La forza elettrostatica di Coulomb tra elettroni e protoni fa sì che mentre la radiazione spinge gli elettroni, questi ultimi si *trascinano* con loro anche i protoni. La forza di gravità agisce quindi sul sistema elettrone-protone con forza

$$F_{\text{grav}} = G \frac{M(m_p + m_e)}{r^2} \simeq G \frac{Mm_p}{r^2}$$

Se la luminosità (in unità di  $\text{erg sec}^{-1}$ ) è  $L$  allora il flusso di energia sarà  $S = L/4\pi r^2$ , avendo assunto simmetria sferica. Quindi una coppia elettrone-protone sarà soggetta alla forza

$$F_{\text{tot}} = F_{\text{grav}} - F_{\text{rad}} = \left( GMm_p - \frac{\sigma_T L}{4\pi c} \right) \frac{1}{r^2}$$

La luminosità limite, detta luminosità di Eddington, si ottiene quando

$$L_{\text{Edd}} = 4\pi c \frac{GMm_p}{\sigma_T} \simeq 1.3 \cdot 10^{38} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ erg sec}^{-1} \quad (2.3)$$

Per  $L \gg L_{\text{Edd}}$  la pressione di radiazione è maggiore della forza gravitazionale e quindi l'accrescimento viene interrotto.

Nel caso di accrescimento *non simmetrico*, se questo avviene su una frazione  $f$  della superficie della stella, allora il limite sarà  $fL_{\text{Edd}}$ .

Per processi *non stazionari* (vedi esplosioni di supernova)  $L_{\text{Edd}}$  può essere superata di molti ordini di grandezza.

Il limite di Eddington implica un limite sul tasso di accrescimento **stazionario**

$$L_{\text{acc}} = G \frac{M\dot{M}}{R_*} \simeq \begin{cases} 1.3 \cdot 10^{36} \dot{M}_{16} (M/M_\odot) (10 \text{ Km}/R_*) \text{ erg sec}^{-1} \\ 1.3 \cdot 10^{33} \dot{M}_{16} (M/M_\odot) (10^9 \text{ cm}/R_*) \text{ erg sec}^{-1} \end{cases} \quad (2.4)$$

quindi

$$\dot{M}_{16|sta} \leq \begin{cases} 10^2 & \text{Stella Neutroni} \\ 10^5 & \text{Nana Bianca} \end{cases}$$

Nel caso di un buco nero si preferisce parametrizzare la luminosità di accrescimento in termini dell'efficienza  $\eta$  di conversione dell'energia a riposo per unità di massa in radiazione

$$\begin{aligned} L_{acc} &= \eta \dot{M} c^2 \\ &= 2\eta G \frac{M\dot{M}}{R_*} \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove abbiamo usato  $R_* = 2GM/c^2$  come “raggio” di un buco nero. Come abbiamo visto, per la reazione di fusione nucleare  $4\text{H}_1^1 \rightarrow \text{He}_2^4$  abbiamo  $\eta = 0.007$ . Da osservazioni di AGN si stima che per un buco nero  $\eta \simeq 0.1$ , dello stesso ordine di grandezza ( $\sim 0.15$ ) di quella stimata per una stella di neutroni, nonostante il parametro di compattezza sia alquanto diverso.



## 2.3 Lo spettro di emissione

Diamo ora alcune stime, per ordine di grandezza, dello spettro di emissione che ci aspettiamo da un oggetto compatto in accrescimento di massa e vediamo se è possibile ricavare informazioni sul tipo di oggetto compatto dalla rivelazione del suo spettro. Definiamo innanzi tutto tre temperature

$$T_{\text{rad}} = \frac{h\bar{\nu}}{k} \iff kT_{\text{rad}} = h\bar{\nu} \quad (2.6a)$$

$$T_{\text{b}} = \left( \frac{L_{\text{acc}}}{4\pi R_*^2 \sigma} \right)^{1/4} \iff \frac{L_{\text{acc}}}{4\pi R_*^2} = \sigma T_{\text{b}}^4 \quad (2.6b)$$

$$T_{\text{th}} = \frac{GMm_{\text{p}}}{3kR_*} \iff G \frac{M(m_{\text{e}} + m_{\text{p}})}{R_*} = 2 \times \frac{3}{2} kT_{\text{th}} \quad (2.6c)$$

Nel caso di un mezzo *otticamente spesso* la radiazione raggiunge l'equilibrio termico con la materia che accresce **prima** che questa raggiunga l'osservatore, e quindi  $T_{\text{rad}} \simeq T_{\text{b}}$ .

Nel caso di un mezzo *otticamente sottile* l'energia di accrescimento è convertita direttamente in energia elettromagnetica e raggiunge l'osservatore, quindi  $T_{\text{rad}} \simeq T_{\text{th}}$ .

Dato che un sistema non può irradiare ad una temperatura minore di  $T_{\text{b}}$ , avremo che

$$T_{\text{b}} \leq T_{\text{rad}} \leq T_{\text{th}}$$

valida se possiamo caratterizzare il sistema con una unica temperatura.

Dalla definizione abbiamo che l'intervallo di emissione atteso per una stella di neutroni ed una nana bianca è

$$1 \text{ keV} \leq h\bar{\nu} \leq 50 \text{ MeV} \quad \text{Stella Neutroni}$$

$$6 \text{ eV} \leq h\bar{\nu} \leq 100 \text{ keV} \quad \text{Nana Bianca}$$

# Elementi di Dinamica dei Gas

### 3.1 Dinamica dei gas

Tutta la materia che viene accresciuta si trova nello stato di gas, cioè le sue particelle (elettroni liberi piú varie specie di ioni) interagiscono direttamente **solamente per collisioni**, invece che attraverso forze a “corto raggio”.

Una particella percorrerà una certa distanza, detta *libero cammino medio*  $\lambda$ , prima di cambiare il suo stato a causa di una collisione con un'altra particella. Se il gas è sufficientemente uniforme su lunghezze-scala dell'ordine alcune volte il libero cammino medio, l'effetto delle collisioni sarà quello di rendere casuali (“randomizzare”) le velocità delle particelle attorno ad una velocità media, che chiameremo velocità del gas  $v$ .

Se ci poniamo nel sistema di riferimento che si muove a velocità  $v$ , le particelle avranno una distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann e possono essere descritte da una temperatura  $T$ . Se siamo interessati a lunghezze-scala  $l \gg \lambda$ , possiamo considerare il gas come un **fluido**, caratterizzato da una velocità  $v$ , temperatura  $T$  e densità  $\rho$  in ogni punto.

Possiamo quindi studiare il comportamento di queste variabili in funzione della posizione e del tempo imponendo le leggi di conservazione della massa, del momento e dell'energia. Questo è il dominio di studio della dinamica dei gas.

Se vogliamo tenere in conto le interazioni tra particelle, allora dobbiamo considerare la fisica dei plasmi (o meglio la teoria cinetica dei plasmi).

Se dalla risoluzione delle equazioni troviamo che si hanno grandi variazioni dei parametri su lunghezze scala comparabili con il libero cammino medio delle particelle, allora l'approssimazione a fluido non è più valida e dobbiamo utilizzare la teoria cinetica dei plasmi.

### 3.2 Le equazioni della dinamica dei gas

Ricaviamoci ora le equazioni che governano la dinamica di un gas partendo dalle tre leggi di conservazione. Avremo inoltre bisogno, per descrivere completamente il flusso del gas, di una equazione di stato e di una appropriata scelta delle condizioni al contorno.

#### □ Conservazione della massa (equazione di continuità)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1)$$

## □ Equazione di stato

A causa del moto termico delle sue particelle, il gas è caratterizzato da una pressione  $P$  in ogni punto. L'equazione di stato mette in relazione questa pressione con la densità e la temperatura del gas. I gas "astrofisici" obbediscono alla legge dei gas perfetti

$$P = \frac{\rho kT}{\mu m_H} \quad (3.2)$$

dove  $m_H \simeq m_p$  è la massa dell'atomo di Idrogeno e  $\mu$  è il peso molecolare medio, che è la massa media, per particella di gas, misurata in unità di  $m_H$ . Quindi  $\mu = 1$  per l'Idrogeno neutro,  $1/2$  per Idrogeno ionizzato, e qualcosa nel mezzo per una miscela di gas con abbondanze cosmiche, dipendente dal grado di ionizzazione.

## □ Conservazione del momento

Gradienti nella pressione del gas implicano forze, dato che del momento viene trasferito. Indichiamo con  $\mathbf{f}$  la densità (forza per unità di volume) di ogni altro tipo di forze agenti sul sistema e non dovute a gradienti di pressione. La conservazione del momento (detta anche **equazione di Eulero**) ha allora la forma

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f} \quad (3.3)$$

Il termine  $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  rappresenta la conservazione del momento attraverso il fluido a causa del gradiente di velocità. La presenza di questo termine significa che sono possibili moti stazionari anche nel caso in cui  $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$  ma  $\mathbf{v} \neq 0$ .

Un esempio di forza esterna è la gravità:  $\mathbf{f} = -\rho \mathbf{g}$ . Un altro esempio è la forza dovuta ad un campo magnetico esterno.



Un altro esempio importante di forza esterna è la viscosità, che è il trasferimento di momento lungo gradienti di velocità a causa di moti turbolenti o moti termici.

## □ Conservazione dell'energia

Un elemento di gas possiede due forme di energia: energia cinetica (per unità di volume)  $\frac{1}{2}\rho v^2$  ed energia interna (termica)  $\rho\varepsilon$ , dove  $\varepsilon$ , l'energia interna per unità di massa, dipende dalla temperatura del gas. Per il teorema di equipartizione dell'energia, ad ogni grado di libertà della particella del gas è assegnata una energia media  $\frac{1}{2}kT$ . Per un gas mono-atomico, gli unici gradi di libertà sono i tre traslazionali, e quindi

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu m_H} \quad (3.4)$$

Se il gas è formato da molecole, vi saranno ulteriori gradi di libertà dovuti alla rotazione e vibrazione molecolari.

L'equazione di conservazione dell'energia ha dunque la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon + P \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (3.5)$$

Il membro a sinistra ci ricorda l'equazione di continuità, con  $(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \varepsilon)$  la quantità conservata. Il termine contenente  $P$  rappresenta il lavoro dovuto alla pressione.

Nel membro di destra compaiono due nuove quantità: il vettore flusso radiativo  $\mathbf{F}_{\text{rad}}$  ed il vettore flusso di calore per conduzione  $\mathbf{q}$ .

Per definire queste quantità è necessario introdurre il concetto di trasporto radiativo e trovare le equazioni che lo governano.

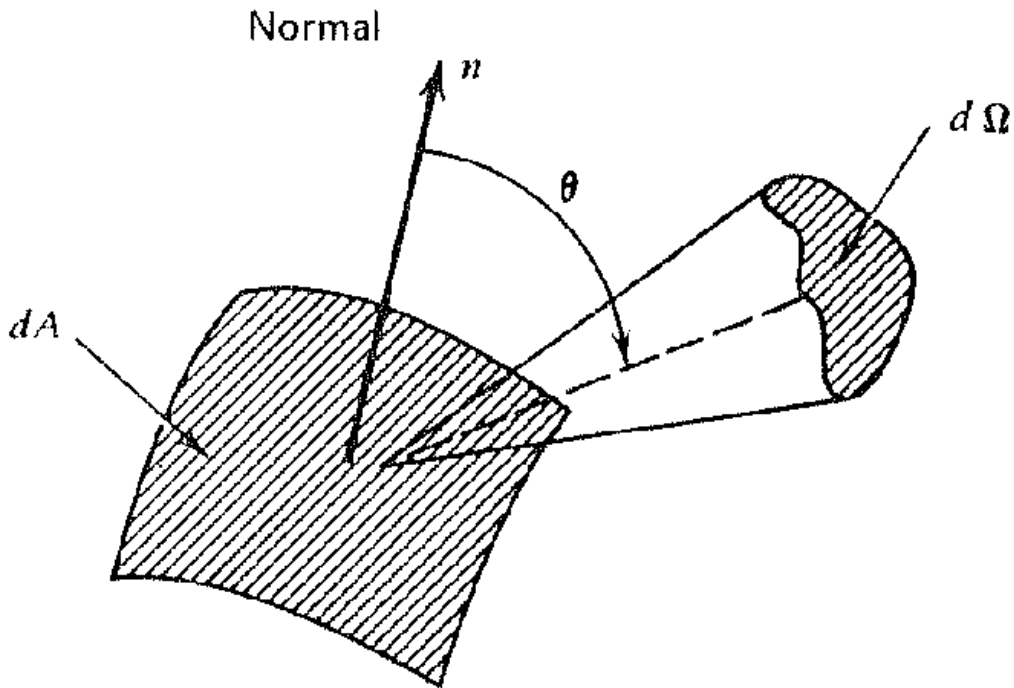


Figura 3.1: Geometria per raggi incidenti formanti un angolo  $\theta$  con la normale  $n$  all'unità di area  $dA$ .

### 3.3 Trasporto radiativo: Introduzione

Per definire il flusso radiativo introduciamo la grandezza fisica che ne è alla base, la *intensità specifica*  $I_\nu$ , la quale fornisce il flusso di energia  $dE$  per unità di tempo, per unità di area, per unità di angolo solido, per unità di frequenza in una direzione  $n$  nel punto  $r$  che attraversa l'unità di area perpendicolare a  $n$  al tempo  $t$ . Quindi (si veda Figura 3.1)

$$dE = I_\nu dA \cos \theta d\nu d\Omega dt$$

Integrando sull'angolo solido si ottiene il flusso specifico  $F_\nu$ , cioè il tasso netto a cui l'energia attraversa l'unità di area indipendentemente dalla posizione

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\Omega$$

Si noti che se  $I_\nu$  è un campo di radiazione isotropo (cioè indipendente dall'angolo  $\theta$ ), allora il flusso specifico è zero, dato che  $\int \cos \theta d\Omega = 0$ . In altre parole, tanta energia attraverso l'unità di area  $dA$  nella direzione  $\mathbf{n}$  così come nella direzione  $-\mathbf{n}$ .

Il flusso specifico integrato su di una area che racchiude la sorgente ci fornisce la luminosità specifica

$$L_\nu = \int F_\nu dA$$

Integrando in frequenza si ottengono il flusso e la luminosità. Quindi, ritornando alla nostra equazione di conservazione dell'energia (3.5)

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \int d\nu \int d\Omega \mathbf{n} I_\nu(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \quad (3.6)$$

Il termine  $-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}}$  ci fornisce il tasso a cui l'energia viene emessa (energia negativa) o assorbita (energia positiva) per unità di volume del gas.

La intensità specifica  $I_\nu$  è governata da una ulteriore equazione, che altro non è che la conservazione dell'energia per il campo radiativo, e prende il nome di **equazione del trasporto radiativo**.

La equazione del trasporto radiativo, nel caso **indipendente** dal tempo, può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} n \nabla I_\nu &= -\mu_\nu I_\nu + j_\nu \\ &= -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \end{aligned} \tag{3.7}$$

dove  $\mu_\nu$  è il coefficiente di assorbimento,  $j_\nu$  il coefficiente di emissione (energia emessa per unità di tempo, per unità di angolo solido, per unità di volume in direzione  $n$ ), ed abbiamo introdotto la quantità  $\kappa_\nu$ , detta opacità specifica e definita come  $\mu_\nu = \kappa_\nu \rho$ . Questi coefficienti dipendono dal tipo di processi che avvengono nel mezzo, che a loro volta dipendono dal campo di radiazione.

Se introduciamo la funzione *sorgente*  $S_\nu \equiv j_\nu/\mu_\nu$ , e la *profondità ottica*  $\tau_\nu$  lungo un cammino  $r = r(s)$  dalla sorgente all'osservatore

$$d\tau_\nu = \mu_\nu ds \quad (3.8)$$

allora possiamo riscrivere l'equazione del trasporto

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (3.9)$$

Se il *campo di radiazione* corrisponde ad uno stato di equilibrio termico ad una data temperatura  $T$ , allora sappiamo che  $I_\nu = B_\nu(T)$ , la funzione di Planck (corpo nero). Dato che  $I_\nu$  non dipende dalla posizione (e quindi dalla profondità ottica), allora il membro di destra è nullo e quindi

$$S_\nu = I_\nu = B_\nu(T) \equiv \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (3.10)$$

indipendentemente dal meccanismo di radiazione.

Se il *mezzo* può essere caratterizzato da una temperatura  $T$  (cioè l'emissione è termica), allora

$$S_{\nu} \equiv \frac{j_{\nu}}{\mu_{\nu}} = B_{\nu}(T) \quad (3.11)$$

che non è altro che la legge di Kirchhoff.

Se gli stati della materia che contribuiscono all'emissione ed all'assorbimento sono popolati con una distribuzione di Boltzmann (cioè  $N(E) \propto \exp(-E/kT)$ ) ad una certa temperatura  $T$ , ma il campo di radiazione **non** è in equilibrio con la materia, allora il mezzo è detto trovarsi in uno stato di *equilibrio termodinamico locale*.

Una condizione necessaria affinché lo spettro emesso sia termico è che la profondità ottica  $\tau_{\nu} \rightarrow \infty$ . In questo caso diciamo che il mezzo è *otticamente spesso*. Per contro, in un mezzo otticamente spesso  $I_{\nu} = S_{\nu}$  (ma non  $B_{\nu}$ , a meno che non siamo in equilibrio termodinamico locale).

All'altro estremo, se  $\tau_\nu \rightarrow 0$  possiamo trascurare l'assorbimento nell'equazione del trasporto radiativo e quindi Equazione 3.7 si riduce a

$$I_\nu = \int j_\nu ds \quad (3.12)$$

Un tale mezzo è detto *otticamente sottile*.

Infine, se  $S_\nu = 0$ , abbiamo un mezzo puramente assorbente. L'equazione del trasporto (3.9) diventa quindi

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu \quad \implies \quad I_\nu = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) \quad (3.13)$$

Nel caso di una stella, o ogni altro mezzo otticamente spesso, lo stato della materia può essere caratterizzato localmente da una temperatura  $T$  che varia lentamente con la posizione (cioè abbiamo un equilibrio termico localmente, un caso speciale di equilibrio termodinamico locale). In questa approssimazione, l'equazione del trasporto è equivalente a

$$F_\nu = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu\rho} \frac{dB_\nu(T)}{dr} \quad (3.14)$$

che se viene integrata in frequenza diventa



$$F = -\frac{c}{3\kappa_R\rho} \frac{d}{dr}(aT^4) \quad (3.15)$$

dove  $\kappa_R$  è la *opacità media di Rosseland*, definita come

$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{\int \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}$$

ed abbiamo usato la relazione  $\int B_\nu d\nu = (ac/4\pi)T^4 \equiv (\sigma/\pi)T^4$ .

Ritorniamo ora alla nostra equazione di conservazione dell'energia (3.5), ed in particolare alla discussione sul termine  $-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}}$ . Nel caso di un mezzo otticamente sottile (radiazione può uscire dal mezzo senza interazioni) abbiamo visto che

$$-\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rad}} = -4\pi \int j_\nu d\nu$$

Nel caso di un mezzo otticamente spesso, allora  $\mathbf{F}_{\text{rad}}$  è data dalla approssimazione di Rosseland (3.15)

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{16\sigma}{3\kappa_R\rho} T^3 \nabla T$$

La seconda nuova quantità introdotta nell'equazione di conservazione dell'energia è il flusso di calore dovuto a conduzione  $q$ . Questo misura il tasso a cui moti disordinati (principalmente dovuti ad elettroni) trasportano energia termica nel gas, e quindi riducono le differenze di temperatura (termalizzano).

Il sistema di equazioni di conservazione, più l'equazione di stato, l'equazione del trasporto, e una descrizione delle quantità  $f$  e  $q$  permettono, in linea di principio, una descrizione completa del comportamento del gas date opportune condizioni al contorno.

Ovviamente, tutte le soluzioni conosciute corrispondono a casi particolari o soluzioni approssimate. Quello che tratteremo ora sono alcune semplici casi in cui la soluzione può dare utili informazioni per casi più complessi.

### 3.4 Flussi stazionari adiabatici ed isotermici

Prima di tutto consideriamo un flusso *stazionario*, per cui tutte le derivate rispetto al tempo siano nulle. Assumiamo poi che non vi siano perdite di energia attraverso radiazione ( $F_{\text{rad}} = 0$ ) e non vi sia conduzione termica ( $q = 0$ ) in Eq. 3.5.

Le nostre tre leggi di conservazione della massa, momento ed energia diventano

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.16a)$$

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f} \quad (3.16b)$$

$$\nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon + P \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (3.16c)$$

Sostituendo la prima equazione nella terza otteniamo

$$\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} v^2 + \varepsilon + \frac{P}{\rho} \right) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (3.17)$$

Moltiplicando scalarmente Eq. 3.16b per  $v$  otteniamo

$$f \cdot v = \rho v(v \cdot \nabla)v + v \cdot \nabla P = \rho v \left( \frac{1}{2}v^2 \right) + v \cdot \nabla P$$

Quindi, eliminando  $f \cdot v$  dalla Eq. 3.17 otteniamo

$$\rho v \cdot \nabla(\varepsilon + P/\rho) = v \cdot \nabla P$$

ed espandendo  $\nabla(P/\rho)$  e fattorizzando

$$v \cdot [\nabla\varepsilon + P\nabla(1/\rho)] = 0$$

Questa relazione implica, dalla definizione dell'operatore gradiente, che se viaggiamo lungo una linea di flusso di gas, cioè seguiamo la velocità  $v$ , per gli incrementi  $d\varepsilon$  e  $d(1/\rho)$  in  $\varepsilon$  e  $1/\rho$  deve valere la relazione

$$d\varepsilon + Pd(1/\rho) = 0$$

Ma dalla definizione di  $\varepsilon$  (3.4) e dalla legge dei gas perfetti (3.2) questo equivale a

$$\frac{3}{2}dT + \rho T d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

che ha come soluzione

$$\rho^{-1} T^{3/2} = \text{costante}$$

che può essere scritta in termini della pressione (usando l'equazione di stato (3.2)) come

$$P\rho^{-5/3} = \text{costante} \quad (3.18)$$

Equazione 3.18 descrive il cosiddetto *flusso adiabatico*.

Benchè abbiamo dimostrato che  $P\rho^{-5/3}$  è costante su una linea di flusso, in molti casi si assume che questa costante sia la stessa per ogni linea di flusso del gas. Questo è equivalente a porre l'entropia del gas costante. Questi flussi vengono detti *isoentropici*. Si noti come i termini adiabatici e isoentropici vengono spesso intercambiati.

Se il gas non è mono-atomico, e quindi il coefficiente della energia interna  $\varepsilon$  non è  $3/2$ , avremmo ottenuto lo stesso un risultato come in Eq. 3.18, ma con un esponente diverso per  $\rho$ :

$$P\rho^{-\gamma} = \text{costante} \quad (3.19)$$

L'equazione 3.19 è detta *politropica* e  $\gamma$  è detto *indice politropico*. Esso è uguale al rapporto dei calori specifici del gas.

Un altro importante caso speciale di flusso si ottiene assumendo che la temperatura  $T$  sia costante in tutta la regione di interesse. Questo tipo di flusso viene detto *isotermico* ed è equivalente a postulare l'esistenza di un qualche processo fisico che mantenga costante  $T$ . In altre parole, l'equazione di conservazione dell'energia viene sostituita dalla relazione  $T = \text{costante}$ . Utilizzando l'equazione di stato, questa relazione corrisponde a

$$P\rho^{-1} = \text{costante}$$

che ha la stessa forma di Eq. 3.19 con  $\gamma = 1$ .

### 3.5 Onde sonore

Una importante classe di soluzioni del nostro sistema di equazioni del gas corrisponde al caso di *equilibrio idrostatico*. In questo caso, oltre ad imporre un flusso stazionario e l'assenza di perdite di radiazione, imponiamo che  $v = 0$ . In questo caso la legge di conservazione del momento Eq. 3.16b si riduce a

$$\nabla P = f$$

Soluzioni di questo tipo sono appropriate ad atmosfere stellari (o planetarie) in equilibrio radiativo.

Assumiamo che abbiamo una soluzione in cui  $P$  e  $\rho$  sono certe funzioni della posizione,  $P_0$  e  $\rho_0$ , e consideriamo piccole perturbazioni attorno ad essa. Sia quindi

$$P = P_0 + P', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad v = v'$$

dove tutte le quantità primarie sono piccole, così possiamo trascurare prodotti di ordine superiore al secondo. Assumiamo inoltre che le perturbazioni siano adiabatiche (o isotermitiche). Perciò

$$P + P' = K(\rho + \rho')^\gamma \quad (3.20)$$

dove  $\gamma = 5/3$  nel caso adiabatico e  $\gamma = 1$  nel caso isotermitico. Linearizzando l'equazione di continuità (3.1) e di Eulero (3.3), ed usando il fatto che  $\nabla P_0 = \mathbf{f}$ , abbiamo che

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P' = 0 \quad (3.22)$$

Dato che  $P$  è una funzione solamente di  $\rho$ , allora  $\nabla P' = (dP/d\rho)_0 \nabla \rho'$ , dove il pedice 0 significa che la derivata deve essere valutata per la soluzione di equilibrio, cioè  $(dP/d\rho)_0 = dP_0/d\rho_0$ . Quindi Eq. 3.22 diventa



$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0 \nabla \rho' = 0 \quad (3.23)$$

Eliminando  $\mathbf{v}'$  da (3.23) e (3.21) applicando gli operatori  $\nabla \cdot$  e  $\partial/\partial t$  e poi sottraendo, otteniamo

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \rho' \quad (3.24)$$

dove abbiamo definito

$$c_s = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0^{1/2} \quad (3.25)$$

L'equazione 3.24 non è altro che la *equazione d'onda*, con onda che si propaga a velocità  $c_s$ . Si può fare vedere che anche le altre variabili  $P'$  e  $\mathbf{v}'$  ubbidiscono a simili equazioni.

Questo implica che piccole perturbazioni attorno all'equilibrio idrostatico si propagano attraverso il gas come onde sonore con velocità  $c_s$ . Dalle Eq. 3.20 e 3.25 vediamo come la velocità del suono possa avere due valori

$$\text{adiabatico: } c_s^{\text{ad}} = \left( \frac{5P}{3\rho} \right)^{1/2} = \left( \frac{5kT}{3\mu m_H} \right)^{1/2} \propto \rho^{1/3} \quad (3.26a)$$

$$\text{isotermico: } c_s^{\text{iso}} = \left( \frac{P}{\rho} \right)^{1/2} = \left( \frac{kT}{\mu m_H} \right)^{1/2} \quad (3.26b)$$

Le velocità del suono  $c_s^{\text{ad}}$  e  $c_s^{\text{iso}}$  sono quantità che possono essere definite localmente in ogni punto del gas. Entrambe sono dello stesso ordine di grandezza della velocità termica media degli ioni del gas. Da un punto di vista numerico abbiamo che

$$c_s \simeq 10 \left( \frac{T}{10^4 \text{ K}} \right)^{1/2} \text{ Km sec}^{-1} \quad (3.27)$$

Dato che  $c_s$  è la velocità a cui le perturbazioni in pressione attraversano il gas, questa limita la rapidità con cui il gas risponde a variazioni di pressione. Per esempio, se la pressione in una parte di una regione del gas di dimensione caratteristica  $l$  cambia improvvisamente, altre parti di questa regione non possono rispondere fino a quando non è passato un tempo dell'ordine  $l/c_s$ , il tempo di attraversamento del suono.

D'altro canto, se la pressione in una parte della regione cambia su un tempo-scala molto maggiore di  $l/c_s$ , il gas ha tutto il tempo di rispondere alla sollecitazione ed il gradiente di pressione rimarrà piccolo.

Quindi, se consideriamo *flussi supersonici*, dove il gas si muove con  $|\mathbf{v}| > c_s$ , il gas non riesce a rispondere su tempi scala  $l/|\mathbf{v}| < l/c_s$ , e quindi gradienti di pressione hanno effetti trascurabili sul flusso. All'altro estremo, per *flussi subsonici*, caratterizzati da  $|\mathbf{v}| < c_s$ , il gas riesce a rispondere a cambiamenti in pressione quindi, in prima approssimazione, si comporta come se fosse in equilibrio idrostatico.

Queste proprietà si possono ricavare direttamente da una analisi per ordine di grandezza dell'equazione di Eulero. Infatti, per un flusso supersonico abbiamo che

$$\frac{|\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|\nabla P|} \sim \frac{v^2/l}{P/\rho l} \sim \frac{v^2}{c_s^2} > 1$$

e quindi, in prima approssimazione, i gradienti di pressione possono essere trascurati.

Una importante proprietà della velocità del suono è la sua dipendenza dalla densità (Eq. 3.26a). Questo significa che regioni di densità superiore alla media avranno anche velocità del suono superiori alla media, il che comporta la possibilità di avere *onde d'urto (shock waves)*.

In uno shock le grandezze che descrivono il fluido cambiano su lunghezze scala dell'ordine del libero cammino medio, e questo comporta una *discontinuità* nel fluido.

### 3.6 Accrescimento stazionario a simmetria sferica

Ora che abbiamo tutto l'apparato matematico a disposizione, possiamo attaccare il problema reale di accrescimento di massa. Si consideri una stella di massa  $M$  che accresce, con simmetria sferica, da una grande nube di gas. Questa è una buona approssimazione di una stella isolata che accresce dal mezzo interstellare, sempre che si possano trascurare il momento angolare, il campo magnetico ed il moto collettivo del gas rispetto alla stella.

In primo luogo, ci aspettiamo di poter determinare il tasso di accrescimento stazionario  $\dot{M}$  (in unità di  $\text{g sec}^{-1}$ ) sulla stella date le condizioni ambientali (densità  $\rho(\infty)$  e temperatura  $T(\infty)$ ) per parti della nube di gas lontane dalla stella, e date delle condizioni al contorno sulla sua superficie.

Secondo, tenteremo di comprendere fino a che distanza la nube è influenzata dalla presenza della stella che accresce.

Innanzitutto usiamo un sistema di coordinate polari sferiche  $(r, \theta, \phi)$  con origine al centro della stella. Avendo assunto simmetria sferica, tutte le variabili sono indipendenti da  $\theta$  e  $\phi$ . Inoltre la velocità del gas ha solamente la componente radiale  $v_r = v$ . Dato che consideriamo materia che cade sulla stella (accrescimento)  $v$  sarà negativa, mentre  $v > 0$  corrisponderà a vento stellare.

Per un flusso stazionario l'equazione di continuità diventa

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 \rho v) = 0 \quad (3.28)$$

dove abbiamo usato l'espressione standard per la divergenza in coordinate sferiche. Questo ha come soluzione  $r^2 \rho v = \text{costante}$ . Dato che  $\rho(-v)$  è il flusso di materia che cade, la costante deve essere in relazione con il tasso di accrescimento (costante)  $\dot{M}$ . Poiché abbiamo a che fare con una superficie di una sfera avremo che

$$4\pi r^2 \rho(-v) = \dot{M} \quad (3.29)$$

Nell'equazione di Eulero, l'unico contributo alla forza esterna  $f$  è dato dalla gravità, e questa ha solamente la componente radiale

$$f_r = -G \frac{M\rho}{r^2}$$

quindi la conservazione del momento diventa

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (3.30)$$

Utilizziamo infine l'equazione di stato politropica

$$P = K\rho^\gamma \quad (3.31)$$

al posto della legge di conservazione dell'energia. Questo ci permette di trattare simultaneamente sia accrescimento adiabatico ( $\gamma = 5/3$ ) che quello isotermico ( $\gamma = 1$ ). Dopo che avremo trovato la soluzione dovremo vedere se l'assunzione adiabatica o isotermica sia giustificata andando ad indagare i processi di riscaldamento e raffreddamento del gas.

Per esempio, l'approssimazione adiabatica sarà valida se i tempi-scala su cui il gas si scalda o raffredda sono lunghi rispetto al tempo che impiega un elemento del gas a cadere sulla stella. In realtà nè l'accrescimento adiabatico nè quello isothermico sono valide approssimazioni, per cui ci aspetteremo  $1 < \gamma < 5/3$ .

Una volta determinati  $P(r)$  e  $\rho(r)$ , utilizzando l'equazione di stato possiamo ricavarci la temperatura  $T$

$$T = \frac{\mu m_H P}{\rho k} \quad (3.32)$$

Il nostro problema si riduce quindi nell'integrazione dell'Equazione 3.30 con l'aiuto di (3.31) e (3.29) e quindi nell'identificazione dell'unica soluzione che corrisponde al nostro problema di accrescimento.



Prima di integrare l'Equazione 3.30 vediamo come sia possibile ottenere importanti informazioni senza una integrazione esplicita. Dato che

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = c_s^2 \frac{d\rho}{dr}$$

allora, il termine  $(1/\rho)(dP/dr)$  nell'equazione di Eulero (3.30) può essere scritto come  $(c_s^2/\rho)(d\rho/dr)$ . Ma dalla equazione di continuità (3.28) abbiamo che

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{1}{vr^2} \frac{d}{dr}(vr^2)$$

Quindi Equazione 3.30 diventa

$$v \frac{dv}{dr} - \frac{c_s^2}{vr^2} \frac{d}{dr}(vr^2) + \frac{GM}{r^2} = 0$$

che, con un pò di algebra, può essere riscritta nella forma

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) \frac{d}{dr}(v^2) = -\frac{GM}{r^2} \left[ 1 - \left( \frac{2c_s^2 r}{GM} \right) \right] \quad (3.33)$$

A prima vista sembra che le cose siano diventate molto piú complicate, dato che  $c_s$  è in generale una funzione di  $r$ . Però l'interpretazione fisica di  $c_s$  come la velocità del suono nel gas, insieme alla struttura dell'Equazione 3.33, in cui i fattori di entrambi i membri possono (in linea di principio) diventare nulli, ci permette di classificare le possibili soluzioni di (3.33) in classi distinte e di trovare l'unica corrispondente al nostro problema.

In primo luogo, possiamo notare come a grande distanza dalla stella il fattore  $[1 - (2c_s^2 r / GM)]$  nel membro di destra deve diventare negativo, dato che  $c_s^2$  approssima un qualche valore asintotico finito  $c_s^2(\infty)$ , dipendente dalla temperatura del gas lontano dalla stella, mentre  $r$  aumenta senza alcun limite. Questo significa che per grandi  $r$  il membro di destra di (3.33) è positivo.

Nel membro di sinistra, il fattore  $d(v^2)/dr$  deve essere negativo, dato che vogliamo che il gas si trovi a riposo a grandi distanze dalla stella, e che acceleri a mano a mano che si avvicina.

Questi due requisiti sono compatibili tra loro solamente se per grandi  $r$  il flusso del gas è subsonico, cioè

$$v^2 < c_s^2 \quad \text{per grandi } r \quad (3.34)$$

Questo è ovviamente un risultato molto ragionevole dato che il gas avrà una temperatura non nulla, e quindi una velocità del suono non nulla, a grandi distanze dalla stella.

Mentre il gas si avvicina alla stella,  $r$  decresce ed il fattore  $[1 - (2c_s^2 r / GM)]$  deve tendere ad aumentare. Alla fine esso si annullerà, a meno che non si trovi un modo di aumentare  $c_s^2$  riscaldando il gas. Questo però è molto improbabile, dato che il fattore si annulla ad una distanza  $r_s$  data da

$$r_s = \frac{GM}{2c_s^2(r_s)} \simeq 7.5 \cdot 10^{13} \left( \frac{T(r_s)}{10^4 \text{ K}} \right)^{-1} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ cm} \quad (3.35)$$

dove abbiamo usato (3.27) per introdurre la temperatura. L'ordine di grandezza di  $r_s$  è molto maggiore del raggio  $R_*$  di ogni oggetto compatto ( $R_* \lesssim 10^9 \text{ cm}$ ).

Una simile analisi dei segni nell'Equazione 3.33 per  $r < r_s$  mostra che il flusso deve essere supersonico vicino alla stella:

$$v^2 > c_s^2 \quad \text{per piccoli } r \quad (3.36)$$

Questa discussione mostra come il problema che stiamo trattando non sia matematicamente ben posto se diamo solamente le condizioni all'infinito. Infatti è necessario specificare anche le condizioni sulla o vicino la superficie della stella. Vedremo che imponendo la condizione (3.36) otterremo solamente una soluzione al nostro problema (soluzione del Tipo 1). Senza l'imposizione (3.36) ci sarebbe anche un'altra possibile soluzione (di Tipo 3).

L'esistenza di un punto  $r_s$  che soddisfi l'Equazione 3.35 è di enorme importanza nella caratterizzazione del flusso di accrescimento. Infatti, da un punto di vista matematico, il fatto che per  $r = r_s$  il membro di destra di (3.33) si annulli implica che anche il membro di destra deve annullarsi per  $r = r_s$ . Questo significa che devono valere le relazioni

$$v^2 = c_s^2 \quad \text{per } r = r_s \quad (3.37)$$

oppure (non necessariamente contemporaneamente)

$$\frac{d}{dr}(v^2) = 0 \quad \text{per } r = r_s \quad (3.38)$$

Tutte le soluzioni di (3.33) possono ora essere classificate in termini del loro comportamento a  $r = r_s$ , dato dalle condizioni (3.37) o (3.38), insieme con il loro comportamento per grandi  $r$ , come (3.34). Questo è molto semplice da vedere se grafichiamo  $v^2(r)/c_s^2(r) \equiv \mathcal{M}^2$  in funzione di  $r$  (vedi Figura 3.1), da cui è chiaro che esistono sei distinte famiglie di soluzioni

Tipo 1:  $v^2(r_s) = c_s^2(r_s)$       $v^2 \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$

$$(v^2 < c_s^2, r > r_s; \quad v^2 > c_s^2, r < r_s)$$

Tipo 2:  $v^2(r_s) = c_s^2(r_s)$       $v^2 \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow 0$

$$(v^2 > c_s^2, r > r_s; \quad v^2 < c_s^2, r < r_s)$$

Tipo 3:  $v^2(r_s) < c_s^2(r_s)$  dappertutto,      $\frac{d}{dr}(v^2) = 0$  per  $r = r_s$

Tipo 4:  $v^2(r_s) > c_s^2(r_s)$  dappertutto,      $\frac{d}{dr}(v^2) = 0$  per  $r = r_s$

Tipo 5:  $\frac{d}{dr}(v^2) = \infty$  per  $v^2 = c_s^2(r_s)$ ;      $r > r_s$  sempre

Tipo 6:  $\frac{d}{dr}(v^2) = \infty$  per  $v^2 = c_s^2(r_s)$ ;      $r < r_s$  sempre

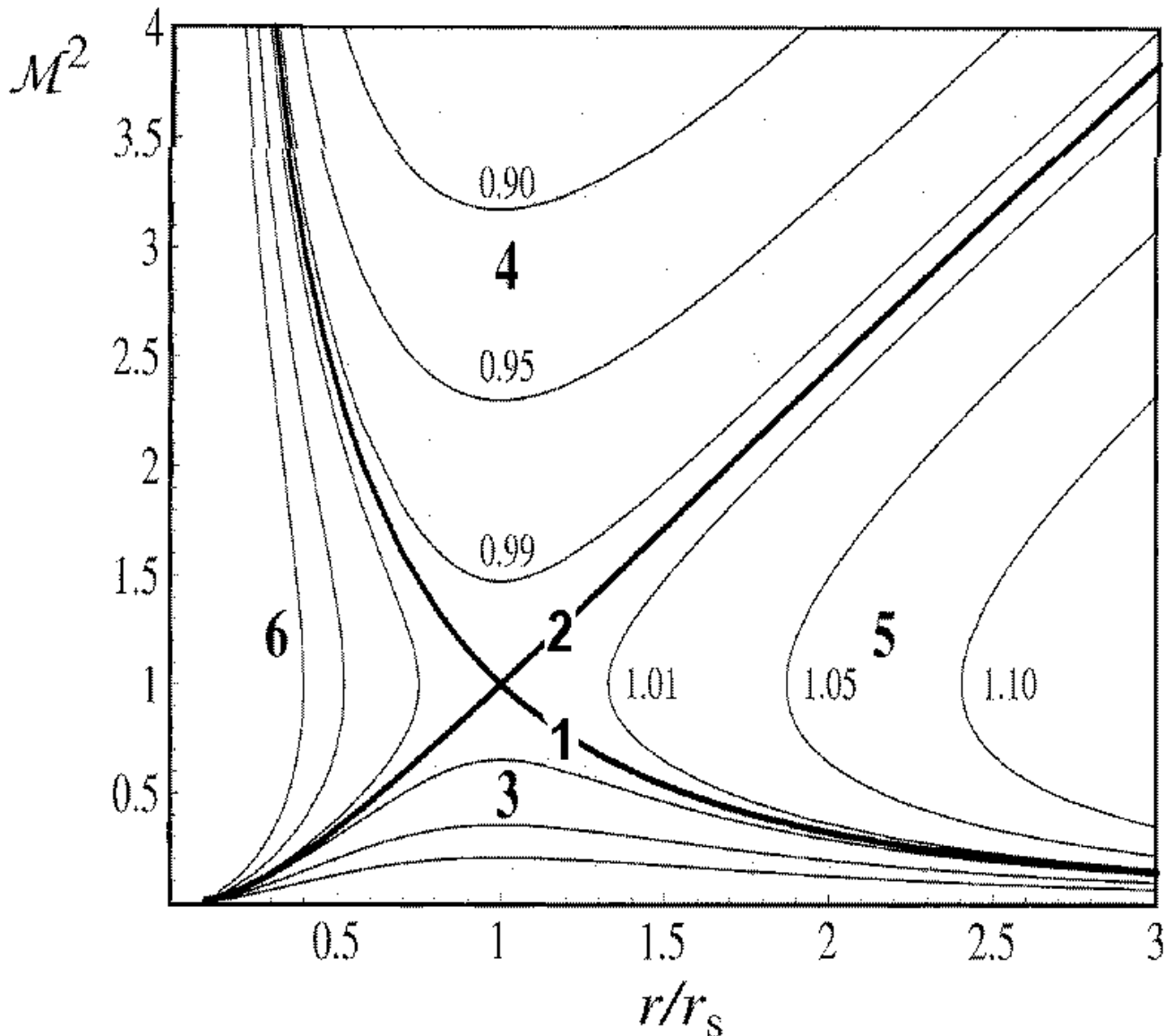


Figura 3.2: Numero di Mach al quadrato  $M^2 = v^2(r)/c_s^2(r)$  in funzione della distanza  $r/r_s$  per un flusso di gas adiabatico, in accrescimento a simmetria sferica, nel campo gravitazionale di una stella. Nel caso  $v < 0$  abbiamo flussi in accrescimento, mentre per  $v > 0$  abbiamo venti o “breeze” stellari. Le due soluzioni transoniche di Tipo 1 e Tipo 2, indicate da una linea spessa, dividono le rimanenti soluzioni in famiglie, come descritto nel testo.

Esiste solamente una soluzione del Tipo 1 e Tipo 2: queste soluzioni sono dette *transoniche*, in quanto rappresentano la transizione tra un flusso subsonico ad un flusso supersonico. Soluzioni di Tipo 3 e Tipo 4 rappresentano un flusso che è ovunque subsonico e supersonico, rispettivamente.

Soluzioni di Tipo 5 e Tipo 6 non ammettono tutti i valori di  $r$  e per ogni valore di  $r$  esistono due possibili valori di  $v^2$ . Per questi motivi escludiamo questo tipo di soluzioni del nostro problema.

Soluzioni di Tipo 2 e Tipo 4 sono da escludersi perché sono supersoniche per grandi  $r$ , in violazione alla condizione (3.34), mentre il Tipo 3 è subsonica per piccoli  $r$ , violando quindi la condizione (3.36).

Una soluzione di Tipo 2 con  $v > 0$  descrive un vento stellare (si noti che (3.33) non cambia per  $v \rightarrow -v$ ). Soluzioni di Tipo 3 con  $v > 0$  rappresentano la cosiddetta “brezza stellare”, in cui il flusso è ovunque subsonico. Se  $v < 0$  allora abbiamo una atmosfera che sta lentamente decadendo.



Ci è quindi rimasta la soluzione di Tipo 1: questa possiede tutte le proprietà che abbiamo richiesto ed è l'unica soluzione del nostro problema. La condizione al punto sonico (3.37) ci permetterà di collegare il tasso di accrescimento  $\dot{M}$  con la condizione all'infinito.

Una volta risolto il problema della unicità della soluzione, integriamo l'Equazione 3.30 utilizzando l'equazione di stato politropica (3.31) per passare da  $p$  a  $\rho$ :

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} - \frac{GM}{r} = \text{costante}$$

Dalla Eq. 3.31 abbiamo che  $dP = K\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho$ , quindi per  $\gamma \neq 1$  otteniamo

$$\frac{v^2}{2} + \frac{K\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \text{costante}$$

Dato però che  $K\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma P/\rho = c_s^2$  otteniamo il cosiddetto *integrale di Bernoulli*:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_s^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = \text{costante} \quad (3.39)$$

Nel caso di un flusso isotermico ( $\gamma = 1$ ) si ottiene un integrale logaritmico.

Per la proprietà fisica della nostra soluzione (Tipo 1) dobbiamo avere che

$v^2 \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ , quindi la costante in (3.39) deve essere  $c_s^2(\infty)/(\gamma - 1)$ ,

dove  $c_s^2(\infty)$  è la velocità del suono nel gas a grande distanza dalla stella.

La condizione al punto sonico (3.35) mette in relazione  $c_s^2(\infty)$  con  $c_s^2(r_s)$

$$c_s^2(r_s) \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} - 2 \right] = \frac{c_s^2(\infty)}{\gamma - 1}$$

che può essere riscritta come

$$c_s(r_s) = c_s(\infty) \left( \frac{2}{5 - 3\gamma} \right)^{1/2} \quad (3.40)$$

Riprendendo l'equazione di continuità (3.29) abbiamo che

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(-v) = 4\pi r_s^2 \rho(r_s) c_s(r_s) \quad (3.41)$$

dato che  $\dot{M}$  è indipendente da  $r$ . Usando il fatto che  $c_s^2 \propto \rho^{\gamma-1}$ , abbiamo

che

$$\rho(r_s) = \rho(\infty) \left[ \frac{c_s(r_s)}{c_s(\infty)} \right]^{2/(\gamma-1)}$$

Mettendo questa relazione, insieme alla (3.41) nella (3.40) otteniamo la relazione tra il tasso di accrescimento  $\dot{M}$  e le condizioni all'infinito:

$$\dot{M} = \pi G^2 M^2 \frac{\rho(\infty)}{c_s^3(\infty)} \left[ \frac{2}{5 - 3\gamma} \right]^{(5-3\gamma)/2(\gamma-1)} \quad (3.42)$$

Si noti come la dipendenza da  $\gamma$  sia molto debole: infatti il fattore  $[2/(5 - 3\gamma)]^{(5-3\gamma)/2(\gamma-1)}$  varia tra 1 per  $\gamma = 5/3$  a  $e^{3/2} \simeq 4.5$  per  $\gamma = 1$ . Per un valore tipico di  $\gamma = 1.4$  il fattore vale 2.5.

L'equazione 3.42 ci dice che è difficile che l'accrescimento dal mezzo interstellare sia un fenomeno osservabile. Infatti per  $c_s(\infty) = 10 \text{ Km sec}^{-1}$ ,  $\rho(\infty) = 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$ , corrispondenti ad una temperatura di  $10 \text{ K}$  ed una densità numerica di 1 particella per  $\text{cm}^3$ , abbiamo

$$\dot{M} \simeq 1.4 \cdot 10^{11} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left( \frac{\rho(\infty)}{10^{-24} \text{ g cm}^{-3}} \right) \left( \frac{c_s(\infty)}{10 \text{ Km sec}^{-1}} \right)^{-3} \text{ g sec}^{-1} \quad (3.43)$$

La luminosità di accrescimento in questo caso sarebbe di  $2 \cdot 10^{31} \text{ erg sec}^{-1}$ , che ad una distanza tipica di 1 kpc corrisponde ad un flusso troppo basso per essere osservabile.

Vediamo ora di completare la soluzione scrivendo tutte le quantità in funzione di  $r$ . In primo luogo, possiamo ricavare  $v(r)$  in termini di  $c_s(r)$  dalla

(3.41)

$$(-v) = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 \rho(r)} = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 \rho(\infty)} \left[ \frac{c_s(\infty)}{c_s(r)} \right]^{2/(\gamma-1)}$$

Sostituendo questa relazione nell'integrale di Bernoulli (3.39) otteniamo una relazione algebrica per  $c_s(r)$ , da cui poi ci si può ricavare  $v(r)$  e  $\rho(r)$ . In pratica però questa equazione può essere risolta soltanto numericamente. Un andamento generale della soluzione può però essere ricavato studiando l'integrale di Bernoulli. Per grandi distanze la forza gravitazionale della stella è debole e tutte le quantità avranno i loro valori "ambientali" ( $\rho(\infty)$ ,  $c_s(\infty)$  e  $v \simeq 0$ ). Mano a mano che ci si avvicina alla stella, la velocità del flusso del gas aumenta fino a quando  $-v$  raggiunge  $c_s(\infty)$ , la velocità del suono all'infinito. L'unico termine in (3.39) capace di bilanciare questo aumento è il termine gravitazionale  $GM/r$ .

Dato che  $c_s(r)$  non è molto più grande di  $c_s(\infty)$ , questo deve accadere ad una distanza

$$r \simeq r_{\text{acc}} = \frac{2GM}{c_s(\infty)^2} \simeq 3 \cdot 10^{14} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) \left( \frac{10^4 \text{ K}}{T(\infty)} \right) \text{ cm} \quad (3.44)$$

In questo punto  $\rho(r)$  e  $c_s(r)$  iniziano ad aumentare al di sopra dei valori ambientali. Al punto sonico  $r = r_s$  il flusso diventa supersonico ed il gas è in caduta libera. Infatti la relazione  $v^2 \gg c_s^2$  sostituita nell'integrale di Bernoulli diventa

$$v^2 \simeq \frac{2GM}{r} = v_{\text{ff}}$$

L'equazione di continuità ci permette di scrivere

$$\rho \simeq \rho(r_s) \left( \frac{r_s}{r} \right)^{3/2} \quad \text{per } r \lesssim r_s$$

Infine possiamo, in linea di principio, ottenere la temperatura usando l'equazione di stato politropica

$$T \simeq T(r_s) \left( \frac{r_s}{r} \right)^{3(\gamma-1)/2} \quad \text{per } r \lesssim r_s$$

Si noti però che l'aumento di  $T$  al diminuire di  $r$  predetto da questa equazione è probabilmente non realistico.

Il raggio  $r_{\text{acc}}$  definito dall'Equazione 3.44 ha una semplice interpretazione: ad un dato raggio  $r$  il rapporto tra l'energia interna (termica) e l'energia di legame gravitazionale di un elemento di gas di massa  $m$  è

$$\frac{\text{Energia termica}}{\text{Energia gravitazionale}} \sim \left( \frac{1}{2} m c_s^2(r) \right) \left( \frac{r}{GMm} \right) \sim \frac{r}{r_{\text{acc}}} \quad \text{per } r \gtrsim r_{\text{acc}}$$

dato che  $c_s(r) \sim c_s(\infty)$  per  $r > r_{\text{acc}}$ . Quindi, per  $r \gg r_{\text{acc}}$  la forza gravitazionale della stella non influenza il gas. La distanza  $r_{\text{acc}}$  viene detta *raggio di accrescimento*.

Si noti come la relazione (3.42) che fornisce il tasso di accrescimento in funzione delle condizioni all'infinito può essere scritta come

$$\dot{M} \sim \pi r_{\text{acc}}^2 c_s(\infty) \rho(\infty) \quad (3.45)$$

Ricapitoliamo le conclusioni a cui siamo pervenuti studiando il caso (particolare) di accrescimento stazionario a simmetria sferica:

- ① Il tasso di accrescimento stazionario  $\dot{M}$  è determinato dalle condizioni “ambientali” all’infinito (Equazione 3.42) e da una condizione al contorno (ad esempio (3.36)). L’accrescimento diretto dal mezzo interstellare da parte di stelle di neutroni isolate comporta un valore di  $\dot{M}$  troppo piccolo per avere conseguenze osservabili.
- ② Il comportamento del gas subisce l’influenza della forza gravitazionale solamente all’interno del raggio di accrescimento  $r_{acc}$ .
- ③ Un flusso di accrescimento stazionario con  $\dot{M}$  maggiore o uguale al valore dato da (3.42) **deve** possedere un punto sonico, cioè la velocità del gas in accrescimento **deve** diventare supersonica vicino alla superficie della stella.

L'immediata conseguenza del punto ③ è che, dato che la materia accresciuta deve arrivare alla superficie della stella con una velocità piccola, deve esistere una maniera di frenare il flusso supersonico. Questo però ci conduce nel campo di dominio della fisica del plasma, dato che dovremo tenere conto del comportamento del gas su lunghezze-scala comparabili con il libero cammino medio tra le collisioni.



# Teoria Cinetica del Plasma

## 4.1 Definizione di plasma

Un plasma consiste in una miscela di due gas di particelle elettricamente cariche: un gas di elettroni ed un gas di ioni, con masse delle particelle molto differenti  $m_e$  e  $m_i$ .

Gli elettroni e gli ioni interagiscono tra di loro attraverso forze di Coulomb attrattive e repulsive. Queste forze decrescono molto lentamente ( $\propto r^{-2}$ ) con la distanza e non possiedono una lunghezza-scala caratteristica. Quindi una particella di plasma interagisce contemporaneamente con tutte le altre, e questo rende la descrizione delle collisioni molto complessa. Una ulteriore complicazione è dovuta alla grande differenza di massa tra elettroni e ioni. Dato che le collisioni tra particelle di massa molto diversa riescono a trasferire solamente una piccola frazione dell'energia cinetica, è possibile che gli ioni e gli elettroni possiedano una temperatura molto diversa su tempi-scala lunghi.

## 4.2 Neutralità di carica, oscillazioni di plasma e lunghezza di Debye

Vediamo ora di esaminare in dettaglio le conseguenze del carattere a lungo raggio della forza di Coulomb tra particelle cariche.

Innanzitutto abbiamo che la densità numerica di ioni ed elettroni in ogni punto deve essere approssimativamente uguale, e quindi il plasma deve sempre essere vicino alla neutralità di carica. Infatti anche un piccolo eccesso di carica risulterebbe in un campo elettrico molto grande che farebbe muovere le particelle in modo da ristabilire molto velocemente la neutralità.

Supponiamo che ci sia un eccesso di carica di 1% in una sfera di raggio  $r$  in un plasma di densità numerica  $N$ . Allora gli elettroni che si trovano vicino al bordo della sfera risentiranno di un campo elettrico  $E$  e di una accelerazione

$$\dot{v} = \frac{e|E|}{m_e} \simeq \frac{4\pi r^3}{3m_e} \frac{N}{100} \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]r^2}$$

dove  $(-e)$  è la carica di un elettrone.

Per una sfera di raggio  $r = 1$  cm in un tipico plasma astrofisico con  $N = 10^{10}$  particelle per  $\text{cm}^3$  abbiamo che  $\dot{v} \sim 10^{17} \text{ cm sec}^{-2}$ , e quindi gli elettroni impiegherebbero  $3 \cdot 10^{-9}$  sec a ristabilire la neutralità. Infatti essi si muoverebbero così velocemente da indurre *oscillazioni* nel plasma. Dato che tutti i plasmi sono soggetti a piccole perturbazioni che tendono a disturbare la neutralità di carica (ad esempio il passaggio di radiazione elettromagnetica, o il moto termico delle particelle del plasma stesso), la frequenza naturale di queste oscillazioni è una grandezza fondamentale chiamata ***frequenza di plasma***.

Per determinarla consideriamo un plasma uniforme con un piccolo eccesso di elettroni in qualche (piccola) regione. Assumiamo che gli ioni abbiano in media una carica  $Ze \simeq e$ , e che le densità numeriche di ioni ed elettroni siano, rispettivamente

$$N_i \simeq N_0 \quad N_e = N_0 + N_1(\mathbf{r}, t)$$

con  $N_1 \ll N_0$  e  $N_1 = 0$  al di fuori della nostra piccola regione.

L'eccesso di carica  $N_1$  dà luogo ad un campo elettrico  $\mathbf{E}$  dato dalla legge di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{[4\pi\epsilon_0]} N_1 e \quad (4.1)$$

Questo campo elettrico provoca il movimento delle particelle. Dato che  $m_i \gg m_e$  possiamo trascurare il moto degli ioni. Gli elettroni si muoveranno come un fluido ed ubbidiranno alle equazioni di conservazione. Dato che  $N_1$  è assunto piccolo, possiamo trascurare il termine  $(\mathbf{v}_e \cdot \nabla)\mathbf{v}_e$  nell'equazione di Eulero, che così diventa

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -e\mathbf{E} \quad (4.2)$$

L'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \nabla \cdot (N_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (4.3)$$

che, trascurando prodotti di piccole quantità, diventa

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + N_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_e = 0 \quad (4.4)$$

Possiamo eliminare  $v_e$  da queste equazioni prendendo la divergenza della (4.2) e la derivata rispetto al tempo della (4.4) e sottraendo

$$\frac{1}{N_0} \frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2} - \frac{e}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

Usando l'equazione di Maxwell (4.1) per eliminare  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  otteniamo

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial t^2} + \left\{ \frac{4\pi}{[4\pi\epsilon_0]} \frac{N_0 e^2}{m_e} \right\} N_1 = 0$$

Perciò l'eccesso di carica  $N_1$  oscilla con frequenza di plasma

$$\omega_p = \left\{ \frac{4\pi}{[4\pi\epsilon_0]} \frac{N_0 e^2}{m_e} \right\}^{1/2} \quad (4.5)$$

Da un punto di vista numerico, con  $N_0$  misurato in  $\text{cm}^{-3}$ , abbiamo

$$\omega_p = 5.7 \cdot 10^4 N_0^{1/2} \text{ rad sec}^{-1} \quad (4.6)$$

$$\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 9.0 \cdot 10^3 N_0^{1/2} \text{ Hz}$$

Un plasma è opaco alla radiazione elettromagnetica di frequenza  $\nu < \nu_p$  perché le oscillazioni del plasma sono più rapide delle variazioni nel campo elettromagnetico, e gli elettroni del plasma si muovono “cancellando” la radiazione. Per la ionosfera della Terra abbiamo che  $N_0 \simeq 10^6 \text{ cm}^{-3}$ , quindi onde radio di frequenza minore di circa  $10^7 \text{ Hz}$  non possono penetrarla e quindi sono riflesse.

Associato al tempo-scala  $\nu_p^{-1}$  delle oscillazioni di carica deve esistere una grandezza-scala  $l$  che definisce su quali distanze il campo elettrico viene generato dall'eccesso di carica  $N_1$ . Possiamo calcolarlo, come ordine di grandezza, valutando le derivate come

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \omega_p, \quad \nabla \sim \frac{1}{l}$$

Dall'equazione (4.3) otteniamo quindi

$$l \sim \frac{v_e}{\omega_p} \quad (4.7)$$

Quindi il campo elettrico  $E$  generato dall'eccesso di carica  $N_1$  è limitato ad una distanza-scala  $l$  dall'effetto di schermo degli elettroni.

Dato che anche un plasma non perturbato sarà soggetto a piccole fluttuazioni di carica dovute al moto termico degli elettroni, esisterà una distanza di schermo, detta **lunghezza di Debye**  $\lambda_{\text{Deb}}$ , che otteniamo ponendo nell'espressione della velocità degli elettroni in (4.7)  $v_e \sim (kT_e/m_e)^{1/2}$ , dove  $T_e$  è la temperatura degli elettroni

$$\lambda_{\text{Deb}} = \left\{ \frac{[4\pi\epsilon_0]kT_e}{4\pi N_0 e^2} \right\}^{1/2} \quad (4.8)$$

Numericamente, con  $N_0$  misurato in  $\text{cm}^{-3}$  e  $T_e$  in K

$$\lambda_{\text{Deb}} \simeq 7 \left( \frac{T_e}{N_0} \right)^{1/2} \text{ cm} \quad (4.9)$$

L'importanza di  $\lambda_{\text{Deb}}$  risiede nel fatto che questa distanza ci fornisce la lunghezza-scala su cui può esistere un sostanziale eccesso di carica; quindi ci fornisce la portata delle collisioni Coulombiane nel plasma.

Affinché la nostra trattazione del plasma sia consistente è necessario che il numero di particelle coinvolte nell'oscillazione sia grande, ed inoltre che le grandezze fisiche del plasma non subiscano variazioni apprezzabili su grandezze-scala  $l$  molto minori della lunghezza di Debye:



$$N_e \lambda_{\text{Deb}}^3 \gg 1 \quad l \gg \lambda_{\text{Deb}} \quad (4.10)$$

Se queste condizioni non sono soddisfatte, allora possiamo trattare il gas come un sistema di particelle indipendenti e trascurare così i cosiddetti “effetti collettivi”.

### 4.3 Collisioni Coulombiane

Consideriamo ora collisioni Coulombiane tra particelle del plasma. Dato che queste collisioni coinvolgono l'accelerazione di particelle cariche, verrà prodotta radiazione elettromagnetica a spese dell'energia cinetica delle due particelle. Comunque si può dimostrare come questi due tassi di perdita di energia (per radiazione e per collisione) di una particella che si muove a velocità  $v$  stanno nel rapporto

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{coll}}} \lesssim \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]\hbar c} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim \frac{1}{137} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1 \quad (4.11)$$

dove  $e^2/[4\pi\epsilon_0]\hbar c$  è la costante di struttura fine. Quindi la perdita di energia per radiazione durante una collisione è trascurabile e quindi possiamo considerare l'urto come *elastico*. Il nostro problema quindi consiste nel descrivere l'urto tra due particelle cariche  $e_1$  ed  $e_2$  che interagiscono via forza di Coulomb  $e_1 e_2 / [4\pi\epsilon_0] r^2$  ad una certa distanza  $r$ .

Il modo piú semplice per trattare il problema di urto tra due particelle è quello di porci nel sistema di riferimento (SdR) del centro di massa. Se le velocità iniziali delle due particelle nel SdR del laboratorio sono  $v_1$  e  $v_2$ , ed esse hanno massa  $m_1$  e  $m_2$ , il SdR del centro di massa avrà velocità

$$\mathbf{v}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.12)$$

In questo SdR le particelle incidenti hanno momento della quantità di moto uguale in modulo ed opposto in segno  $\pm m\mathbf{v}$ , e la loro energia cinetica totale è  $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ , dove abbiamo definito

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (4.13)$$

Dato che la forza di Coulomb ubbidisce ad una legge dell'inverso del quadrato della distanza, le traiettorie delle particelle in collisione nel SdR del centro di massa saranno iperboli, che possono essere caratterizzate da un parametro di impatto  $b$ . Dato che l'urto è elastico, sia le velocità che le energie delle particelle rimangono inalterate: si ha soltanto una deflessione di traiettoria.

L'angolo di deflessione  $\theta$  sarà apprezzabile, diciamo dell'ordine di  $90^\circ$ , per un certo valore del parametro di impatto, che indicheremo con  $b_0$ , tale per cui l'energia cinetica e l'energia potenziale siano comparabili al momento di massimo avvicinamento (si veda Figura 4.1):

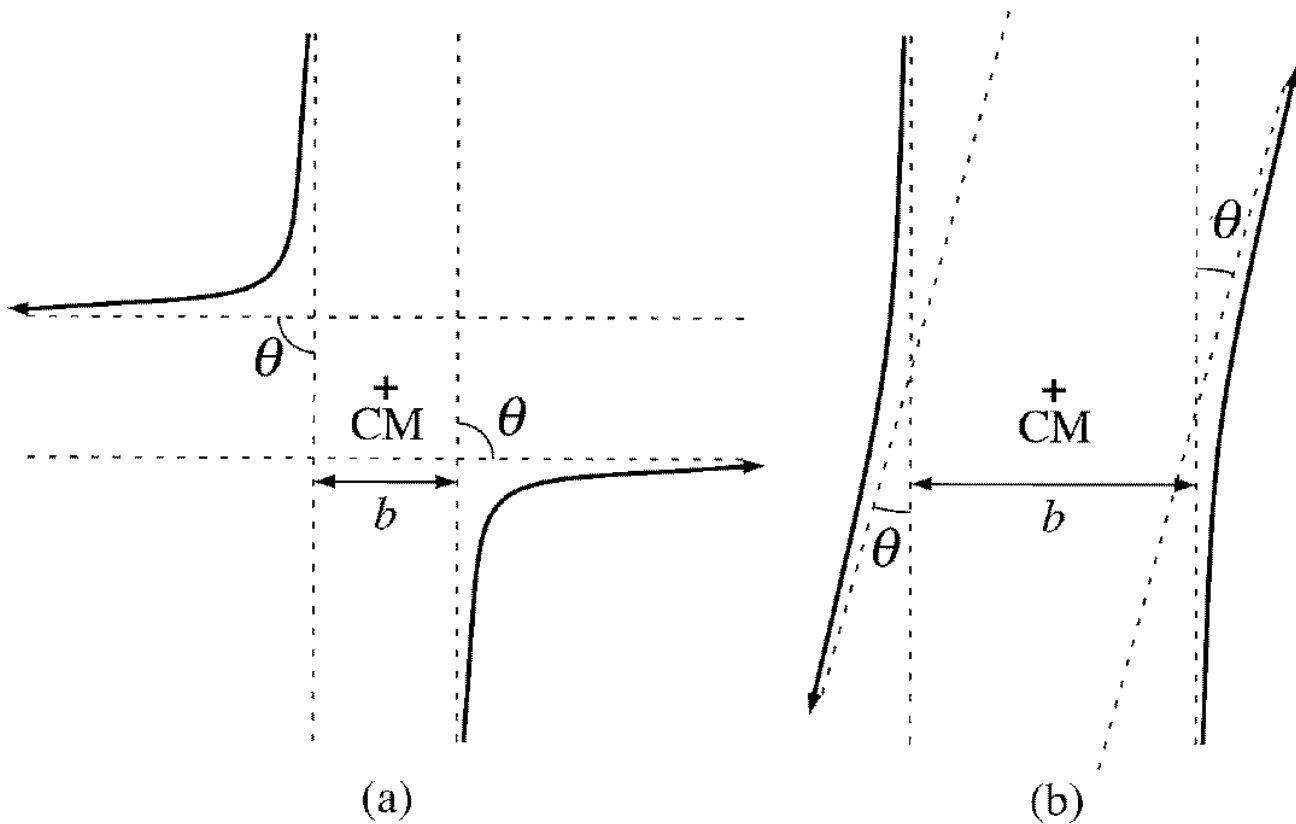


Figura 4.1: Collisioni Coulombiane di due particelle di stessa carica (in questo caso positiva) e stessa massa: (a) collisione ravvicinata; (b) collisione distante. Il parametro di impatto  $b$  prima e dopo l'urto rimane lo stesso per la conservazione della quantità di moto.

$$\frac{e_1 e_2}{[4\pi\epsilon_0] b_0} \sim \frac{1}{2} m v^2 \sim kT \quad (4.14)$$

dove l'ultima uguaglianza vale per particelle termalizzate. Per  $b \gg b_0$  allora  $\theta \sim e_1 e_2 / [4\pi\epsilon_0] b m v^2$  che è molto piccolo.

Nel caso di gas atomico o molecolare  $b_0$  dà una misura, per ordine di grandezza, delle dimensioni delle particelle del gas, e definisce quindi una sezione d'urto

$$\sigma_{\perp} = \pi b_0^2 = \frac{\pi}{[4\pi\epsilon_0]^2} \frac{e_1^2 e_2^2}{(kT)^2} \quad (4.15)$$

Per una densità numerica del gas  $N$ , il libero cammino medio  $\lambda_{\perp}$  tra collisioni sarà

$$\lambda_{\perp} = \frac{1}{N\sigma_{\perp}} \simeq \frac{[4\pi\epsilon_0]^2}{\pi N} \left( \frac{kT}{e_1 e_2} \right)^2 \quad (4.16)$$

Infatti, per la definizione di  $\lambda_{\perp}$ , abbiamo che lungo  $\lambda_{\perp}$  non avvengono collisioni, quindi il volume  $\lambda_{\perp} \cdot \sigma_{\perp}$  può contenere solamente una particella (altrimenti ci sarebbero collisioni!), quindi  $\lambda_{\perp} \cdot \sigma_{\perp} = 1/N$ , da cui la (4.16).

Mettendo i valori numerici delle costanti, per  $e_1 = e_2 = e$  abbiamo

$$\lambda_{\perp} \simeq 7 \cdot 10^5 \frac{T^2}{N} \text{ cm} \quad (4.17)$$

Ad ogni istante, ogni particella carica deve interagire elettrostaticamente con le particelle del plasma contenute in una sfera di raggio  $\lambda_{\text{Deb}}$ . Questi urti lontani producono però solamente piccole deflessioni, dato che

$$\frac{\lambda_{\text{Deb}}}{b_0} \sim \frac{[4\pi\epsilon_0]kT\lambda_{\text{Deb}}}{e^2} \sim 4\pi N_0 \lambda_{\text{Deb}}^3 \gg 1$$

avendo usato (4.8) e (4.10). D'altro canto, ci sono così tante particelle in una sfera di Debye che l'effetto cumulativo dell'insieme di tutte le collisioni distanti è maggiore di quello degli incontri ravvicinati per  $b \sim b_0$ . Dato che questo è un punto importante, studiamo in dettaglio il caso in cui le particelle in interazione abbiano tutte la stessa massa  $m_1 \sim m_2 \sim m$  (ad esempio il caso di urti elettrone-elettrone o ione-ione). Allora ogni particella avrà una velocità iniziale  $\sim v$ , ed in un urto distante la sua velocità aumenterà di

$$\Delta v_b \sim v\theta \sim \frac{e_1 e_2}{[4\pi\epsilon_0]m v b}$$

in una direzione ortogonale alla sua direzione di moto originale.

Poichè le particelle hanno la stessa massa, così come le stesse velocità (termiche) iniziali, allora possiamo metterci nel SdR del laboratorio (ma questo **non è vero nel caso piú generale!**).

Per calcolare l'effetto totale di tutti gli urti distanti nel deviare una data particella sarà necessario sommare in maniera opportuna gli incrementi  $\Delta v_b$  su tutti i possibili valori di  $b$ . Dato che  $\Delta v_b$  può essere sia positivo che negativo, a seconda delle condizioni iniziali, è meglio considerare il suo quadrato.

Consideriamo ora un guscio cilindrico (si veda Figura 4.2) contenente  $N$  particelle nel volume  $2\pi b db v dt$ , dove  $dt$  è il tempo in cui una data particella “urta” con parametro di impatto  $b$  le  $N$  particelle.

Allora, il tasso di variazione di  $(\Delta v)^2$  sarà

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta v)^2}{dt} &\sim N v \int (\Delta v_b)^2 2\pi b db \\ &= \frac{2\pi N e_1^2 e_2^2}{[4\pi\epsilon_0]^2 m^2 v} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

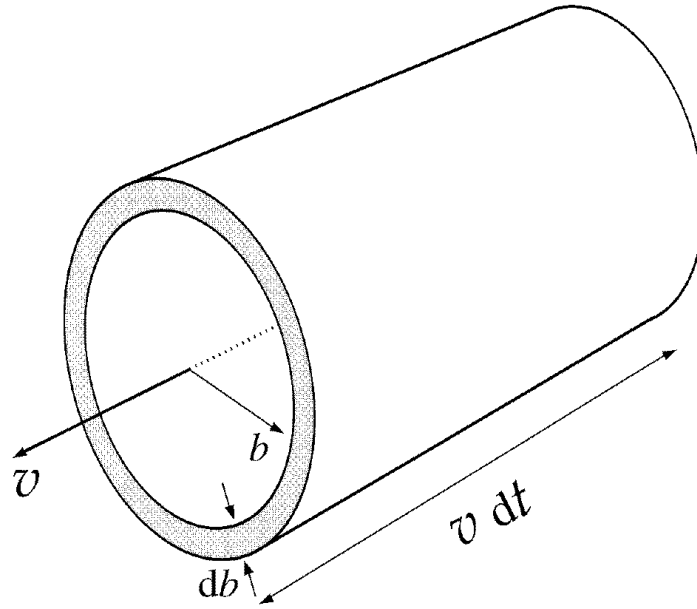


Figura 4.2: Definizione della geometria nel caso urti Coulombiani di una particella di plasma di velocità  $v$ .

dove  $b_{\max}$  e  $b_{\min}$  sono il valore piú grande e piú piccolo di  $b$  che contribuiscono all'integrale, e di cui stabiliremo piú tardi i valori.

Per potere stabilire l'importanza relativa degli urti con parametro di impatto grande e piccolo, è necessario associare un libero cammino medio al cambio di velocità (4.18), per poterlo poi confrontare con  $\lambda_{\perp}$ . A questo scopo definiamo un *tempo di deviazione*

$$t_d = \frac{v^2}{d(\Delta v)^2/dt} = \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m^2 v^3}{2\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \quad (4.19)$$



dove abbiamo usato la notazione standard  $\Lambda = b_{\max}/b_{\min}$ . Dalla sua definizione, il tempo di deviazione misura il tempo che intercorre prima che una particella del plasma di velocità  $v$  venga deviata in maniera significativa dalla sua traiettoria iniziale.

Associata al tempo di deviazione  $t_d$  viene definita la *lunghezza di deviazione*  $\lambda_d$

$$\lambda_d = vt_d = \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m^2 v^4}{2\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \quad (4.20)$$

Confrontando Eq. 4.20 con (4.16), ed usando il fatto che  $mv^2 \sim kT$ , troviamo che

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_d} \sim \ln \Lambda \quad (4.21)$$

Quindi, urti distanti e a piccole deflessioni dominano urti ravvicinati e a grandi angoli se  $\ln \Lambda > 1$ . Vedremo ora che  $\ln \Lambda$ , detto *logaritmo di Coulomb* è normalmente dell'ordine di 10–20, e quindi tra tutte le possibili collisioni sono quelle a piccoli angoli che danno il contributo maggiore.

Innanzitutto, dato che siamo interessati al logaritmo di  $\Lambda$ , sarà sufficiente ottenere una stima di  $\Lambda$ , senza dover entrare troppo nel dettaglio. Come primo tentativo, potremmo prendere per  $b_{\min}$  la distanza di massimo avvicinamento  $b_0$  data dall'Eq. 4.14.

Bisogna però stare attenti a non violare il principio di indeterminazione, secondo il quale non è possibile conoscere simultaneamente la posizione ed il momento di una particella con incertezze minori di  $\Delta x$  e  $\Delta p$  tali che

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

Quindi non possiamo porre  $b_{\min} = b_0$  se quest'ultimo è minore di

$$b_{\min}(MQ) \sim \frac{\hbar}{\Delta p} \sim \frac{\hbar}{mv} \quad (4.22)$$

dove abbiamo usato  $\Delta p \sim mv$ . Equazione 4.22 dà  $b_{\min}$  come la lunghezza d'onda di de Broglie di una particella di momento  $mv$ . In generale, quindi, avremo che

$$b_{\min} = \max \left\{ \frac{\hbar}{mv}, \frac{2e_1 e_2}{[4\pi\epsilon_0]mv^2} \right\} \quad (4.23)$$

quindi  $b_{\min}$  avrà il suo valore classico  $b_0$  a meno che

$$v \lesssim \frac{e^2}{[4\pi\epsilon_0]\hbar c} c = \frac{c}{137} \quad (4.24)$$

Per ricavarci una stima di  $b_{\max}$  ricordiamoci che il plasma reagisce a perturbazioni nella carica in un tempo caratteristico  $1/v_p$  (dato da Eq. 4.6). Quindi, il plasma riesce a schermare il campo Coulombiano di ogni particella il cui tempo di interazione  $\sim b/v$  sia maggiore di  $1/v_p$ . Quindi possiamo ragionevolmente porre

$$b_{\max} = \frac{v}{v_p}$$

Ovviamente, se  $v$  è la velocità termica degli elettroni  $v_e$ , otteniamo

$$b_{\max} = \lambda_{\text{Deb}}$$

come deve essere. Dato che per plasmi astrofisici le particelle hanno  $mv^2 \sim kT$ , allora il logaritmo di Coulomb avrà valore

$$\ln \Lambda = \ln \left( \frac{\lambda_{\text{Deb}}}{b_0} \right)$$

che può essere scritta, utilizzando l'espressione numerica per  $\lambda_{\text{Deb}}$  data da Eq. 4.9

$$\ln \Lambda \simeq 10 + 3.45 \log T - 1.15 \log N_e \quad (4.25)$$

con  $N_e$  misurato in  $\text{cm}^{-3}$ . E' facile verificare come  $\ln \Lambda$  sia nell'intervallo 10–20 per plasmi di interesse astrofisico. Questo quindi dimostra come l'effetto di molti urti deboli e distanti sia piú importante di urti forti e ravvicinati.

Si noti inoltre come  $\ln \Lambda$  sia estremamente insensibile agli errori sulle stime di  $b_{\text{min}}$  e  $b_{\text{max}}$ : se  $\ln \Lambda = 15$ , allora anche un errore su  $\Lambda$  di un fattore 100 produce  $\ln \Lambda$  nell'intervallo 10–20. Quindi (4.25) dà una stima ragionevole, anche se (4.24) non dovesse essere soddisfatta.

#### 4.4 Plasmi termici: tempo di rilassamento e libero cammino medio

Vediamo ora di applicare i nostri risultati sugli urti tra particelle ad un plasma in cui le particelle hanno velocità termiche. Per semplificare non effettueremo la somma su tutte le possibili velocità delle particelle che contribuiscono agli urti, ma **porremo**  $mv^2 \sim kT$ . Questo ci fornirà il corretto ordine di grandezza per  $\lambda_d$ , la lunghezza di deviazione definita in (4.20).

E' bene evidenziare come, in generale, sia necessaria una analisi dell'evoluzione temporale della distribuzione di velocità risolvendo l'equazione di Fokker-Planck. Questo è particolarmente vero per la determinazione del tempo di scambio energetico  $t_E$  nel caso di particelle veloci (sopratermiche) che vedremo nel seguito.

Comunque, ponendo  $mv^2 \sim kT$  nella (4.20) abbiamo che per particelle di massa comparabile

$$\lambda_d \simeq \frac{7 \cdot 10^5}{\ln \Lambda} \frac{T^2}{N} \text{ cm} \quad (4.26)$$

Una importante proprietà di (4.26) è la sua indipendenza dalla massa delle particelle, quindi la distanza media attraversata prima che la particella subisca un urto è la stessa per gli elettroni e per gli ioni. Questo però non è vero per il tempo di deviazione: infatti il tempo di deviazione  $t_d(\text{e-e})$  per elettroni con elettroni è  $\sqrt{m_p/m_e} \sim 43$  volte più breve di quello di ioni con ioni, ma questo è compensato dalla maggiore velocità degli elettroni.

Nel caso di particelle con masse diverse (come nel caso di urti elettroni con ioni), si può dimostrare che le equazioni (4.19) e (4.20) valgono ancora con  $m$  dell'ordine della massa più piccola e  $v$  dell'ordine della velocità termica più grande. Quindi, nel caso di urti elettrone-ione avremo  $m \sim m_e$  e  $v \sim (kT/m_e)^{1/2}$

$$t_d(\text{e-i}) \sim \frac{[4\pi\epsilon_0]^2 m_e^{1/2} (kT)^{3/2}}{2\pi N e_1^2 e_2^2 \ln \Lambda} \sim t_d(\text{e-e}) \quad (4.27)$$

Quindi gli urti elettrone-ione avvengono allo stesso tasso degli urti elettrone-elettrone.

Può essere utile, a questo punto, definire una frequenza d'urto (elettronica)

$$\nu_c \sim \frac{1}{t_d(e-i)} \simeq 2 \ln \Lambda Z^2 N_e T^{-3/2} \text{ sec}^{-1} \quad (4.28)$$

con  $N_e$  misurato in  $\text{cm}^{-3}$  e  $Z$  la carica media degli ioni. Analogamente definiamo la frequenza d'urto ione-ione

$$\nu_c(i-i) \sim \frac{1}{t_d(i-i)} \simeq 5 \cdot 10^{-2} \ln \Lambda Z^4 N_e T^{-3/2} \text{ sec}^{-1} \quad (4.29)$$

Finora abbiamo considerato soltanto *deflessioni* delle traiettorie di particelle del plasma: il tempo-scala  $t_d$  dà una misura approssimata del tempo necessario affinché una distribuzione di velocità inizialmente anisotropa venga resa isotropa (termalizzazione). Alla fine però ogni distribuzione iniziale di velocità deve tendere alla distribuzione di equilibrio di Maxwell-Boltzmann.

Il tempo-scala affinché questo accada è detto *tempo-scala di scambio energetico*  $t_E$ :

$$t_E = \frac{E^2}{d(\Delta E)^2/dt} \quad (4.30)$$

dove  $E$  è l'energia di una particella di prova, e  $\Delta E$  è la variazione di energia durante gli urti (si veda Eq. 4.19).

Si noti che, a priori, non c'è alcuna ragione per cui  $t_E$  sia uguale a  $t_d$ : infatti nel SdR del centro di massa avviene una deflessione delle traiettorie  $\theta$  ma nessun scambio di energia, dato che le velocità delle particelle non cambiano prima e dopo l'urto.

Un importante esempio che mette in luce questa differenza è il caso degli urti elettrone-ione in un plasma in equilibrio termico: in questo caso  $m_e \ll m_p$  ed il SdR nel centro di massa differisce da quello del laboratorio soltanto per una velocità  $v_{CM} \simeq (m_e/m_p)^{1/2} v_i \ll v_i$  (si veda (4.12)). Per il fatto che non viene scambiata energia nel SdR del centro di massa, abbiamo che il massimo trasferimento nel SdR del laboratorio si ha in un urto frontale, ed è uguale a



$$\Delta E = 2m_i v_{\text{CM}}^2 \simeq 2m_e v_i^2$$

e quindi

$$\frac{\Delta E}{\frac{1}{2}m_i v_i^2} \sim \frac{m_e}{m_i} \ll 1 \quad (4.31)$$

Quindi le collisioni tra elettroni e ioni non sono molto efficienti nel trasferire energia. Come abbiamo visto in precedenza (vedi Eq. 4.27), il tasso di collisione elettrone-ione ed elettrone-elettrone sono simili, ma una differenza nell'energia media tra elettroni e ioni verrà livellata dalle collisioni in un tempo  $\sim m_i/m_e \sim m_p/m_e \sim 1836$  volte piú lungo rispetto ad una stessa differenza tra le energie degli elettroni. Per urti tra particelle di massa e velocità simili ci aspettiamo che  $t_E \sim t_d$ , quindi dalle loro definizioni (4.28) e (4.29) ci aspettiamo che i tempi di rilassamento necessari per stabilire, da una condizione iniziale di non-equilibrio, (i) una distribuzione termica per gli elettroni, (ii) una distribuzione termica per gli ioni, (iii) una equipartizione di energia tra elettroni e ioni siano nel rapporto

$$t_E(e-e) : t_E(i-i) : t_E(e-i) = 1 : \left(\frac{m_p}{m_e}\right)^{1/2} : \left(\frac{m_p}{m_e}\right) \quad (4.32)$$

Quindi, i primi a raggiungere l'equilibrio sono gli elettroni, seguiti dagli ioni, ed infine avviene l'equipartizione. Questo comportamento è particolarmente importante nello studio delle onde d'urto, che vedremo in seguito.

# Processi Radiativi

## 5.1 Introduzione

Nel Capitolo 2 abbiamo introdotto l'equazione del trasporto radiativo (3.7), che qui riscriviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu &= -\mu_\nu I_\nu + j_\nu \\ &= -\kappa_\nu \rho I_\nu + j_\nu \end{aligned} \tag{5.1}$$

dove  $\mu_\nu$  è il coefficiente di assorbimento,  $j_\nu$  il coefficiente di emissione (energia emessa per unità di tempo, per unità di angolo solido, per unità di volume in direzione  $\mathbf{n}$ ), ed abbiamo introdotto la quantità  $\kappa_\nu$ , detta opacità specifica e definita come  $\mu_\nu = \kappa_\nu \rho$ .

Abbiamo inoltre introdotto il concetto di funzione sorgente  $S$ , definita come il rapporto tra i coefficienti di emissione e di assorbimento; ed il concetto di profondità ottica  $\tau_\nu$  (vedi Eq. 3.8) che ci ha permesso di definire un mezzo *otticamente spesso* (*opaco*) quando  $\tau_\nu$  integrato lungo un percorso tipico attraverso il mezzo soddisfa  $\tau_\nu > 1$ .

Al contrario, quando  $\tau_\nu < 1$  il mezzo è detto *otticamente sottile* (*trasparente*).

Un concetto che si dimostra utile nella trattazione del trasporto radiativo è quello di *libero cammino medio*, definito come la distanza media che un fotone riesce a percorrere prima di essere assorbito dalla materia in cui si muove. Come abbiamo già visto (si veda Eq. 3.13), la probabilità che un fotone attraversi almeno una profondità ottica  $\tau_\nu$  è semplicemente  $e^{-\tau_\nu}$ . La profondità ottica *media* è quindi uguale all'unità

$$\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1$$

La distanza media attraversata in un mezzo omogeneo è definita *libero cammino medio*  $l_\nu$  ed è data da  $\langle \tau_\nu \rangle = \mu_\nu l_\nu = 1$ , o equivalentemente

$$l_\nu = \frac{1}{\mu_\nu} = \frac{1}{N\sigma_\mu} \quad (5.2)$$

In altre parole, il libero cammino medio, per un mezzo omogeneo, non è altro che il reciproco del coefficiente di assorbimento.

## 5.2 Processo di scattering

Nel caso di pura emissione termica la quantità di radiazione emessa da un elemento di materiale **NON** dipende dal campo di radiazione incidente: la funzione sorgente è sempre  $B_\nu(T)$ . Questo elemento emetterà lo stesso spettro sia che si trovi isolato nello spazio sia che si trovi immerso all'interno una stella dove il campo di radiazione ambientale è preponderante.

Esiste però un altro processo di emissione molto comune in astrofisica (e non solo), detto *scattering*, che dipende completamente dalla quantità di radiazione che cade sull'elemento. Se la radiazione "scatterata" è emessa in maniera isotropa sull'angolo solido, così che il coefficiente di emissione è indipendente dalla direzione, si parla di *scattering isotropo*.

Se la quantità totale di radiazione **emessa** per unità di frequenza è uguale alla quantità totale di radiazione **assorbita** nello stesso intervallo di frequenza si parla di *scattering coerente (elastico o monocromatico)*.

Il coefficiente di emissione per scattering isotropo e coerente può essere trovato eguagliando la potenza assorbita per unità di volume:

$$j_{\nu} = \sigma_{\nu} J_{\nu} \quad (5.3)$$

dove  $\sigma_{\nu}$  è il coefficiente di assorbimento del processo di scattering, a volte chiamato *coefficiente di scattering*. La funzione sorgente per il processo di scattering è dunque

$$S_{\nu} \equiv \frac{j_{\nu}}{\mu_{\nu}} = \frac{j_{\nu}}{\sigma_{\nu}} = J_{\nu} = \frac{1}{4\pi} \int I_{\nu} d\Omega \quad (5.4)$$

L'equazione del trasporto per il processo di scattering diventa quindi

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} = -\sigma_{\nu}(I_{\nu} - J_{\nu}) \quad (5.5)$$

Questa è un'equazione integro-differenziale, la cui soluzione da un punto di vista matematico è alquanto complessa.

L'emissione e l'assorbimento di radiazione può essere governata da più di un processo: ad esempio, consideriamo il caso di un materiale con coefficiente di assorbimento  $\mu_\nu$  descrivente emissione termica e coefficiente di scattering  $\sigma_\nu$  descrivente scattering coerente isotropo. L'equazione del trasporto avrà allora due termini

$$\begin{aligned}\frac{dI_\nu}{ds} &= -\mu_\nu(I_\nu - B_\nu) - \sigma_\nu(I_\nu - J_\nu) \\ &= -(\mu_\nu + \sigma_\nu)(I_\nu - S_\nu)\end{aligned}\tag{5.6}$$

La funzione sorgente

$$S_\nu = \frac{\mu_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\mu_\nu + \sigma_\nu}\tag{5.7}$$

è una media di due funzioni sorgenti separate, pesate per i loro rispettivi coefficienti di assorbimento.

Il coefficiente di assorbimento netto è  $\mu_\nu + \sigma_\nu$ , che può essere usato per definire la profondità ottica  $d\tau_\nu = (\mu_\nu + \sigma_\nu)ds$ .



Questo coefficiente di assorbimento netto è chiamato *coefficiente di estinzione*, per distinguerlo dal coefficiente di assorbimento “vero”  $\mu_\nu$ . Se un elemento di materia si trova all’interno di un mezzo ad una temperatura costante, ci aspettiamo che il campo di radiazione si trovi prossimo al valore termodinamico  $J_\nu = B_\nu(T)$ . Se invece l’elemento si trova isolato nello spazio libero, allora  $J_\nu = 0$ , e quindi la funzione sorgente è  $S_\nu = \mu_\nu B_\nu / (\mu_\nu + \sigma_\nu)$ , una frazione della funzione di Planck.

### 5.3 Random walk

Un modo particolarmente utile di studiare lo scattering è per mezzo del cosiddetto *random walk*. E' possibile studiare i processi di assorbimento, emissione, e propagazione in termini probabilistici per un singolo fotone piuttosto che studiare il comportamento medio di un gran numero di fotoni, come abbiamo fatto finora. Ad esempio, il decadimento esponenziale di un fascio di fotoni può essere interpretato come il fatto che la probabilità di un fotone che attraversa un mezzo di profondità ottica  $\tau_\nu$  di essere assorbito è data da  $\exp(-\tau_\nu)$ .

Consideriamo ora un fotone emesso in una regione omogenea ed infinita che subisca scattering. Esso attraverserà una distanza  $r_1$  prima di subire un altro scattering e viaggiare una distanza  $r_2$  prima di subire un altro scattering e viaggiare una distanza  $r_3$ , ecc. Lo spostamento totale del fotone dopo  $N$  cammini sarà

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \cdots + \mathbf{r}_N \quad (5.8)$$

Per trovare una stima della distanza attraversata dal fotone  $|R|$  non possiamo fare la media di (5.8), dato che questa sarà nulla. Se quadriamo però la (5.8) e poi prendiamo la media otterremo lo spostamento quadratico medio  $l_*^2$

$$\begin{aligned}
 l_*^2 \equiv \langle R^2 \rangle &= \langle r_1^2 \rangle + \langle r_2^2 \rangle + \dots + \langle r_N^2 \rangle \\
 &+ 2\langle r_1 \cdot r_2 \rangle + 2\langle r_1 \cdot r_3 \rangle + \dots \\
 &+ \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

Ogni termine  $\langle r^2 \rangle$  avrà come valore il quadrato del tipico cammino del fotone, che indicheremo con  $l^2$ , e che corrisponde al quadrato del libero cammino medio. I termini con i prodotti incrociati coinvolgono medie del coseno dell'angolo tra le direzioni prima e dopo lo scattering, e queste devono essere nulle per scattering isotropo. Quindi la (5.9) diventa

$$l_*^2 = Nl^2 \quad (5.10)$$

$$l_* = \sqrt{N} l$$

Questo risultato può essere usato per stimare il numero medio di scattering in un mezzo finito. Supponiamo che un fotone sia generato da qualche parte in un mezzo; allora il fotone subirà scattering fino a quando non riuscirà ad uscire completamente. Per regioni che hanno una profondità ottica grande allora  $l_* \sim L$ , la dimensione tipica del mezzo. Da Eq. 5.10 abbiamo che  $N \simeq L^2/l^2$ . Dato che  $l$  è dell'ordine del libero cammino medio,  $L/l$  dà una misura dello spessore ottico del mezzo, quindi

$$N \simeq \tau^2 \quad (\tau \gg 1) \quad (5.11)$$

Per regioni di profondità ottica piccola, invece, il numero medio di scattering sarà dell'ordine di  $1 - e^{-\tau} \simeq \tau$ , quindi

$$N \simeq \tau \quad (\tau \ll 1) \quad (5.12)$$

Per stime per ordine di grandezza, è sufficiente usare  $N \simeq \tau^2 + \tau$  o  $N \simeq \max(\tau, \tau^2)$  valide per ogni profondità ottica  $\tau$ .

Riprendendo il caso in cui siano presenti contemporaneamente scattering ed assorbimento, il cammino che un fotone può percorrere è in questo caso determinato dal coefficiente di estinzione  $\mu_\nu + \sigma_\nu$ . Il libero cammino medio prima che un fotone subisca scattering o assorbimento sarà quindi (vedi Eq. 5.2)

$$l_\nu = \frac{1}{\mu_\nu + \sigma_\nu} \quad (5.13)$$

Durante un random walk, la probabilità che un fotone venga assorbito sarà (si veda Eq. 5.7)

$$\varepsilon_\nu = \frac{\mu_\nu}{\mu_\nu + \sigma_\nu} \quad (5.14)$$

mentre la corrispondente probabilità che venga scatterato sarà

$$1 - \varepsilon_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\mu_\nu + \sigma_\nu} \quad (5.15)$$

La quantità  $1 - \varepsilon_\nu$  viene detta *albedo per scattering singolo*. In questo caso la funzione sorgente può essere scritta

$$S_\nu = (1 - \varepsilon_\nu)J_\nu + \varepsilon_\nu B_\nu \quad (5.16)$$

Vediamo di calcolare ora il numero medio di scattering. Nel caso di un mezzo infinito un random walk inizia con l'emissione termica di un fotone e termina con il suo assorbimento dopo un certo numero di scattering. Dato che il cammino può essere terminato con probabilità  $\varepsilon$  alla fine di ogni cammino libero, il numero di cammini liberi sarà  $N = \varepsilon^{-1}$ . Da Eq. 5.10 allora abbiamo che

$$\begin{aligned} l_*^2 &= \frac{l^2}{\varepsilon} \\ l_* &= \frac{l}{\sqrt{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

che, utilizzando (5.13) e (5.14) diventa

$$l_* \simeq \frac{1}{\sqrt{\mu_\nu(\mu_\nu + \sigma_\nu)}} \quad (5.18)$$

La lunghezza  $l_*$  fornisce una stima dello spostamento effettivo netto tra il punto in cui un fotone viene creato ed il punto in cui un fotone viene assorbito, e viene chiamata indifferentemente *lunghezza di diffusione*, *lunghezza di termalizzazione* o *libero cammino effettivo*. Si noti come  $l_*$  sia dipendente dalla frequenza.

Nel caso di un mezzo finito, il suo comportamento varierà a seconda che la sua dimensione caratteristica  $L$  sia maggiore o minore del libero cammino effettivo  $l_*$ . Per descrivere quantitativamente queste differenze di comportamento, è conveniente introdurre lo *spessore ottico effettivo*  $\tau_* \equiv L/l_*$ .

Utilizzando Eq. 5.18 avremo che

$$\tau_* \equiv \frac{L}{l_*} \simeq \sqrt{\tau_a(\tau_a + \tau_s)} \quad (5.19)$$

dove gli spessori ottici di assorbimento  $\tau_a$  e di scattering  $\tau_s$  sono definiti

$$\tau_a = \mu_\nu L; \quad \tau_s = \sigma_\nu L \quad (5.20)$$

Quando il cammino libero effettivo è grande rispetto alla dimensione del mezzo avremo che

$$\tau_* \ll 1 \quad (5.21)$$

ed il mezzo è detto *effettivamente sottile (traslucido)*. In questo caso la maggior parte dei fotoni riusciranno a scappare per random walk prima di essere distrutti da assorbimento. Quando il cammino libero effettivo è invece piccolo rispetto alla dimensione del mezzo avremo che

$$\tau_* \gg 1 \quad (5.22)$$

ed il mezzo è detto *effettivamente spesso*.

La maggior parte dei fotoni emessi termicamente a profondità maggiori del libero cammino effettivo verranno distrutti per assorbimento prima di poter uscire dal mezzo. Quindi le condizioni fisiche del mezzo per grandi profondità effettive approssimeranno le condizioni in cui la materia è in equilibrio termico con la radiazione, per cui  $I_\nu \rightarrow B_\nu$  e  $S_\nu \rightarrow B_\nu$ . E' per questa proprietà che  $l_*$  viene detta lunghezza di termalizzazione.



## 5.4 Bremsstrahlung

Particelle che attraversano la materia subiscono scattering e perdono energia per urto. In questi urti le particelle sono soggette ad accelerazioni, quindi emettono a loro volta radiazione elettromagnetica. La radiazione emessa durante urti atomici, cioè dovuta alla accelerazione di una carica in un campo Coulombiano di un'altra carica, è chiamata *bremsstrahlung* od anche *radiazione di frenamento*. Questo nome le deriva dal fatto che fu osservata la prima volta con elettroni di alta energia frenati in una spessa lastra di metallo. Un trattamento rigoroso di questo processo richiede l'uso della meccanica quantistica, dato che possono essere prodotti fotoni con energie dello stesso ordine di grandezza di quelle delle particelle in gioco. Comunque con un trattamento classico del processo si ottiene la corretta dipendenza funzionale per la maggior parte dei parametri fisici. Le correzioni quantistiche verranno incorporate in fattori correttivi (detti fattori di Gaunt) alle formule classiche.

Si può dimostrare che la radiazione di bremsstrahlung dovuta a collisioni di particelle dello stesso tipo (elettrone-elettrone o ione-ione) è zero. Quindi radiazione verrà prodotta da collisioni elettrone-ione, in cui gli elettroni sono la principale fonte di radiazione, dato che le accelerazioni relative sono inversamente proporzionali alle masse.

Inoltre, dato che gli ioni hanno masse molto maggiori di quella dell'elettrone, potremo trattare l'elettrone come in movimento nel campo Coulombiano fisso dello ione.

Per ricavarci lo spettro della radiazione di bremsstrahlung ricordiamo che quando si trattano cariche in movimento il campo elettrico può essere scomposto in due termini: il primo termine, detto *campo di velocità*, che ha andamento  $\propto r^{-2}$ , altro non è che la generalizzazione della legge di Coulomb per cariche in movimento. Il secondo termine, detto *campo di radiazione*, ha andamento  $\propto r^{-1}$  ed è proporzionale alla accelerazione della particella che, nella cosiddetta approssimazione di dipolo, ha espressione

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \ddot{\mathbf{d}})}{c^2 R_0} \quad (5.23)$$

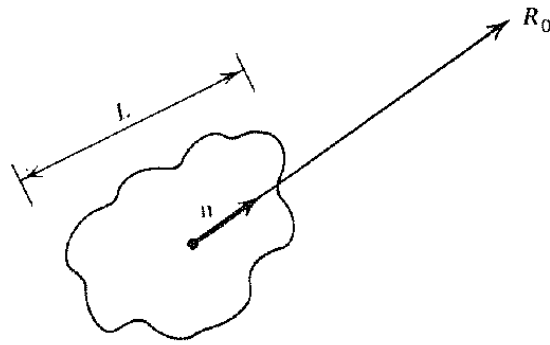


Figura 5.1: Campo di radiazione per un mezzo di dimensione  $L$ .

dove  $\mathbf{n}$  è il versore che unisce la particella al punto  $R_0$  dove si calcola il campo, e  $\mathbf{d}$  è il momento di dipolo

$$\mathbf{d} = \sum q_i \mathbf{r}_i \quad (5.24)$$

delle cariche  $q_i$  (vedi Figura 5.1).

In questa approssimazione abbiamo che l'energia emessa per unità di tempo per unità di angolo solido è

$$\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta \quad (5.25)$$

che integrata sull'angolo solido mi dà la potenza emessa

$$P \equiv \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{c^3} \quad (5.26)$$

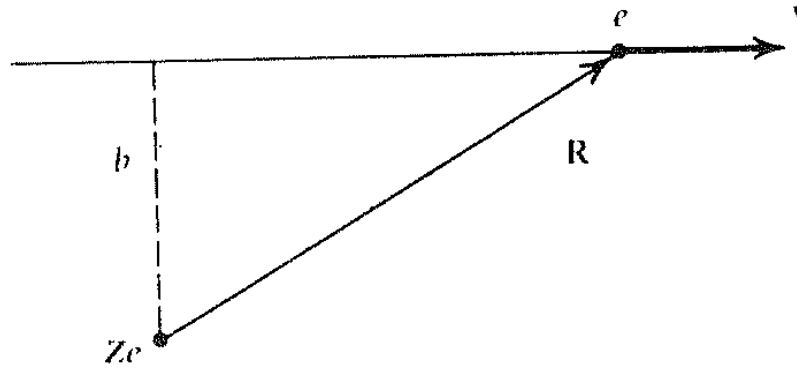


Figura 5.2: Definizione della geometria per un elettrone  $e$  che si muove nel campo di radiazione dello ione di carica  $Ze$ .

Come abbiamo già visto, sono le collisioni a piccolo angolo di deflessione ed a grande parametro di impatto  $b$  che contribuiscono all'emissione. Se quindi consideriamo un elettrone di carica  $-e$  che collida a grande distanza con uno ione di carica  $Ze$  (vedi Figura 5.2), allora il momento di dipolo sarà  $\mathbf{d} = -e\mathbf{R}$ , e la sua derivata seconda (da porre in Eq. 5.25) è

$$\ddot{\mathbf{d}} = -e\dot{\mathbf{v}} \quad (5.27)$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità dell'elettrone. E' possibile fare vedere come

$$\frac{dE}{d\omega} = \begin{cases} \frac{2e^2}{3\pi c^3} |\Delta\mathbf{v}|^2 & \omega\tau_c \ll 1 \\ 0 & \omega\tau_c \gg 1 \end{cases} \quad (5.28)$$

dove  $\Delta v$  è la variazione di velocità che avviene nella collisione,  $\tau_c = b/v$  è il tempo di collisione in cui l'elettrone e lo ione sono in interazione, e  $\omega = 2\pi\nu$ .

Dato che consideriamo deflessioni piccole, il cambio di velocità avverrà perpendicolarmente alla direzione di moto, quindi (si veda la dimostrazione completa in Appendice)

$$\Delta v = \frac{Ze^2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2Ze^2}{mbv} \quad (5.29)$$

Quindi l'emissione da una singola collisione sarà

$$\frac{dE(b)}{d\omega} = \begin{cases} \frac{8Z^2 e^6}{3\pi c^3 m^2 v^2 b^2} & b \ll v/\omega \\ 0 & b \gg v/\omega \end{cases} \quad (5.30)$$

Possiamo ora ricavarci lo spettro totale per un mezzo composto da  $N_i$  ioni per unità di volume e  $N_e$  elettroni per unità di volume che si muovono a velocità  $v$ . Si noti come il flusso di elettroni (elettroni per unità di tempo per unità di area) incidente su di uno ione non è altro che  $N_e v$ .

L'elemento di area attorno ad uno ione è  $2\pi b db$ , quindi l'emissione totale per unità di tempo per unità di volume per unità di frequenza è

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = N_i N_e 2\pi v \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{dE(b)}{d\omega} b db \quad (5.31)$$

dove  $b_{\min}$  e  $b_{\max}$  sono il minimo e massimo valore del parametro di impatto, discussi nel Capitolo 3. Sostituendo (5.30) in (5.31) otteniamo

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = \frac{16e^6}{3c^3 m^2 v} N_i N_e Z^2 \ln \Lambda \quad (5.32)$$

Quando per  $b_{\min}$  è necessario prendere il valore  $b_{\min}(MQ)$  (vedi Eq. 4.22), la trattazione classica non è piú valida. Il risultato esatto di Eq. 5.32 viene espresso in termini di un fattore correttivo, detto *fattore di Gaunt*  $g_{ff}$ :

$$\frac{dE}{d\omega dV dt} = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3 m^2 v} N_i N_e Z^2 g_{ff}(v, \omega) \quad (5.33)$$

da cui si vede, confrontando (5.32) con (5.33) che

$$g_{ff}(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \Lambda \quad (5.34)$$

Il fattore di Gaunt (5.34) è una certa funzione dell'energia dell'elettrone e della frequenza di emissione. I suoi valori sono tabulati e reperibili in letteratura.

### 5.4.1 Bremsstrahlung termico

L'uso piú interessante delle formule appena trovate è la loro applicazione al caso in cui la distribuzione delle velocità degli elettroni sia termica. Quello che quindi faremo sarà di mediare le espressioni trovate qui sopra per una singola velocità su di una distribuzione termica di velocità.

La probabilità  $dP$  che una particella abbia una velocità nell'intervallo  $d^3\mathbf{v}$  è

$$dP \propto e^{-E/kT} d^3\mathbf{v} = \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d^3\mathbf{v}$$

Dato però che per una distribuzione isotropa delle velocità abbiamo che  $d^3\mathbf{v} = 4\pi v^2 dv$ , la probabilità che una particella abbia velocità nell'intervallo  $dv$  è

$$dP \propto v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv \quad (5.35)$$

Quello che ora bisogna fare è integrare Eq. 5.33 su questa funzione. Quali sono i limite di integrazione? A prima vista sembrerebbe  $0 \leq v < \infty$ , ma ad una frequenza  $\nu$  la velocità incidente deve essere almeno tale che

$$h\nu \leq \frac{1}{2}mv^2$$

altrimenti un fotone di energia  $h\nu$  non potrebbe essere creato. Questo limite di integrazione sulle velocità degli elettroni è detto *photon discreteness effect*. L'integrale diventa

$$\frac{dE(T, \omega)}{dV dt d\omega} = \frac{\int_{\nu_{\min}}^{\infty} \frac{dE(\nu, \omega)}{d\omega dV dt} \nu^2 \exp\left(-\frac{m\nu^2}{2kT}\right) d\nu}{\int_0^{\infty} \nu^2 \exp\left(-\frac{m\nu^2}{2kT}\right) d\nu}$$

dove  $\nu_{\min} \equiv \sqrt{2h\nu/m}$ . Dato che  $d\omega = 2\pi d\nu$  otteniamo

$$\frac{dE(T, \omega)}{dV dt d\nu} = \frac{2^5 \pi e^6}{3mc^3} \left(\frac{2\pi}{3km}\right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \bar{g}_{\text{ff}} \quad (5.36)$$

Nel caso di emissione abbiamo che il coefficiente di emissione  $j_\nu$  definito in Eq. 3.7 in unità di  $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{Hz}^{-1}$  è dato da

$$4\pi j_\nu \equiv \frac{dE(T, \omega)}{dV dt d\nu} = 6.8 \cdot 10^{-38} Z^2 N_i N_e T^{-1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \bar{g}_{\text{ff}} \quad (5.37)$$



Il termine  $\bar{g}_{ff}(T, \nu)$  è chiamato fattore di Gaunt *mediato in velocità*.

Il fattore  $T^{-1/2}$  risulta dal fatto che  $dE/dV dt d\omega \propto \nu^{-1}$  (vedi Eq. 5.33) e  $\langle \nu \rangle \propto T^{1/2}$ . Il termine  $\exp(-h\nu/kT)$  viene dal limite di integrazione sulla velocità ed alla forma della distribuzione termica delle velocità.

E' possibile far vedere come  $\bar{g}_{ff} \sim 1$  per  $u = h\nu/kT \sim 1$ , ed è 1–5 per  $10^{-4} < u < 1$ . Quindi una buona stima dell'ordine di grandezza di  $\bar{g}_{ff}$  è l'unità.

Si noti come lo spettro di bremsstrahlung sia abbastanza “piatto” (in un grafico log–log) fino al suo cutoff a circa  $h\nu \sim kT$  (in realtà questo è vero solamente per sorgenti otticamente sottili).

Per ottenere l'espressione per bremsstrahlung *non termico* è necessario conoscere la distribuzione di velocità, e la formula per l'emissione per un elettrone a singola velocità deve essere mediata su quella distribuzione.

Possiamo ora anche ottenere la potenza totale per unità di volume emessa per bremsstrahlung termico. Basta integrare in frequenza Eq. 5.36

$$\frac{dE}{dt dV} = \left( \frac{2\pi kT}{3m} \right)^{1/2} \frac{2^5 \pi e^6}{3hmc^3} Z^2 N_i N_e \bar{g}_B \quad (5.38)$$

che numericamente è uguale a (unità di  $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-3}$ )

$$4\pi j = \frac{dE}{dt dV} = 1.4 \cdot 10^{-27} T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \bar{g}_B \quad (5.39)$$

Il termine  $\bar{g}_B(T)$  è il fattore di Gaunt *mediato in frequenza e mediato in velocità*, il quale è nell'intervallo 1.1–1.5. Prendendo il valore di 1.2 si ottiene una accuratezza di circa il 20%.

#### 5.4.2 Assorbimento per bremsstrahlung termico

Dalla legge di Kirchhoff (3.11) abbiamo che

$$j_\nu^{\text{ff}} = \mu_\nu^{\text{ff}} B_\nu(T)$$

dove  $\mu_\nu^{\text{ff}}$  è il coefficiente di assorbimento libero-libero. Usando l'espressione (3.10) per la funzione di Planck abbiamo che

$$\mu_{\nu}^{\text{ff}} = \frac{4e^6}{3mhc} \left( \frac{2\pi}{3km} \right)^{1/2} T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-3} (1 - e^{-h\nu/kT}) \bar{g}_{\text{ff}} \quad (5.40a)$$

$$= 3.7 \cdot 10^8 T^{-1/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-3} (1 - e^{-h\nu/kT}) \bar{g}_{\text{ff}} \text{ cm}^{-1} \quad (5.40b)$$

Per  $u \gg 1$  l'esponenziale è trascurabile, e  $\mu_{\nu}$  è proporzionale a  $\nu^{-3}$ . Per  $u \ll 1$  siamo nel regime di Rayleigh-Jeans e Eq. 5.40 diventa

$$\mu_{\nu}^{\text{ff}} = \frac{4e^6}{3mhc} \left( \frac{2\pi}{3km} \right)^{1/2} T^{-3/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-2} \bar{g}_{\text{ff}} \quad (5.41a)$$

$$= 0.018 T^{-3/2} Z^2 N_i N_e \nu^{-2} \bar{g}_{\text{ff}} \text{ cm}^{-1} \quad (5.41b)$$

## 5.5 Scattering Compton

### 5.5.1 Scattering da elettroni a riposo

Consideriamo il caso di scattering di fotoni da parte di elettroni che si trovino a riposo. Nel caso in cui l'energia del fotone  $h\nu \ll mc^2$ , ci ritroviamo nel caso classico di scattering Thomson, in cui

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \quad (5.42a)$$

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{1}{2}r_0^2(1 + \cos^2 \theta) \quad (5.42b)$$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}r_0^2 \quad (5.42c)$$

dove  $\varepsilon$  e  $\varepsilon_1$  sono l'energia del fotone incidente e scatterato,  $d\sigma_T/d\Omega$  è la sezione d'urto Thomson differenziale per radiazione incidente non polarizzata, e  $r_0 = e^2/mc^2$  è il raggio classico dell'elettrone. Quando  $\varepsilon = \varepsilon_1$  lo scattering è detto *coerente* o *elastico*.

Effetti quantistici hanno due effetti: (i) modificano la cinematica del processo di scattering e (ii) modificano le sezioni d'urto.

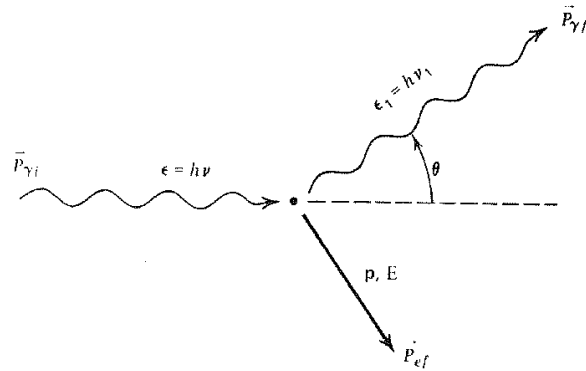


Figura 5.3: Definizione della geometria per un lo scattering di un fotone da parte di un elettrone inizialmente a riposo.

Gli effetti cinematici avvengono perché un fotone possiede, oltre la sua energia  $\epsilon = h\nu$ , anche una quantità di moto  $\mathbf{p}$ , con  $|\mathbf{p}| = \epsilon/c$ . Lo scattering quindi non sarà più elastico a causa del rinculo della carica. Consideriamo il sistema in cui un fotone di energia  $\epsilon$  incide su di un elettrone a riposo il quale, dopo l'urto, avrà acquistato una velocità  $v$  (vedi Figura 5.3).

Dalla legge di conservazione dell'energia prima e dopo l'urto avremo che

$$\epsilon + mc^2 = \epsilon' + c\sqrt{m^2c^2 + p_e^2}$$

mentre dalla conservazione della quantità di moto abbiamo che

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e$$

Dalla seconda segue  $p_e = p - p'$ , che quadrando e sostituendo nella prima

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{mc^2}(1 - \cos \theta)} \quad (5.43)$$

che può essere riscritta in termini della lunghezza d'onda come

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) = \lambda_c(1 - \cos \theta) \quad (5.44)$$

dove  $\lambda_c = 2.4 \cdot 10^{-10}$  cm è detta lunghezza d'onda Compton. Vediamo quindi che compare una variazione in lunghezza d'onda dell'ordine di  $\lambda_c$  durante uno scattering Compton. Per lunghezze d'onda  $\lambda \gg \lambda_c$  (cioè  $h\nu \ll mc^2$ ) lo scattering è elastico, e quindi non c'è variazione nell'energia del fotone nel SdR dell'elettrone.

Diamo ora una descrizione qualitativa degli effetti quantistici sulla sezione d'urto. Si può far vedere che la sezione d'urto differenziale per radiazione non polarizzata in elettrodinamica quantistica è data dalla formula di *Klein-Nishina*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^2} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} - \sin^2 \theta \right) \quad (5.45)$$

Si noti che per  $\varepsilon_1 \simeq \varepsilon$  questa si riduce all'espressione classica (5.42b). Il principale effetto che si può ricavare dall'espressione quantistica (5.45) è che all'aumentare dell'energia del fotone la sezione d'urto si riduce rispetto a quella classica (5.42b). Quindi lo scattering Compton diventa meno efficiente all'aumentare dell'energia. La sezione d'urto totale ha l'espressione

$$\sigma = \sigma_T \frac{3}{4} \left\{ \frac{1+x}{x^3} \left[ \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\} \quad (5.46)$$

dove  $x \equiv h\nu/mc^2$ . Nel regime non relativistico abbiamo che

$$\sigma \simeq \sigma_T \left( 1 - 2x + \frac{26x^2}{5} + \dots \right) \quad x \ll 1 \quad (5.47)$$

mentre nel regime relativistico abbiamo

$$\sigma \simeq \frac{3}{8} \sigma_T x^{-1} \left( \ln 2x + \frac{1}{2} \right) \quad x \gg 1 \quad (5.48)$$

### 5.5.2 Scattering da elettroni in movimento

Nella sezione precedente abbiamo considerato il caso che gli elettroni che fanno da diffusori per la radiazione fossero in quiete. Trattiamo ora il caso in cui gli elettroni posseggono una propria velocità. Assumeremo che nel SdR dell'elettrone i fotoni abbiano  $h\nu \ll mc^2$ , in modo da poter trascurare le correzioni quantistiche nella sezione d'urto di Klein-Nishina.

Se l'elettrone in movimento possiede sufficiente energia cinetica rispetto al fotone, è possibile che sia l'elettrone a trasferire energia al fotone. In questo caso si parla di **scattering Compton inverso**.



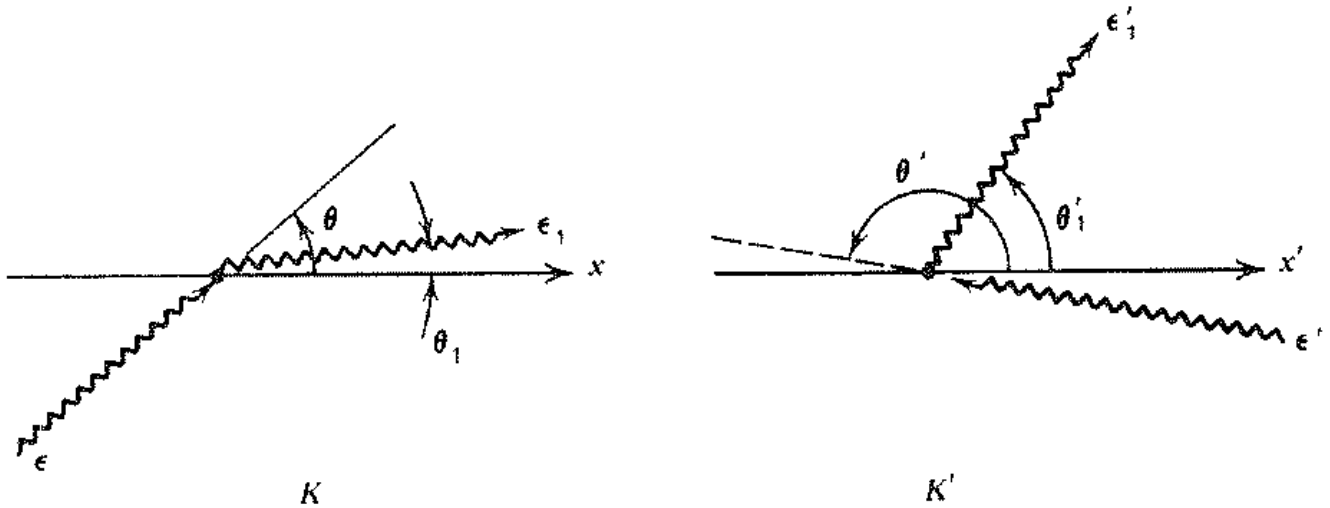


Figura 5.4: Definizione della geometria dello scattering Compton nel SdR  $K$  dell'osservatore e nel SdR  $K'$  dell'elettrone a riposo.

Siano ora  $K$  il SdR del laboratorio (osservatore) e sia  $K'$  il SdR in cui l'elettrone si trovi a riposo. L'evento di scattering visto nei due SdR è mostrato in Figura 5.4. Si noti che tutte le formule ricavate nella sezione precedente dovrebbero essere riscritte in forma primata, dato che valgono nel SdR in cui l'elettrone è a riposo.

Dalle formule dell'effetto Doppler relativistico abbiamo che

$$\epsilon' = \epsilon \gamma (1 - \beta \cos \theta) \quad (5.49a)$$

$$\epsilon_1 = \epsilon'_1 \gamma (1 + \beta \cos \theta'_1) \quad (5.49b)$$

Dall'Eq. 5.43 abbiamo però che

$$\varepsilon'_1 \simeq \varepsilon' \left[ 1 - \frac{\varepsilon'}{mc^2} (1 - \cos \Theta) \right] \quad (5.50a)$$

$$\cos \Theta = \cos \theta'_1 \cos \theta' + \sin \theta' \sin \theta'_1 \cos(\phi' - \phi'_1) \quad (5.50b)$$

dove  $\phi'_1$  e  $\phi'$  sono gli angoli azimutali del fotone scatterato e del fotone incidente nel SdR dell'elettrone a riposo.

Nel caso di elettroni relativistici,  $\gamma^2 - 1 \gg h\nu/mc^2$ , l'energia del fotone prima dello scattering, nel SdR  $K'$  e dopo lo scattering stanno nel rapporto

$$1 : \gamma : \gamma^2$$

sempre che venga soddisfatta la condizione per scattering Thomson nel SdR  $K'$   $\gamma\varepsilon \ll mc^2$ . Questo segue direttamente dalle (5.49), dato che  $\theta \simeq \theta'_1 \simeq \pi/2$ .

Questo processo quindi converte un fotone di bassa energia in uno di alta energia moltiplicandone l'energia per un fattore dell'ordine di  $\gamma^2$ . Dato che nel limite di Thomson possiamo avere fotoni fino a 100 keV, si può vedere

come in questo modo si possano ottenere fotoni di energie enormi.

Se l'energia intermedia è troppo alta, allora gli effetti quantistici menzionati precedentemente agiscono riducendo l'efficienza del processo (facendo sì che  $\varepsilon'_1 < \varepsilon$ ) e riducendo la probabilità di scattering (riduzione di  $\sigma$ ).

Da un punto di vista cinematico abbiamo che l'energia massima raggiungibile dal fotone sarà  $\sim \gamma mc^2$ , dato che per conservazione dell'energia dobbiamo avere  $\varepsilon_1 < \gamma mc^2 + \varepsilon$ .

### 5.5.3 Il parametro di Comptonizzazione $y$

Prima di discutere in dettaglio quale sia l'effetto di ripetuti scattering Compton sullo spettro totale e sulla distribuzione di energia dei fotoni, determiniamo quali sono le condizioni per cui il processo di scattering altera in maniera significativa l'energia totale del fotone. Al solito ci poniamo nel limite di Thomson  $\gamma\epsilon \ll mc^2$ .

In un mezzo finito possiamo definire il parametro di Comptonizzazione  $y$  per determinare se un fotone subirà una variazione significativa della sua energia nell'attraversare un mezzo:

$$y \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{variazione di energia} \\ \text{frazionale media per} \\ \text{scattering} \end{array} \right\} \times \left( \begin{array}{l} \text{numero medio di} \\ \text{scattering} \end{array} \right) \quad (5.51)$$

In generale, se  $y > 1$  l'energia totale del fotone, così come il suo spettro, saranno significativamente modificati; nel caso in cui  $y \ll 1$  non avremo variazioni apprezzabili.

Cerchiamo ora di dare una stima per il primo termine di (5.51). Per convenienza supporremo che la distribuzione degli elettroni sia termica. Nel caso di elettroni non relativistici, mediando la (5.50a) sull'angolo abbiamo che

$$\frac{\Delta\varepsilon'}{\varepsilon'} \equiv \frac{\varepsilon'_1 - \varepsilon'}{\varepsilon'} = -\frac{\varepsilon'}{mc^2} \quad (5.52)$$

Nel SdR del laboratorio, al primo ordine nei due parametri (piccoli)  $\varepsilon/mc^2$  e  $kT/mc^2$ , dobbiamo avere

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{mc^2} + \alpha \frac{kT}{mc^2} \quad (5.53)$$

dove  $\alpha$  è un certo parametro da determinare. Per calcolarlo, immaginiamo che fotoni ed elettroni siano in completo equilibrio ma che interagiscano solamente per scattering. Assumiamo inoltre che la densità dei fotoni sia sufficientemente piccola che processi di emissione stimolata possano essere trascurati. In questo caso i fotoni devono seguire una funzione di distribuzione di Bose-Einstein con un certo potenziale chimico. Infatti, dato che per scattering non si possono nè creare nè distruggere fotoni, una

distribuzione di Planck non può essere valida.

Per una distribuzione termica degli elettroni abbiamo che

$$N(\varepsilon) = K\varepsilon^2 e^{-\varepsilon/kT}$$

e quindi

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int \varepsilon \frac{dN}{d\varepsilon} d\varepsilon}{\int \frac{dN}{d\varepsilon} d\varepsilon} = 3kT \quad (5.54a)$$

$$\langle \varepsilon^2 \rangle = 12(kT)^2 \quad (5.54b)$$

In questo caso specifico abbiamo che non ci può essere scambio di energia tra i fotoni e gli elettroni, quindi

$$\begin{aligned} \langle \Delta \varepsilon \rangle &= 0 = \alpha \frac{kT}{mc^2} - \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle}{mc^2} \\ &= \frac{3kT}{mc^2} (\alpha - 4)kT \end{aligned}$$

da cui segue che  $\alpha = 4$ . Quindi per elettroni non relativistici in equilibrio termico, l'espressione per il trasferimento di energia per scattering è

$$\Delta\varepsilon|_{\text{NR}} = \frac{\varepsilon}{mc^2}(4kT - \varepsilon) \quad (5.55)$$

Si noti che se gli elettroni hanno una temperatura maggiore dell'energia dei fotoni incidenti, i fotoni acquistano energia. Se invece  $\varepsilon > 4kT$  allora energia viene trasferita dai fotoni agli elettroni.

Nel limite ultrarelativistico  $\gamma \gg 1$ , dalle relazioni (5.49) abbiamo che

$$\Delta\varepsilon|_{\text{R}} \simeq \frac{4}{3}\gamma^2\varepsilon \quad (5.56)$$

dove il fattore  $\frac{4}{3}$  deriva dalla mediazione sugli angoli. Con argomenti analoghi a quelli utilizzati per ricavare le relazioni (5.54) abbiamo che

$$\langle\gamma^2\rangle = \frac{\langle E^2\rangle}{(mc^2)^2} = 12 \left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2$$

quindi Eq. 5.56 diventa

$$\Delta\varepsilon|_{\text{R}} \simeq 16\varepsilon \left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2 \quad (5.57)$$

Ora, il secondo termine della relazione (5.51), ricordando la discussione fatta sul random walk, (relazioni (5.11) e (5.12)), sarà dato da

$$\left( \begin{array}{c} \text{numero medio di} \\ \text{scattering} \end{array} \right) \simeq \max(\tau_{\text{es}}, \tau_{\text{es}}^2) \quad (5.58)$$

dove abbiamo definito la profondità ottica per scattering elettronico

$$\tau_{\text{es}} \sim \rho \kappa_{\text{es}} R \quad (5.59)$$

$\kappa_{\text{es}}$  è l'opacità per scattering elettronico, che per un gas composto da Idrogeno ionizzato vale

$$\kappa_{\text{es}} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{m_{\text{p}}} = 0.40 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (5.60)$$

mentre  $R$  è la dimensione del mezzo. Ricapitolando, l'espressione per il parametro di Comptonizzazione  $y$  per elettroni termici relativistici e non relativistici è

$$y = \max(\tau_{\text{es}}, \tau_{\text{es}}^2) \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{4kT}{mc^2} \right) \quad \text{Non Relativistico} \\ 16 \left( \frac{kT}{mc^2} \right)^2 \quad \text{Relativistico} \end{array} \right. \quad (5.61)$$



Nel ricavare queste espressioni abbiamo trascurato il trasferimento di energia nel SdR dell'elettrone a riposo, cioè  $4kT \gg \varepsilon$  nel caso non relativistico. In situazioni in cui l'assorbimento sia un effetto importante, è conveniente definire il parametro di Comptonizzazione  $y(\nu)$  dipendente dalla frequenza. In questo caso  $\tau_{\text{es}}$  deve essere valutato a partire dalla profondità ottica effettiva  $\tau_*(\nu)$ , dell'ordine dell'unità. Quindi  $\tau_{\text{es}}(\nu) = \rho \kappa_{\text{es}} l_*(\nu)$  da cui, usando (5.17),

$$\tau_{\text{es}}(\nu) \simeq \left( \frac{\kappa_{\text{es}}/\kappa_a(\nu)}{1 + \kappa_a(\nu)/\kappa_{\text{es}}} \right)^{1/2} \quad (5.62)$$

dove  $\kappa_a(\nu)$  è l'opacità per assorbimento. Questa equazione fornisce la profondità ottica per scattering dal punto di vista di emissione di un fotone di frequenza  $\nu$ . Le definizioni del parametro di Comptonizzazione rimangono le stesse con  $\tau_{\text{es}}$  sostituito da  $\tau_{\text{es}}(\nu)$ .

#### 5.5.4 Significato fisico del parametro di Comptonizzazione $y$

L'importanza del parametro di Comptonizzazione  $y$  risiede nel fatto che esso rappresenta il fattore di amplificazione di energia nel caso di scattering Compton. Quello che ora dimostreremo è che se un fotone di energia iniziale  $\varepsilon_i$  incide su di una nube composta da elettroni termici non relativistici ad una temperatura  $T$ , allora dopo scattering Compton esso emergerà con una energia  $\varepsilon_f \simeq \varepsilon_i e^y$  (se ovviamente  $\varepsilon_f \ll 4kT$ ).

Consideriamo quindi una nube di elettroni non relativistici mantenuta ad una temperatura  $T$ . La nube è otticamente spessa per scattering elettronico, cioè  $\tau_{es} \gg 1$ , ma nello stesso tempo è otticamente sottile per assorbimento, cioè  $\tau_*(h\nu = kT) \ll 1$ . Una grossa quantità di elettroni “soffici”, ognuno di energia caratteristica  $\varepsilon_i \ll kT$  viene iniettata nella nube.

Come risultato di scattering Compton inverso, questi fotoni “soffici” emergeranno dalla nube con energia caratteristica  $\varepsilon_f$ . Il trasferimento di energia in uno scattering singolo, come abbiamo visto in (5.55) è dato da

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon \left( \frac{4kT}{mc^2} - \frac{\varepsilon}{mc^2} \right)$$

Per fotoni di energia  $\varepsilon \ll 4kT$  il trasferimento di energia può essere messo in forma differenziale

$$\frac{d\varepsilon}{dN} \sim \varepsilon \frac{4kT}{mc^2}$$

dove  $dN$  è il numero differenziale di scattering. Dopo  $N$  scattering, l'energia iniziale  $\varepsilon_i$  di un fotone sarà

$$\varepsilon_N \sim \varepsilon_i \exp \left( \frac{4kT}{mc^2} N \right) \quad (5.63)$$

per  $\varepsilon_N \ll 4kT$ . In un mezzo di profondità ottica  $\tau_{es} \gg 1$ , il numero di scattering prima che il fotone riesca ad uscire dalla nube è, come abbiamo visto  $\sim \tau_{es}^2$ , quindi la (5.63) diventa

$$\varepsilon_f \sim \varepsilon_i e^y \quad y \equiv \frac{4kT}{mc^2} \tau_{es}^2 \quad (5.64)$$

Dalla definizione del parametro di Comptonizzazione abbiamo che  $\varepsilon_f$  aumenta rapidamente all'aumentare di  $\tau_{es}$ . Ad un certo punto però la profondità ottica raggiungerà un valore critico  $\tau_{crit}$  oltre il quale il processo di Comptonizzazione satura. Questo ovviamente avviene quando  $\varepsilon_f \sim 4kT$ .

Se poniamo questo valore nell'Eq. 5.64 otteniamo

$$\tau_{crit} = \left[ \frac{mc^2}{4kT} \ln \left( \frac{4kT}{\varepsilon_i} \right) \right]^{1/2} \quad (5.65)$$

### 5.5.5 Regimi spettrali per scattering multipli

Una analisi dettagliata dell'evoluzione dello spettro in presenza di scattering ripetuti su elettroni relativistici è molto difficile perché il trasferimento di energia per scattering è grande, dello stesso ordine di grandezza delle energie in gioco nel processo. Se però gli elettroni sono non relativistici il trasferimento di energia razionale per scattering è in questo caso piccolo. In particolare, l'equazione di Boltzmann (che regola il comportamento della densità  $n$  dei fotoni nello spazio delle fasi dovuta a scattering di elettroni) può essere espansa al secondo ordine in questa piccola quantità dando luogo alla cosiddetta equazione di Fokker-Planck. Per fotoni scatterati da elettroni termici non relativistici l'equazione di Fokker-Planck è nota con il nome di *equazione di Kompaneets*

$$\frac{\partial n}{\partial t_c} = \left( \frac{kT}{mc^2} \right) \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 (n' + n + n^2) \right] \quad (5.66)$$

dove  $n$  è la funzione di distribuzione dei fotoni che subiscono ripetuti scattering Compton inverso non relativistici,  $n' = \partial n / \partial x$ ,  $x = h\nu/kT$ , e  $t_c =$

$(N_e \sigma_T c)t$  è il tempo in unità di tempo medio tra scattering. In generale, Eq. 5.66 deve essere risolta numericamente.

E' però possibile considerare casi limite ( $y \ll 1 \rightarrow$  corpo nero modificato;  $y \gg 1 \rightarrow$  Comptonizzazione saturata), in cui una analisi approssimata è sufficiente. Per i casi intermedi (Comptonizzazione non saturata) bisognerà ritornare ad un trattamento più dettagliato.

Per poter meglio delineare i regimi di validità delle nostre approssimazioni, introduciamo delle frequenze (energie) caratteristiche. In astrofisica abbiamo a che fare con mezzi termici in cui i fenomeni di assorbimento ed emissione sono dovuti a processi di bremsstrahlung. In questo caso abbiamo visto che il peso dell'assorbimento è maggiore a bassa energia (si vedano le espressioni (5.40) e (5.41) per il coefficiente di assorbimento per scattering libero-libero). Se indichiamo con  $\nu_0$  la frequenza a cui i coefficienti di assorbimento e di scattering sono uguali, allora dalla definizione di opacità e dalle equazioni (5.60) e (5.40) abbiamo che

$$\kappa_{\text{es}} = \kappa_{\text{ff}}(v_0) \quad (5.67a)$$

$$\frac{x_0^3}{1 - e^{-x_0}} \sim 4 \cdot 10^{25} T^{-7/2} \rho \bar{g}_{\text{ff}}(x_0) \quad (5.67b)$$

dove abbiamo definito  $x_0 \equiv hv_0/kT$  e  $\bar{g}_{\text{ff}}(x)$  è il fattore di Gaunt libero-libero.

Nel nostro intervallo di interesse  $\bar{g}_{\text{ff}}(x)$  è approssimato dalla espressione

$$\bar{g}_{\text{ff}}(x) \sim \frac{3}{\pi} \ln \left( \frac{2.25}{x} \right)$$

Se  $x < x_0$  allora lo scattering sarà trascurabile, mentre per  $x > x_0$  lo scattering modificherà lo spettro. Si noti che se  $x_0 \gtrsim 1$  allora lo scattering può essere trascurato lungo la maggior parte dello spettro. Nella discussione che seguirà assumeremo che  $x_0 \ll 1$ .

Consideriamo ora la frequenza  $\nu_t$  a cui il mezzo diventa effettivamente sottile (traslucido). Dalle equazioni (5.40) e (5.18) abbiamo che

$$\kappa_{\text{es}} = \kappa_{\text{ff}}(v_t) \tau_{\text{es}}^2 \quad (5.68a)$$

$$\frac{x_t^3}{1 - e^{-x_t}} \sim 4 \cdot 10^{25} T^{-7/2} \rho \bar{g}_{\text{ff}}(x_t) \tau_{\text{es}}^2 \quad (5.68b)$$

dove  $x_t \equiv h\nu_t/kT$  e  $\tau_{\text{es}}$  è la profondità ottica totale per scattering elettronico definita in (5.59). Per  $x > x_t$  l'assorbimento è trascurabile. Nell'intervallo  $x_0 < x < x_t$  sia lo scattering che l'assorbimento sono importanti.

Infine introduciamo la frequenza  $\nu_{\text{coe}}$  a cui lo scattering incoerente (inelastico, cioè effetti dovuti a Compton inverso) diventa importante.

Questa energia è definita in modo che il parametro di Comptonizzazione  $y(\nu_{\text{coe}}) = 1$ . Cioè per  $\nu > \nu_{\text{coe}}$  il processo di scattering Compton inverso diventa importante tra l'emissione e l'uscita dal mezzo. Si noti che questa frequenza è definita soltanto se il parametro  $y > 1$  (altrimenti Compton inverso è trascurabile ad ogni frequenza). Dalle equazioni (5.61), (5.62) e (5.40), per  $x_{\text{coe}} \ll 1$



$$\kappa_{\text{es}} = \left( \frac{mc^2}{4kT} \right) \kappa_{\text{ff}}(v_{\text{coe}}) \quad (5.69a)$$

$$x_{\text{coe}} \sim 2.4 \cdot 10^{17} \rho^{1/2} T^{-9/4} [\bar{g}_{\text{ff}}(x_{\text{coe}})]^{1/2} \quad (5.69b)$$

Dalle equazioni (5.68b) e (5.69b) segue che scattering Compton inverso è importante e  $x_{\text{coe}}$  è definito solamente quando  $x_{\text{coe}} < x_{\text{t}}$ .

Una volta definite queste energie, vediamo di studiare diversi casi limite per gli spettri di Comptonizzazione.

□ **Corpo nero modificato:**  $y \ll 1$

Nel caso in cui  $y \ll 1$  allora solo scattering coerente è importante.

In questo caso è possibile dimostrare che l'intensità della radiazione emergente in un mezzo semi-infinito in cui siano presente sia scattering che assorbimento ha la forma

$$I_\nu = \frac{2B_\nu}{1 + \sqrt{\frac{\kappa_{\text{ff}} + \kappa_{\text{es}}}{\kappa_{\text{ff}}}}} \quad (5.70)$$

Nel limite  $x \ll x_0$  abbiamo che la (5.70) si riduce all'intensità di corpo nero, mentre per  $x \gg x_0$  la (5.70) diventa un corpo nero "modificato"

$$\begin{aligned} I_\nu^{\text{MB}} &\equiv 2B_\nu \sqrt{\frac{\kappa_{\text{ff}}}{\kappa_{\text{es}}}} \\ &= 8.4 \cdot 10^{-4} T^{5/4} \rho^{1/2} \bar{g}_{\text{ff}}^{-1/2} x^{3/2} e^{-x/2} (e^x - 1)^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.71)$$

dove  $I_{\nu}^{\text{MB}}$  è misurata in  $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{Ster}^{-1}$ . Per  $x_0 \ll 1$

Eq. 5.67b ci fornisce una equazione approssimata per  $x_0$ :

$$x_0 \sim 6.3 \cdot 10^{12} T^{-7/4} \rho^{1/2} [\bar{g}_{\text{ff}}(x_0)]^{1/2} \quad (5.72)$$

Si noti che nell'intervallo  $x_0 \ll x \ll 1$   $I_{\nu}^{\text{MB}} \propto \nu$  invece della legge di Rayleigh-Jeans  $I_{\nu}^{\text{RJ}} \propto \nu^2$ .

L'Equazione 5.70 vale solamente per un mezzo semi-infinito. Nel caso di un mezzo finito bisogna determinare il valore di  $x_t$ . Se  $x_t < x_0$  l'emissione è di corpo nero per  $x < x_t$  ed un bremsstrahlung otticamente sottile per  $x > x_t$  (lo scattering non è mai importante). Per  $x_0 < x_t < 1$  l'emissione è correttamente descritta da (5.70) per  $x < x_t$  e poi diventa bremsstrahlung otticamente sottile per  $x > x_t$ . Per  $x_t > 1$  il mezzo si comporta come se fosse infinito, e (5.70) può essere usata per l'intero spettro.

### □ Spettro di Wien: $y \gg 1$

Quando  $y \gg 1$ , Compton inverso può essere importante, a seconda che  $x_{\text{coe}} \ll 1$  o  $x_{\text{coe}} \gg 1$ . Nell'ultimo caso Compton inverso può essere trascurato, dato che la maggior parte dei fotoni subisce scattering coerente. Lo spettro avrà in questo caso la forma di un corpo nero modificato. Per  $x_{\text{coe}} \ll 1$ , dalle relazioni (5.67b) e (5.69b), abbiamo

$$x_{\text{coe}} = \left( \frac{mc^2}{4kT} \right)^{1/2} x_0 \quad (5.73)$$

Lo spettro è descritto correttamente dalla (5.70) per  $x \ll x_{\text{coe}}$ , ma per  $x \gtrsim x_{\text{coe}}$  dobbiamo considerare effetti di scattering Compton inverso (si veda Figura 5.5). In questa regione dello spettro, se  $x_{\text{coe}} \ll 1$ , Compton inverso sarà saturato producendo uno spettro di Wien

$$I_{\nu}^{\text{W}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} n = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\alpha} e^{-h\nu/kT} \quad (5.74)$$

dove il fattore  $e^{-\alpha}$  è funzione del tasso di produzione dei fotoni.

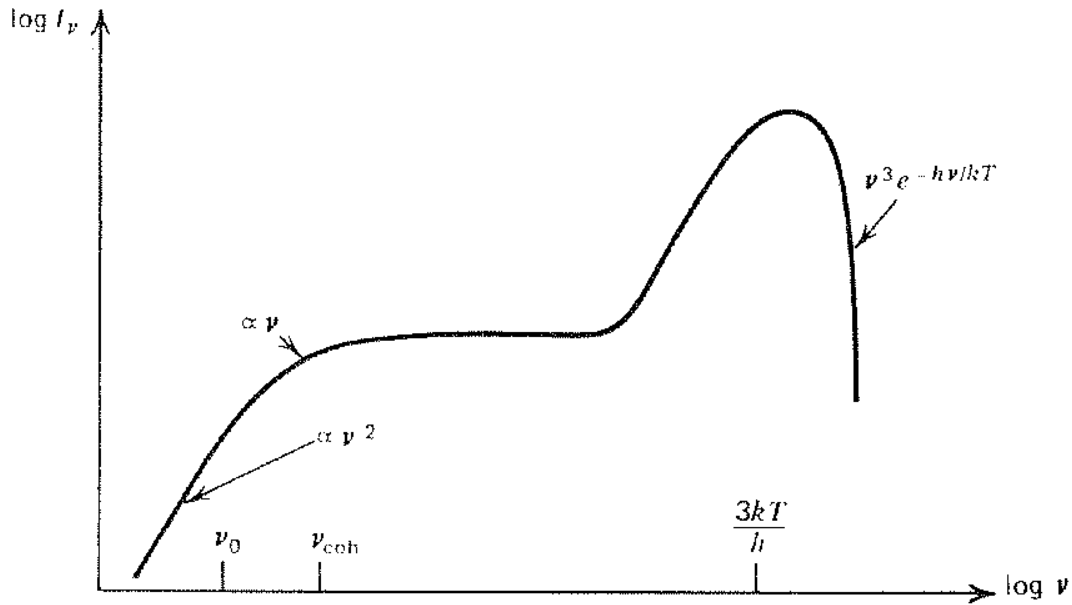


Figura 5.5: Spettro emergente da un mezzo termico, non relativistico caratterizzato da emissione ed assorbimento libero-libero e da scattering Compton inverso saturato. A basse frequenze lo spettro è un corpo nero, poi diventa un corpo nero modificato e ad alte frequenze diventa uno spettro di Wien.

Il flusso totale emesso nello spettro (5.74) è

$$F^W(\text{erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-2}) = \pi \int I_v^W dv = \frac{12\pi e^{-\alpha} (kT)^4}{c^2 h^3} \quad (5.75)$$

mentre l'energia media del fotone è  $\bar{h\nu} = 3kT$ .

### □ Comptonizzazione non saturata

Consideriamo infine il caso in cui  $y \gg 1$  ma in cui  $x_{\text{coe}} \sim 1$ , cioè mezzi in cui il processo di Compton inverso è importante ma in cui lo spettro

non satura allo spettro di Wien. In questo caso è necessaria una analisi dell'equazione di Kompaneets (5.66). Senza entrare nei dettagli è possibile fare vedere come una soluzione di (5.66) in cui abbiamo un input di fotoni “soffici” ha la forma di una legge di potenza

$$n \propto x^m$$

$$m(m+3) = \frac{4}{y} \quad (5.76)$$

$$m = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4}{y}}$$

e dove  $y$  è il parametro di Comptonizzazione definito in (5.61). La radice positiva è appropriata se  $y \gg 1$ ; per  $y \ll 1$  è invece appropriata la radice negativa. Per  $y \sim 1$  bisogna prendere una combinazione lineare delle due soluzioni e non esiste una soluzione a legge di potenza. Dalla misura della pendenza dello spettro di Comptonizzazione non saturata con fotoni “soffici” si possono determinare sia la temperatura degli elettroni che la profondità ottica di scattering della sorgente.

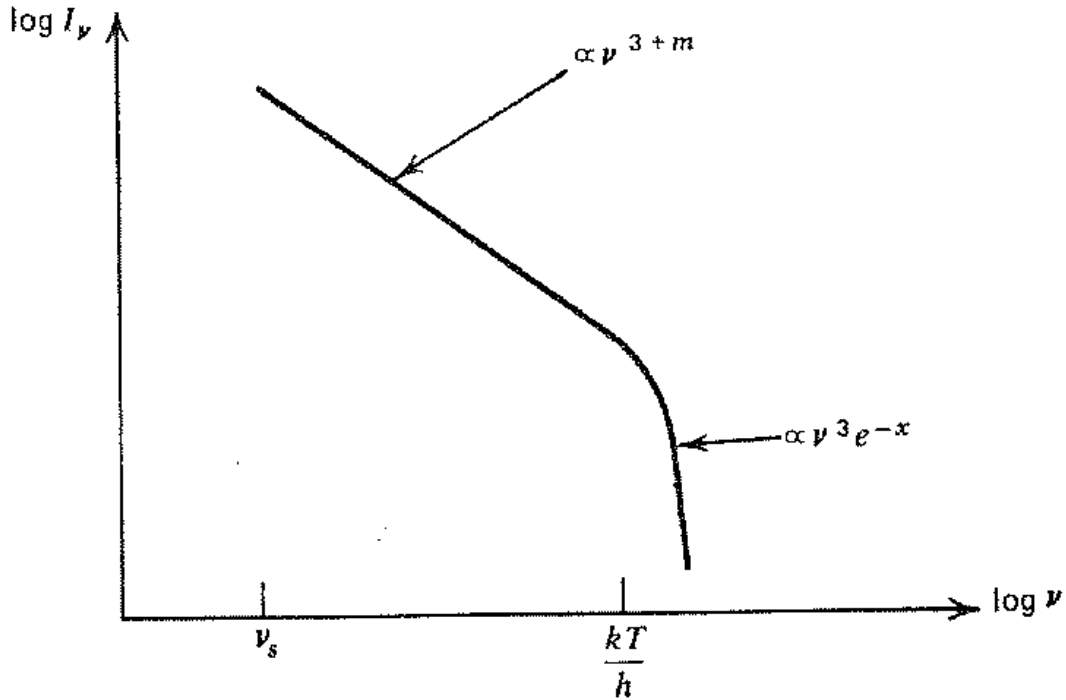


Figura 5.6: Spettro prodotto da Comptonizzazione non saturata di fotoni di bassa energia su elettroni termici.

Lo spettro da Comptonizzazione non saturata è mostrato in Figura 5.6.

L'intensità emergente nel regime di legge di potenza soddisfa la

$$I_\nu \sim I_{\nu_s} \left( \frac{\nu}{\nu_s} \right)^{3+m} \quad (5.77)$$

Lo spettro è molto sensibile alle variazioni in  $y$ . L'energia iniziale dei fotoni è significativamente amplificata per  $m \geq -4$ , cioè se  $y \geq 1$ , analogamente a quanto abbiamo visto nel caso relativistico.

# **Tecniche di Osservazione**



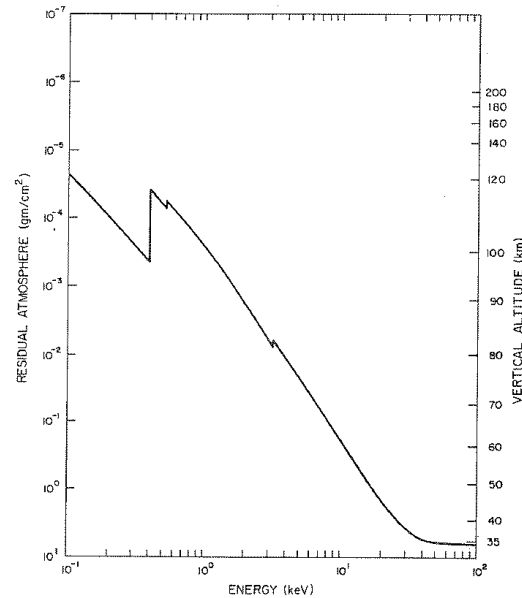


Figura 6.1: L'atmosfera terrestre attenua raggi X incidenti per assorbimento fotoelettrico e, al di sopra dei 30 keV, per scattering Compton. Questa curva rappresenta una profondità ottica unitaria in funzione dell'energia. La scala sulla sinistra indica la densità colonnare atmosferica sulla verticale che produce l'attenuazione di una profondità ottica, mentre sulla destra la scala indica l'altezza minima richiesta per produrre almeno questa attenuazione. Le discontinuità sono dovute agli *edges* di Azoto, Ossigeno ed Argon.

## 6.1 Introduzione

Gli esperimenti per lo studio dell'emissione nella banda X da parte di oggetti celesti devono confrontarsi con due realtà: (i) a causa dell'effetto di schermo della nostra atmosfera, gli strumenti devono essere portati a grandi altezze (vedi Figura 6.1); (ii) i fotoni X possiedono una tale energia che la loro interazione con la materia produce un effetto osservabile.

In generale i dati dell'astronomia X saranno nella forma di numero di eventi (conteggi) misurati in un certo intervallo temporale, o il tempo di arrivo per un certo evento. Questi conteggi sono molto piccoli: ad esempio, il flusso della sorgente piú brillante del cielo X, Sco X-1, è circa 100 fotoni  $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ . La seconda sorgente piú brillante, la Nebulosa del Granchio, è soltanto un decimo di questa.

Il fatto che i rivelatori debbono essere portati al di sopra dell'atmosfera, fa sì che vi siano un certo numero di eventi significativi che non appartengono all'emissione della sorgente, ma che fanno da *fondo* e debbono essere discriminati dall'emissione di sorgente: ad esempio raggi X e  $\gamma$  dovuti alla interazione dei raggi cosmici con la nostra atmosfera.

Per cercare di limitare questa sorgente di fondo sono stati studiati dispositivi di collimazione meccanica, in modo da limitare il campo di vista del rivelatore, o tecniche di anti-coincidenza. Per basse energie sono inoltre a disposizione anche sistemi di focalizzazione, in modo da aumentare il rapporto segnale/rumore.

## 6.2 Rivelatori per astronomia X

Il principio di funzionamento di una classe di rivelatori di raggi X utilizzati in astronomia si basa sull'assorbimento (scattering) di fotoni incidenti provenienti dai sorgenti celesti con il materiale del rivelatore. Questi raggi X generano un elettrone che trasporta una qualche frazione dell'energia del fotone. Questo elettrone produce elettroni secondari che possono essere rivelati come una corrente, oppure luce visibile che può essere rivelata in un fotomoltiplicatore. Una ulteriore classe di rivelatori usati in astronomia X determina l'energia del fotone incidente misurando la variazione di temperatura associata al suo assorbimento (microcalorimetri).

Possiamo classificare i rivelatori per astronomia X in quattro famiglie: 1. Rivelatori a gas; 2. Rivelatori a scintillazione; 3. Rivelatori a semiconduttore; 4. Calorimetri. La scelta di un particolare tipo di rivelatore dipende dalla energia dei fotoni che si vogliono rivelare, da requisiti di risoluzione energetica ed efficienza, e dal costo.

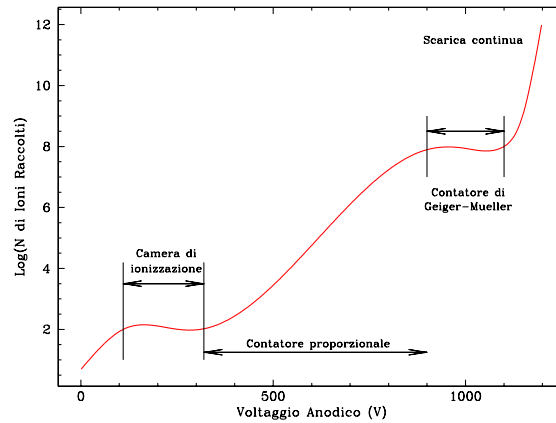


Figura 6.2: Output di un rivelatore a gas in funzione del voltaggio applicato all'anodo. Si tenga presente che i valori esatti dell'alta tensione variano moltissimo in funzione della geometria del rivelatore, del tipo e della pressione del gas utilizzato.

Un rivelatore a gas consiste in una scatola metallica (che funziona da catodo) riempita di gas e contenente uno o piú fili (anodi). Un fotone che passa attraverso il gas lo ionizza producendo elettroni e ioni liberi. Gli elettroni vengono attratti all'anodo, producendo un impulso elettrico. Se la differenza di potenziale tra anodo e catodo è bassa, gli elettroni si possono ricombinare con gli ioni. La ricombinazione può avvenire anche in presenza di una alta densità di ioni. Per un voltaggio sufficientemente elevato praticamente tutti gli elettroni vengono raccolti sull'anodo, ed il rivelatore è detto *camera di ionizzazione*. Aumentando il voltaggio, gli elettroni so-

no accelerati verso l'anodo con energie sufficienti a ionizzare altri atomi, creando così altri elettroni. Questo rivelatore è detto *contatore proporzionale*. Aumentando ancora il voltaggio, la moltiplicazione degli elettroni è ancora maggiore, ed il numero di elettroni raccolti all'anodo diventa *indipendente* dalla ionizzazione iniziale. Quest'ultimo tipo di rivelatore è detto *contatore Geiger-Mueller*, in cui il segnale all'anodo è lo stesso per tutti i fotoni. Per voltaggi ancora superiori avviene la scarica continua. I diversi regimi di alte tensioni descritti sono visualizzati in Fig. 6.2.

Vediamo ora di descrivere in dettaglio l'interazione tra i raggi X incidenti ed il materiale che compone il rivelatore. Fino ad una certa energia e a seconda del numero atomico  $Z$  del materiale avremo che il processo principale per cui il fotone X viene assorbito è *assorbimento fotoelettrico*. In questo processo si ha l'espulsione dell'elettrone più interno che è energeticamente permesso.

L'energia dell'elettrone sarà  $E_x - E_s$  dove  $E_x$  è l'energia del fotone X incidente ed  $E_s$  l'energia della shell. Ad esempio, nell'Alluminio  $E_s = 1.56$  keV

per elettroni della shell  $K$ . Ovviamente la transizione avverrà solamente se  $E_x \geq E_s$ . Se il fotone X possiede una energia leggermente inferiore non riuscirà ad estrarre l'elettrone dalla shell  $K$ , ma uno dalla shell  $L$  e quindi vi sarà una discontinuità (*edge*) nella sezione d'urto di assorbimento, come mostrato in Figura 6.3. Il salto è di circa un fattore 10. A parte queste discontinuità, la sezione d'urto ha un andamento  $\propto E^{-3} Z^4$ .

A seguito dell'emissione dell'elettrone, l'atomo si trova in uno stato eccitato e può liberare l'eccesso di energia  $E_s$  in due modi: può rilasciare una cascata di fotoni, uno dei quali potrebbe essere nella banda X con una energia vicina a  $E_s$ . In questo caso si parla di fluorescenza. Alternativamente, può emettere un secondo elettrone di energia prossima a  $E_s$  dovuto alla redistribuzione degli elettroni nei livelli atomici (effetto Auger). Il rapporto delle probabilità dei due tipi di processi (fluorescenza e Auger) va come  $Z^{-4}$ , quindi per elementi leggeri prevarrà l'effetto Auger mentre per quelli pesanti prevarrà la fluorescenza. Nel caso dell'Alluminio, la probabilità che venga emesso un elettrone di Auger a causa dell'assorbimento di

un fotone X di energia maggiore di 1.56 keV è il 96%.

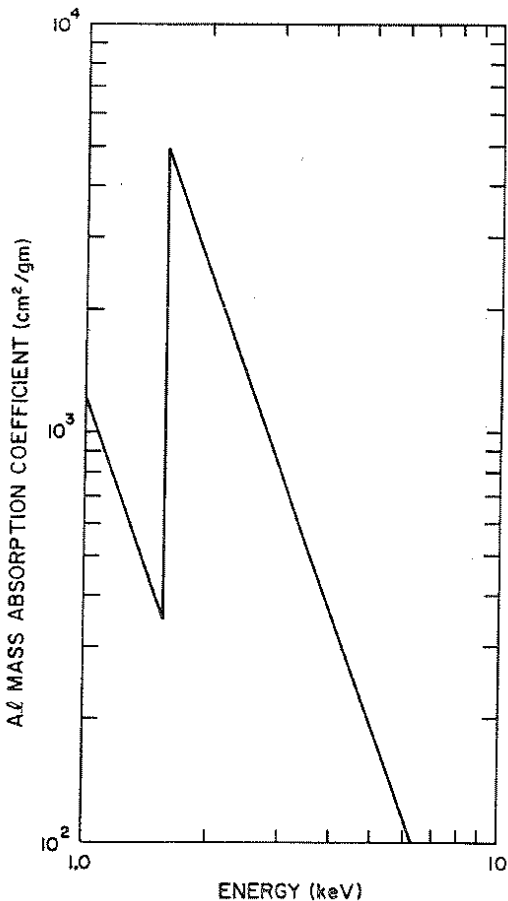


Figura 6.3: Coefficiente di assorbimento per unità di massa per l'Alluminio. Nell'intervallo di energia mostrato, tutto l'assorbimento è dovuto ad effetto fotoelettrico. L'assorbimento mostra una discontinuità a 1.56 keV perché un fotone X di maggiore energia può espellere un elettrone della shell *K*.

Esiste però una probabilità significativa che il fotone X venga scatterato dagli elettroni atomici piuttosto che essere assorbito. Come abbiamo visto, per fotoni di bassa energia questo non è altro che scattering Thomson, la cui sezione d'urto (vedi Eq. 2.2) è  $6.7 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$ , indipendente dall'energia. Ad alta energia lo scattering risulta in una variazione della frequenza del fotone (effetto Compton) e trasferimento di energia all'elettrone che funge da diffusore. Come abbiamo visto,

la condizione affinché vi sia scattering Compton è che l'energia del fotone

sia minore di  $m_e c^2 = 511$  keV. Per un atomo contenente  $Z$  elettroni, la sezione d'urto sarà  $Z$  volte maggiore. In riferimento alla Figura 6.1, scattering Compton è responsabile dell'assorbimento al di sopra dei 40 keV.

Il terzo processo di assorbimento di raggi X è la creazione di coppie, che non può avvenire al di sotto di 1.02 MeV, due volte l'energia a riposo dell'elettrone, ed è per questo che non ce ne occuperemo.

Per descrivere l'assorbimento dei fotoni X nel materiale si utilizza la relazione (vedi Eq. 3.13)

$$I = I_0 \exp(-\mu x) \quad (6.1)$$

dove  $I_0$  è il flusso incidente,  $I$  è il flusso rimanente dopo l'attraversamento di una quantità di materiale di densità colonnare  $x$  g cm<sup>-2</sup> e  $\mu$  è il coefficiente di assorbimento per unità di massa, in unità di cm<sup>2</sup> g<sup>-1</sup>.



La quantità  $\mu$  è legata alla sezione d'urto attraverso la relazione

$$\mu \equiv \frac{\sigma N_0}{A_x} \quad \text{cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (6.2)$$

dove  $N_0$  è il numero di Avogadro<sup>4</sup> e  $A_x$  è il peso atomico del materiale. Si noti come sotto certe condizioni la (6.1) possa dare risultati non corretti dato che fotoni non sono necessariamente rimossi dal fascio dalle interazioni con il materiale.

### 6.2.1 Contatori proporzionali

Un contatore proporzionale consiste essenzialmente di un gas e da elettrodi che sono sistemati in maniera tale per cui viene creato un forte gradiente di campo elettrico vicino agli elettrodi positivi che generalmente hanno la forma di fili. Il catodo può anche essere utilizzato come contenitore del gas e struttura principale del rivelatore, e contiene una sottile finestra di entrata per i fotoni X. In Figura 6.4 viene mostrata una configurazione tipica.

---

<sup>4</sup>Numero di atomi contenuti in un grammo-atomo, che è la quantità di sostanza chimicamente semplice la cui massa è uguale al suo peso atomico.  $N_0 = 6.023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

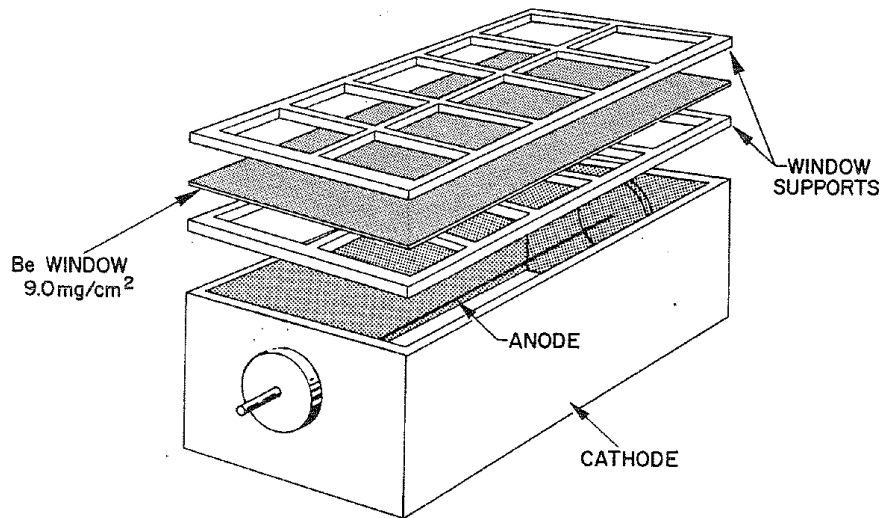


Figura 6.4: Configurazione tipica di un contatore proporzionale. La finestra di Berillio viene cementata in una struttura di supporto a *sandwich* che viene a sua volta saldata ermeticamente sul catodo per preservare l'integrità del gas. L'anodo viene tenuto in tensione da una molla. Un preamplificatore ed un generatore di alta tensione vengono montati il più vicino possibile all'ingresso dell'anodo.

Un fotone X che è assorbito nel gas ionizza un atomo, che reagisce espellendo un foto-elettrone, seguito dall'espulsione di un elettrone Auger ed il rilascio di fotoni di fluorescenza. Il foto-elettrone interagirà con il gas dando luogo ad una ulteriore coppia elettrone-ione. Alla fine la sua energia verrà dissipata ed una nube di coppie elettrone-ione si formerà lungo il suo percorso. Anche gli elettroni Auger interagiranno con il gas ed anche loro formeranno coppie elettrone-ione. Se i fotoni di fluorescenza non possono uscire dal contatore, allora il numero totale di coppie elettrone-ione

sarà in media proporzionale all'energia del fotone incidente.

Gli elettroni secondari, sotto l'influenza del forte campo elettrico, si sposteranno verso l'anodo nelle cui vicinanze vi sarà una ulteriore ionizzazione del gas, con la conseguente formazione di ulteriori elettroni secondari. Il numero di elettroni continua perciò ad aumentare fino a quando non sono raccolti sull'anodo. Il moto degli elettroni verso il filo centrale produce, per induzione, il segnale misurato sul catodo. In questo modo si riesce ad ottenere un guadagno tra  $10^3$  a  $10^5$ .

Per avere il massimo guadagno si utilizzano gas nobili, in modo da ridurre al massimo meccanismi di perdita di energia non dovuti a ionizzazione, quali eccitazione di stati rotazionali o vibrazionali molecolari. Un gas nobile *puro* è però un contatore instabile, dato che piccolissime tracce di impurità possono dominare il comportamento del gas. Inoltre un gas nobile è trasparente alla radiazione ultravioletta emessa dagli atomi eccitati del gas nobile che hanno energia sufficiente per espellere elettroni dal catodo ed iniziare una nuova sequenza di moltiplicazione.

Nel processo di moltiplicazione degli elettroni gli atomi di un gas nobile potrebbero essere eccitati in stati metastabili di lunga vita media, i quali si dis-eccitano con collisioni con le pareti del contatore. Per assorbire questa radiazione ultravioletta e dis-eccitare gli stati metastabili viene aggiunto al gas nobile un gas poliatomico, come metano, propano, alcol. Questo gas viene chiamato *quenching gas* (*smorzatore*). L'introduzione del quenching gas non introduce cascate di elettroni, dato che il libero cammino medio per questi eventi è piccolo.

L'efficienza di rivelazione di un contatore è la probabilità che un fotone non venga assorbito nella finestra e sia così assorbito nel gas. Dato che la sezione d'urto per effetto fotoelettrico, nella banda al di sotto del 20 keV, è proporzionale a  $Z^4 E^{-8/3}$ , è importante avere **una finestra sottile di basso  $Z$  ed un gas spesso di alto  $Z$** . Per energie nella banda 1–10 keV viene utilizzato il Berillio come elemento costituente la finestra. Per energie più basse bisogna usare altri materiali, per poter rendere le finestre più sottili, come formvar, polipropilene. Il problema è però che questi film sottili

non sono in grado di trattenere il gas, quindi in questi casi è necessaria una riserva di gas.

L'efficienza di un contatore proporzionale nella rivelazione di un fotone X di energia  $E$  è

$$\varepsilon(E) = \exp\left(-\frac{t_w}{\lambda_w}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{t_g}{\lambda_g}\right)\right] \quad (6.3)$$

dove  $t_w$  e  $t_g$  sono lo spessore della finestra e del gas, e  $\lambda_w$  e  $\lambda_g$  sono il libero cammino medio di assorbimento nella finestra e nel gas all'energia  $E$ .

La carica che viene raccolta all'anodo è proporzionale al numero iniziale di elettroni secondari ed al guadagno, e può essere usata per misurare l'energia del fotone incidente. A causa però della possibile fuga della radiazione di fluorescenza può esserci una diminuzione della carica.

### 6.2.2 Contatori proporzionali a scintillazione

In questo tipo di rivelatori la rivelazione avviene misurando la radiazione ultravioletta prodotta dalla nube di elettroni nel suo spostamento verso l'a-

nodo. In questo caso **non** viene utilizzato un quenching gas ma solamente un gas nobile. I fotoni UV vengono rivelati da fotomoltiplicatori. La quantità di luce non è solo proporzionale all'energia del fotone incidente, ma anche alla profondità che il fotone X è riuscito a raggiungere prima di essere foto-assorbito. Questo spessore viene determinato misurando la durata della luce di scintillazione e prende il nome di *burstlength*.

I contatori proporzionali a bordo di BeppoSAX erano di questo tipo: tre avevano una finestra di Berillio dello spessore di  $50\mu\text{m}$  (MECS) ed un intervallo operativo tra 2 e 10 keV. Il quarto rivelatore, LECS, aveva una finestra sottile la cui composizione è mostrata in Figura 6.5 e che permetteva l'allargamento dell'intervallo operativo a 0.1 keV. Tutti e quattro i rivelatori usavano lo Xenon come gas di rivelazione.

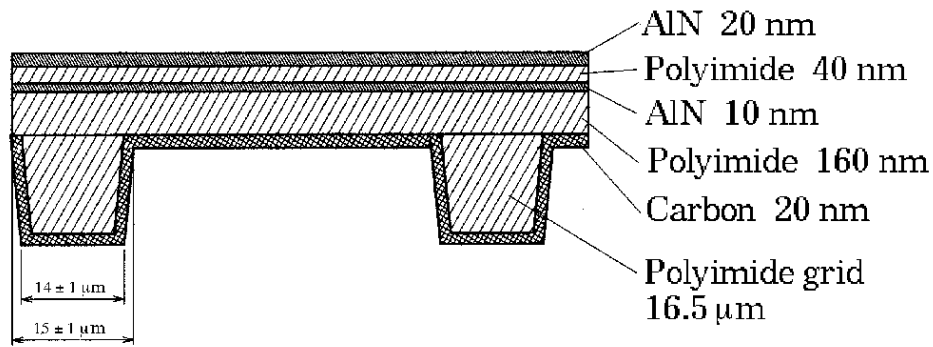


Figura 6.5: Sezione della finestra di ingresso del rivelatore LECS a bordo del satellite BeppoSAX.

### 6.2.3 Tecniche di reiezione del fondo

Esiste un numero sostanziale di eventi di fondo non dovuti a raggi X che limitano la sensibilità delle osservazioni di sorgenti cosmiche. La maggior parte di questo fondo è dovuto a raggi cosmici che incidono la parte alta della nostra atmosfera ad un tasso di 0.2–0.5 particelle per  $\text{cm}^2$  per secondo, a seconda della latitudine geomagnetica. Ogni raggio cosmico che penetra attraverso il contatore X può essere eliminato con una tecnica di anti-coincidenza. Purtroppo però questo non elimina il fondo dovuto a raggi  $\gamma$  prodotti dai raggi cosmici sia nell'atmosfera che nel veicolo che trasporta l'esperimento. L'efficienza di conversione di questi fotoni  $\gamma$  nel gas

del contatore è molto piccola, dato che la loro energia è tale che lo scattering Compton è l'effetto dominante. Nel caso di un contatore riempito di Argon ( $\sigma_C = 0.05 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$  ad 1 MeV) e di spessore  $t_g = 6 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-2}$  la probabilità di conversione è di solo  $3 \cdot 10^{-4}$ . Però verranno prodotti un gran numero di elettroni nelle pareti e nella struttura di supporto del contatore, e questi elettroni avranno una energia tale da essere rivelati.

Un'altra fonte importante di radiazione di fondo è la presenza di particelle di bassa energia, principalmente elettroni, che provengono dal vento solare e sono intrappolati nel campo magnetico terrestre (le cosiddette fasce di radiazione). Vi sono inoltre zone particolari in cui particelle vengono intrappolate: le zone aurorali ai poli magnetici e l'anomalia sud atlantica (SAA) al largo delle coste orientali del sudamerica.



Una tecnica, a parte l'uso di anti-coincidenze, che è molto efficiente nel reiettare eventi di fondo è la *discriminazione di forma*, il cui principio di funzionamento è il seguente: un fotone X convertito nel gas è essenzialmente un evento puntiforme; gli elettroni secondari prodotti in quel punto si muovono verso l'anodo senza una dispersione significativa e quindi il tempo di salita del segnale sarà molto breve, dell'ordine di 10–100 ns a seconda del gas utilizzato. Un elettrone che invece proviene da raggi cosmici o fotoni  $\gamma$  secondari lascerà nel contatore una traccia lunga. Gli elettroni secondari si muoveranno verso l'anodo da tutti i punti lungo la traccia così che il tempo di transito dalla traccia all'anodo non è unico ed il corrispondente tempo di salita del segnale sarà molto più lungo di quello di un evento X reale. Questa differenza in tempi di salita viene determinata dall'elettronica.

#### **6.2.4 Rivelatori a scintillazione**

Cristalli scintillatori sono dei sali alcalini che hanno la proprietà di emettere luce visibile quando sono colpiti da fotoni X. I processi di assorbimento fotoelettrico e scattering Compton convertono l'energia trasportata dal fo-

tone X in energia cinetica di uno o piú elettroni, come nel caso dei contatori proporzionali. Nel cristallo però ogni elettrone di alta energia eccita molti elettroni dalla banda di valenza alla banda di conduzione. Per fare in modo che la transizione avvenga nella banda della luce visibile si introducono delle impurità (dette anche attivatori) che catturano alcuni di questi elettroni.

Affinché un cristallo sia di qualche uso pratico è necessario che sia trasparente alla sua stessa radiazione. Il cristallo che ha avuta la massima applicazione in campo astronomico è lo Ioduro di Sodio in cui l'attivatore sono tracce di Tallio, NaI(Tl), in cui circa 8% della energia dell'elettrone originale è convertita in fotoni con lunghezze d'onda tra 4200 e 4350 Å.

Una faccia del cristallo deve essere accoppiata otticamente ad un tubo fotomoltiplicatore o direttamente, o attraverso una guida di luce. Il resto della superficie viene ricoperta con una vernice riflettente per ottimizzare la collezione di luce al fototubo. Il guadagno nella parte di moltiplicazione elettronica varia da  $10^5$  a  $10^8$ . L'importanza dei rivelatori a scintillazione

è la loro maggiore efficienza rispetto a quella dei contatori proporzionali al di sopra di 10 keV. Ad esempio, 50 mm di NaI hanno una efficienza praticamente unitaria fino a 100 keV, mentre per avere la stessa efficienza in un contatore proporzionale sarebbero necessari 4 m di Xenon o 200 m di Argon (ad 1 atm). Questo è dovuto alla maggiore numero e densità del cristallo rispetto al gas.

Dato che l'efficienza di conversione dell'energia cinetica in luce,  $\sim 1$  fotone per 400–500 eV, è molto minore dei  $\sim 30$  eV per ione dei contatori proporzionali, la risoluzione energetica (definita come  $R(E) = \Delta E/E$ , dove  $\Delta E$  è la Full Width at Half Maximum (FWHM) di una riga rivelata all'energia  $E$ ) degli scintillatori è minore di quella dei proporzionali: per il PDS, lo strumento di alta energia (15–100 keV) a bordo del satellite BeppoSAX, essa è  $R(E) = 0.15 \sqrt{60/E}$  dove  $E$  è espressa in keV.

Il limite pratico di utilizzo per ogni rivelatore è definito dall'energia a cui la sezione d'urto per effetto fotoelettrico diventa minore di quello per scattering Compton (a causa della complessità dello studio delle perdite di energia parziali. Nel caso dei cristalli di NaI e CsI questo limite è  $\sim 300$  keV (Si veda Tabella ). Il limite di utilizzo a bassa energia è invece determinato dal rumore nel fotomoltiplicatore, che diventa importante nell'intervallo 5–10 keV.

La più importante sorgente di fondo per gli scintillatori proviene dai raggi  $\gamma$  prodotti localmente o dall'atmosfera. Circondare il rivelatore con uno schermo **passivo** di materiale pesante, come ad esempio Piombo, ha il risultato opposto di **umentare** il fondo, a causa dell'interazione dei raggi  $\gamma$  con lo schermo. La soluzione è quella di circondare il rivelatore con schermi **attivi**. A questo scopo viene utilizzato CsI che è più denso del NaI e può essere lavorato più facilmente.

Infine, una sorgente di fondo sono i protoni che si trovano nella SAA. L'interazione di questi protoni con il materiale del rivelatore provoca l'espulsione

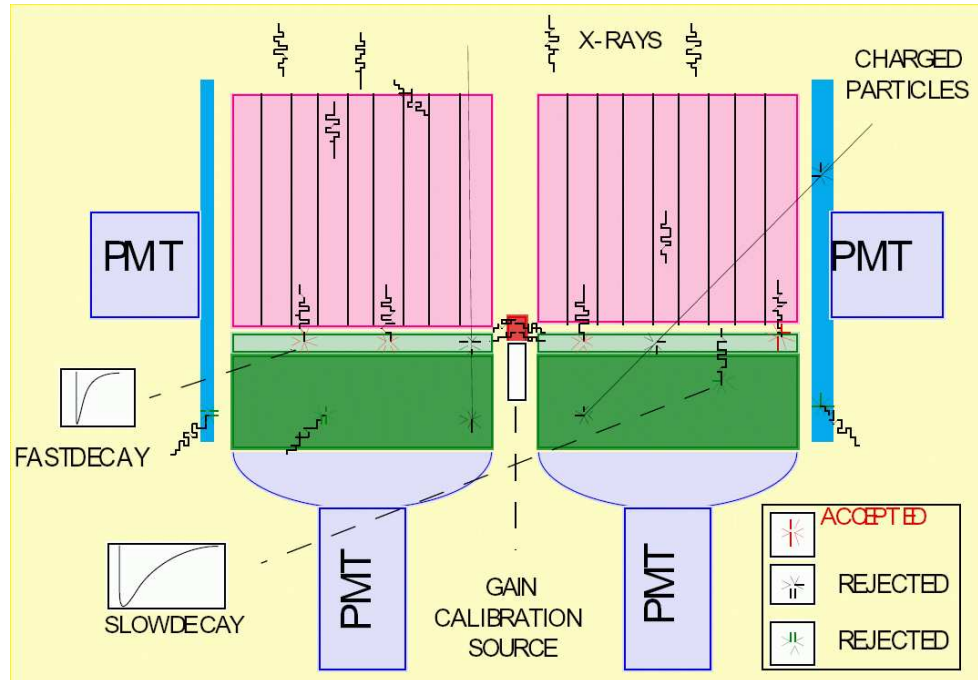


Figura 6.6: Funzionamento dell'anticoincidenza del rivelatore PDS a bordo di BeppoSAX. Il rivelatore è formato da un phoswich di due cristalli: 3 mm di NaI(Tl) che funge da rivelatore vero e proprio, e 50 mm di CsI(Na) che funge da schermo attivo.

di neutroni di energia  $\sim$  MeV, che vengono catturati dai cristalli producendo nuclei radioattivi, quali  $I^{128}$  e  $Cs^{134}$ , i cui elettroni di decadimento vengono interpretati come prodotti da assorbimento fotoelettrico.

In Figura 6.6 viene mostrato la geometria di una delle quattro unità PHOSWICH (acronimo di PHOSphor sandWICH) dell'esperimento di alta energia PDS a bordo di BeppoSAX. Gli eventi rivelati in ogni phoswich possono essere suddivisi in tre classi: (i) eventi che depositano energia solamente

nel cristallo NaI (eventi “buoni”); (ii) eventi che depositano energia solamente nel cristallo CsI; (iii) eventi che depositano energia sia in NaI che in CsI. Gli eventi nella prima classe vengono accettati, mentre quelli delle altre due sono rigettati. La selezione viene compiuta usando i diversi tempi di decadimento delle scintillazioni prodotte nei due materiali ( $0.25 \mu\text{s}$  in NaI e  $0.6 \mu\text{s}$  in CsI).

### 6.2.5 Rivelatori a semiconduttore

Rivelatori a stato solido di Silicio o Germanio possono dare risoluzione energetiche molto migliori di quelle di contatori proporzionali o a scintillazione. Il loro principio di funzionamento è il seguente (vedi Figura 6.7): il cristallo viene drogato per controllare la densità dei portatori di carica. I contatti vengono effettuati con due strati sottili di portatori di carica negativa (tipo- $n$ ) e di buche (tipo- $p$ ). La regione possiede densità di carica positiva e negativa uguale e quindi riesce a sostenere il campo elettrico attraverso di essa. Interazioni nel cristallo, dovute al fotone X incidente, producono elettroni che possono essere raccolti come impulsi di carica che, a

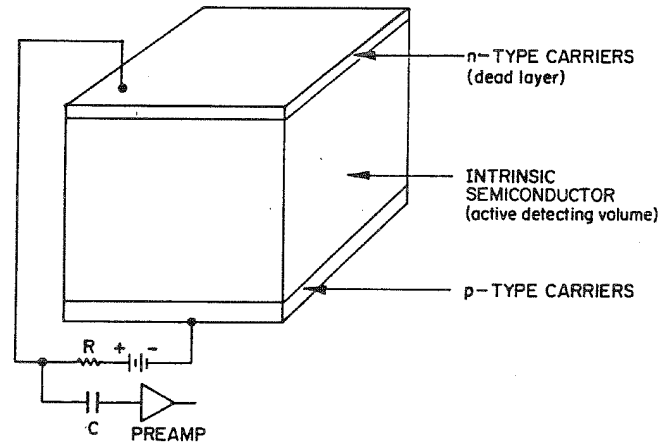


Figura 6.7: Diagramma di funzionamento di un rivelatore a semiconduttore.

differenza dei contatori proporzionali o dei fototubi, **non sono amplificati**.

La risoluzione energetica di questo tipo di rivelatore è la migliore attualmente possibile (2.3 keV a 1.3 MeV per lo strumento SPI a bordo del satellite INTEGRAL). Lo svantaggio da un punto di vista sperimentale è che questo tipo di rivelatore deve essere raffreddato per evitare l'eccitazione termica degli elettroni nella banda di conduzione.

### 6.2.6 Microcalorimetri

In un microcalorimetro, la determinazione dell'energia del fotone X incidente avviene misurando la variazione di temperatura associata al suo

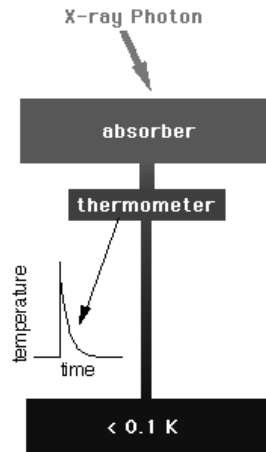


Figura 6.8: Principio operativo di un microcalorimetro.

assorbimento.

Schematicamente il suo funzionamento è illustrato nella Figura 6.8: esso consiste in un assorbitore (HgTe o Si), di capacità termica  $C$  che viene collegato ad una temperatura di riferimento (*heat sink*), dell'ordine di qualche centesimo di grado K, attraverso un collegamento termico di conduttanza  $G$ . L'assorbimento di un fotone di energia  $E$  nell'assorbitore crea una variazione di temperatura  $\Delta T$  data da

$$\Delta T = \frac{E}{C} \quad (6.4)$$

misurata con un termistore<sup>5</sup> impiantato nell'assorbitore.

<sup>5</sup>Un termistore è un dispositivo che cambia significativamente la sua resistenza con piccole variazioni di temperatura.



L'assorbitore ritornerà alla temperatura di riferimento del *heat sink* con un decadimento esponenziale con costante di tempo data da

$$\tau = \frac{C}{G} \quad (6.5)$$

Il limite sulla risoluzione energetica del rivelatore è determinato dal trasporto caotico di fononi tra il rivelatore ed il bagno termico nella giunzione. Si può fare vedere che il  $\Delta E$  limite che si può ottenere con un microcalorimetro è

$$\Delta E = 2.35 \eta \sqrt{C kT^2} \quad (6.6)$$

e la variabile  $\eta$  dipende dal termometro utilizzato. Nel caso del rivelatore XRS che volerà a bordo del satellite giapponese ASTRO-E2 si ha  $\eta = 2$ .

### 6.3 Collimatori meccanici

La funzione di un collimatore in astronomia  $X$  è quella di limitare l'angolo solido di cielo visto dal rivelatore. Il piú semplice tipo di collimatore consiste semplicemente da una scatola o un tubo aperto da entrambe le parti e posizionato sopra il rivelatore (si veda Figura 6.9). L'angolo solido di cielo che sarà osservabile sarà circa  $a \times b/h^2$ ; fotoni che provengono da regioni al di fuori del campo di vista colpiranno le pareti del collimatore e verranno assorbiti. Il collimatore è caratterizzato da un asse centrale e, nel caso mostrato in Figura 6.9 la radiazione verrà trasmessa all'interno degli angoli  $\pm a/h$  e  $\pm b/h$  attorno all'asse centrale. La funzione di trasmissione  $f(\theta - \theta_0)$  (e equivalentemente la  $f(\phi - \phi_0)$ ) del collimatore avrà una forma triangolare

$$f(\theta - \theta_0) = \begin{cases} 1 - \frac{|\theta - \theta_0|}{\theta_{1/2}} & \text{per } |\theta - \theta_0| < \theta_{1/2} \\ 0 & \text{per } |\theta - \theta_0| > \theta_{1/2} \end{cases} \quad (6.7)$$

dove  $\theta_{1/2}$  (e  $\phi_{1/2}$ ) rappresenta l'angolo per cui la risposta del collimatore diminuisce del 50%. Nel nostro caso saranno  $a/h$  e  $b/h$  nelle due dire-

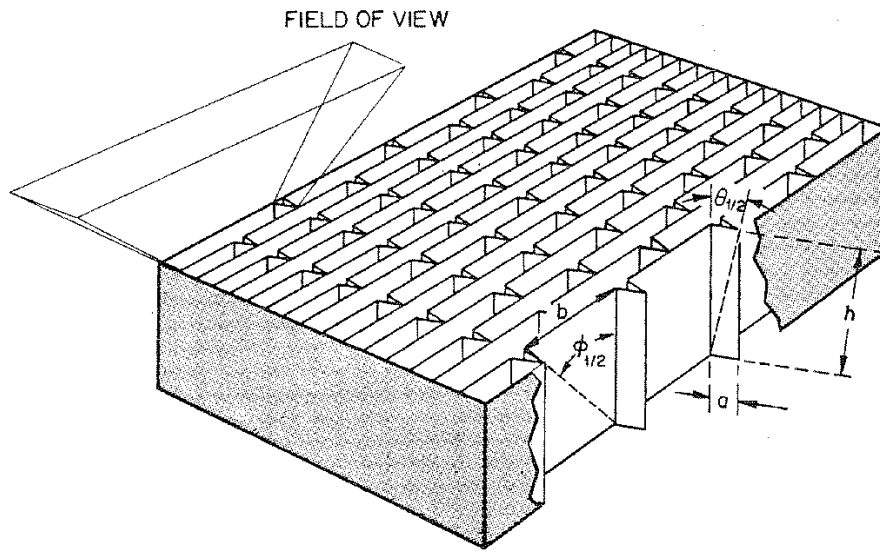


Figura 6.9: Un semplice collimatore formato da tubi rettangolari di altezza  $h$  e sezione  $a \times b$ . I raggi X che colpiscono le pareti dei tubi non possono raggiungere il rivelatore. La risposta all'interno il campo di vista avrà una forma triangolare in ognuna delle due direzioni ortogonali. Gli angoli per cui si ha solamente metà intensità trasmessa sono determinati dalla geometria:  $\tan \theta_{1/2} = a/h$  e  $\tan \phi_{1/2} = b/h$ .

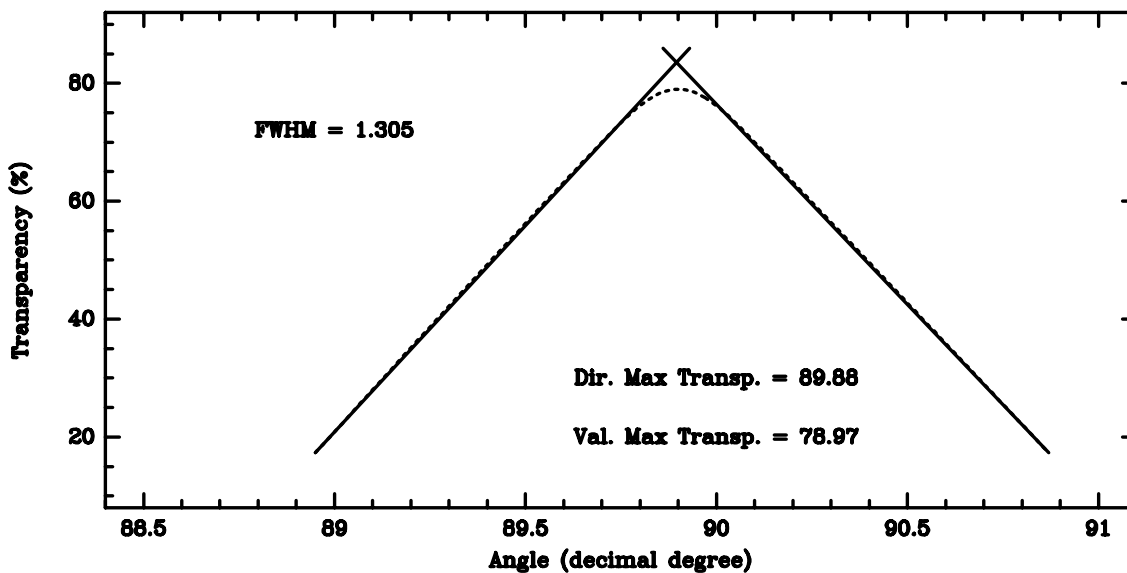


Figura 6.10: Funzione di trasmissione dei collimatori dell'esperimento di alta energia (15–200 keV) PDS a bordo del satellite BeppoSAX. Questi collimatori definiscono un campo di vista esagonale di  $1.3^\circ$  (FWHM).

zioni. In Figura 6.10 mostriamo la funzione di trasmissione dei collimatori dell'esperimento PDS a bordo di BeppoSAX.

I collimatori meccanici sono stati costruiti con varie tecniche, ma i requisiti importanti che devono essere soddisfatti sono (i) minimo spessore possibile delle pareti in modo da ottenere la massima apertura possibile; (ii) adeguato spessore delle pareti in modo da poter fermare fotoni X della massima energia possibile. Dato che questi due requisiti sono in contraddizione tra loro è necessario trovare il giusto compromesso.

Non entreremo nei dettagli costruttivi, ma vogliamo evidenziare come la scelta del materiale che costituisce un collimatore è importante. Infatti bisogna evitare che i fotoni X interagiscano con questo materiale e si venga a produrre radiazione che può essere rivelata dallo strumento. Nel caso dei collimatori dell'esperimento PDS (si veda Figura 6.11) essi erano costituiti da tubi in Tantalio, a sezione esagonale, della lunghezza di 20 cm e dello spessore di  $50 \mu\text{m}$ . La parte interna dei tubi, nei primi 4 cm a partire dalla base, era ricoperta da un bi-strato di Stagno ( $100 \mu\text{m}$ ) e Rame

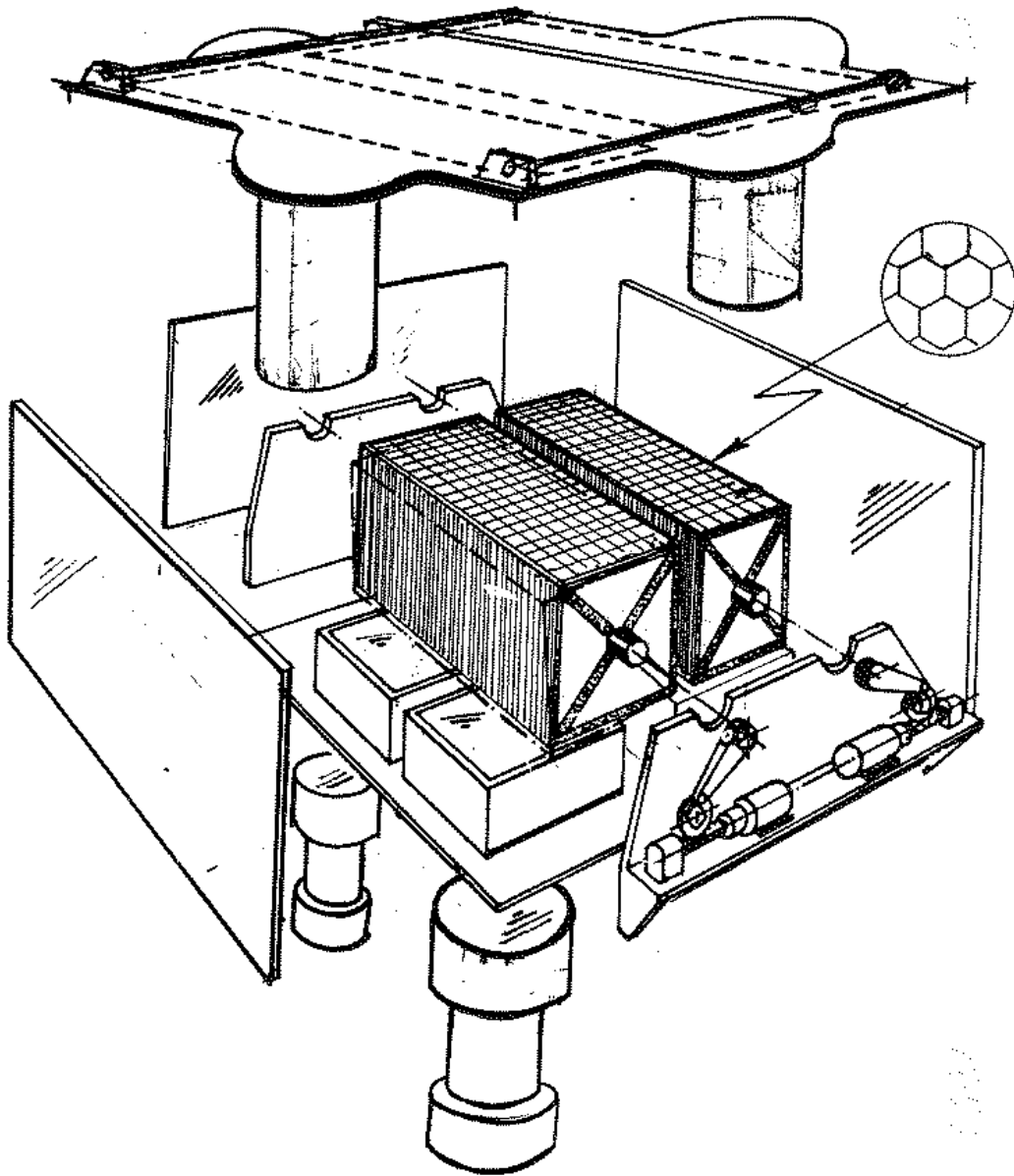


Figura 6.11: Visione esplosa dell'esperimento di alta (15–200 keV) energia PDS a bordo di BeppoSAX. Lo schermo frontale è formato da materiale scintillatore organico (BC-434) dello spessore di 1 mm ed ha lo scopo di intercettare particelle cariche. I fotoni sono rivelati da due fotomoltiplicatori indipendenti. Gli schermi laterali, quattro lastre di CsI(Na) delle dimensioni di  $275 \times 402$  mm e dello spessore di 1 cm, sono viste ognuna da quattro fotomoltiplicatori (nel loro insieme formano il Gamma Ray Burst Monitor GRBM). I due banchi di collimatori meccanici basculanti limitano il campo di vista di quattro unità phoswich. Sono formati da tubi di forma esagonale (per ottimizzare la tassellatura del piano) di Tantalio la cui base è stata ricoperta di un bi-strato di  $100 \mu\text{m}$  di Stagno e  $50 \mu\text{m}$  di Rame per assorbire fotoni di fluorescenza generati dall'interazione con i fotoni X incidenti.

(50  $\mu\text{m}$ ). Lo strato di Stagno aveva lo scopo di attenuare l'emissione di fluorescenza dalla shell  $K$  del Tantalio ( $K_{\alpha} = 57.07 \text{ keV}$ ;  $K_{\beta} = 65.56 \text{ keV}$ ), mentre lo strato di Rame doveva attenuare l'emissione di fluorescenza dallo Stagno ( $K_{\alpha} = 25.1 \text{ keV}$ ;  $K_{\beta} = 28.5 \text{ keV}$ ). Questa configurazione viene detta *schermatura graduale (grading shielding)*, ed ha permesso la perdita di solo il 20% dell'area efficace del rivelatore.

## 6.4 Tecniche di focalizzazione di raggi X e $\gamma$

Introdurremo ora due tecniche di focalizzazione di raggi X: specchi ad incidenza radente e diffrazione cristallina (Bragg e Laue). L'interazione dei raggi X con la materia avviene essenzialmente attraverso processi incoerenti, con conseguente perdita di informazione sulla radiazione incidente. Quindi la strumentazione utilizzata in astronomia X/ $\gamma$  ha utilizzato processi di interazioni inelastici attraverso maschere codificate o telescopi Compton. Il problema con questi rivelatori risiede nell'elevato flusso del fondo, dato che l'area in cui la radiazione viene raccolta è della stessa dimensione dell'area del rivelatore. Dato che la sensibilità di uno strumento è direttamente proporzionale all'area di raccolta della radiazione, fare strumenti di elevata sensibilità diventa subito impraticabile, visti i problemi di dimensione e, quindi, di massa. E' tuttavia possibile utilizzare l'informazione sulla fase della radiazione incidente se questi subiscono diffrazione di Bragg o di Laue su materiali cristallini di alto  $Z$ . In questo caso si avrà una piccola area di raccolta della radiazione, con una significativa diminuzione

del fondo.

#### 6.4.1 Ottiche di focalizzazione di raggi X

L'uso di specchi per raggi X che focalizzano un fascio incidente offre due vantaggi significativi rispetto all'uso di collimatori meccanici:

- ① Gli specchi permettono la costruzione di strumenti con risoluzione angolare dell'ordine del second d'arco, con conseguente localizzazione di sorgenti puntiformi con precisione paragonabile;
- ② Dato che l'area di rivelazione è una piccola frazione dell'area di raccolta, il rapporto segnale/rumore è significativamente migliore di quello di uno strumento a collimazione meccanica, in cui il rivelatore è più grande dell'area di raccolta.

Questi vantaggi permettono un sensibile miglioramento della risoluzione e della sensibilità dello strumento.



Vediamo ora di ricavarci le condizioni affinché un fotone X venga riflesso. Innanzi tutto i fotoni X vengono riflessi da delle superfici per lo stesso motivo per cui la luce visibile viene riflessa.

Nel passaggio attraverso la materia, che possiamo rappresentare come un gran numero di punti, lo scattering dei fotoni X da parte di questi punti si somma in maniera coerente lungo direzioni specifiche. Dato che i fotoni X hanno energie molto maggiori dell'energia di legame degli elettroni atomici, l'indice di rifrazione è leggermente minore dell'unità (a parte vicino alle edge di assorbimento). Allora, applicando la legge di Snell, si ha riflessione solamente fino ad un certo angolo critico di incidenza  $\theta_c$  dato da

$$\cos \theta_c = n \quad (6.8)$$

dove  $\theta_c$  è definito come il complemento dell'angolo fatto con la normale.

Se definiamo  $\delta$  tale per cui  $n = 1 - \delta$ , allora

$$\theta_c \simeq \sqrt{2\delta} \quad (6.9)$$

Per energie diverse da quelle degli edge di assorbimento abbiamo che

$$\delta = 2\pi r_0 \lambda^2 N_e \quad (6.10)$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda della radiazione incidente,  $r_0 = e^2/mc^2$  è il raggio classico dell'elettrone e  $N_e$  è la densità elettronica nel materiale. Dalle (6.9) e (6.10) vediamo che l'angolo critico è direttamente proporzionale alla lunghezza d'onda della radiazione incidente, o inversamente proporzionale alla sua energia. Quindi per riflettere fotoni di alta energia servono angoli di incidenza radente sempre più piccoli. Inoltre, l'angolo critico dipende dalla densità elettronica, che è approssimativamente il numero atomico del materiale che compone la superficie: quindi per avere migliore riflessione saranno preferibili materiali ad alto  $Z$ .

In Figura 6.12 mostriamo le curve (teoriche) di riflessione in funzione dell'energia del fotone incidente per vari materiali. Gli specchi reali sono meno efficienti a causa del livello di politura delle superfici. Come si vede, le curve presentano delle discontinuità vicino alle energie degli edge di assorbimento. Inoltre possiamo vedere come la transizione all'angolo critico

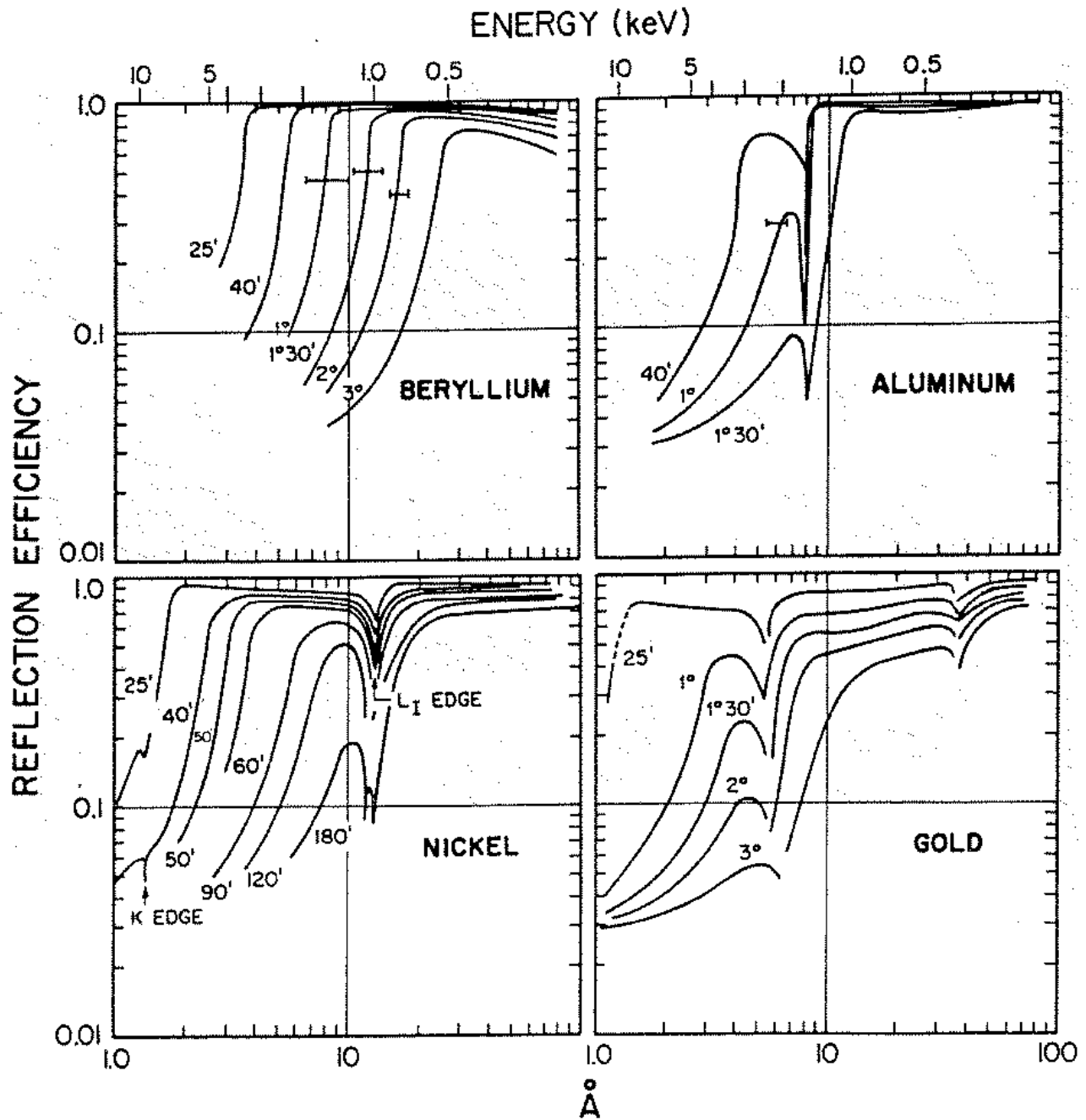


Figura 6.12: Efficienze di riflessione teoriche superficiali in funzione dell'energia (scala superiore) o della lunghezza d'onda (scala inferiore) per diversi angoli di incidenza radente e per diversi materiali: Be ( $Z = 4$ ), Al ( $Z = 13$ ), Ni ( $Z = 28$ ) e Au ( $Z = 79$ ). L'angolo critico per ogni energia può essere definito come quell'angolo a cui la riflettività diminuisce di un certo valore, per esempio 10%. La complessità delle curve è dovuta ad effetti negli edge di assorbimento.

non sia netta. Ricapitolando abbiamo che

- ❑ La riflettività è molto alta fino all'angolo critico  $\theta_c$ ;
- ❑ L'angolo critico  $\theta_c$  diminuisce all'aumentare dell'energia;
- ❑ E' preferibile usare materiali ad alto  $Z$  per le superfici;
- ❑ A causa della presenza di edge di assorbimento, la riflettività è una funzione complessa dell'energia del fotone incidente.

I primi tre punti hanno importanti conseguenze nella costruzione di specchi per raggi X, mentre l'ultimo punto è importante per l'interpretazione di dati spettrali ottenuti dagli strumenti sul piano focale degli specchi.

Per quello che riguarda la forma degli specchi, l'elemento base per focalizzare radiazione parallela è una parabola, come mostrato in Figura 6.13.

Se indichiamo con  $\alpha$  l'angolo medio tra la sezione della parabola e la direzione del fascio incidente, e se questo angolo varia poco lungo la sezione, allora  $\alpha$  definisce l'energia massima che può essere riflessa. La lunghezza focale è data da  $F = R/2\alpha$ , dove  $R$  è la distanza dello specchio

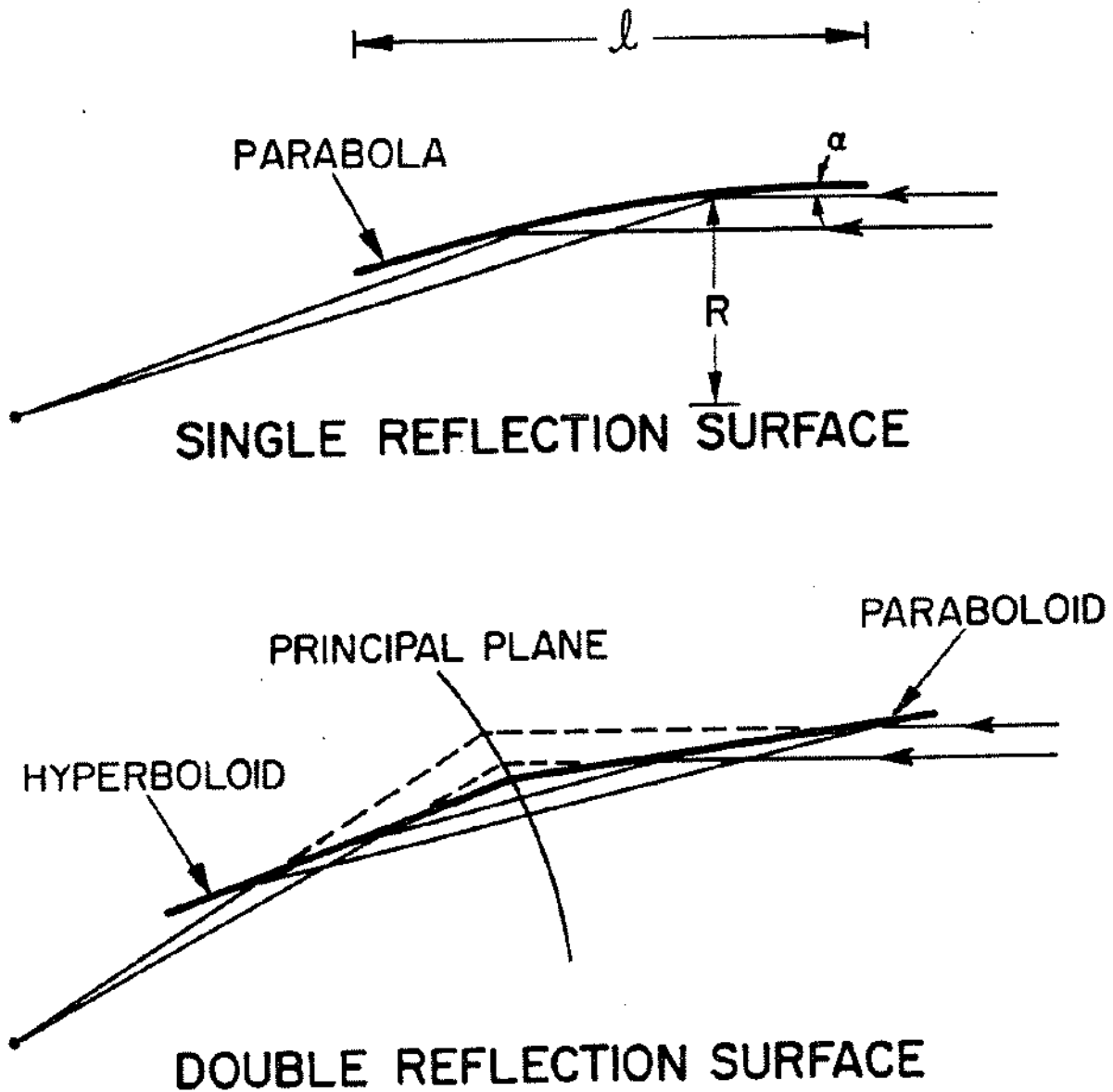


Figura 6.13: Sezioni di superfici riflettenti per specchi di raggi X. Nel caso di sezione parabolica il fotone viene riflesso una sola volta prima di essere focalizzato, mentre nella figura inferiore viene mostrato un profilo formato da un segmento di parabola ed uno di iperbole. In questo caso avvengono due riflessioni.

dall'asse centrale della parabola. Nel caso di doppia riflessione, ottenuta con due superfici, una parabolica e l'altra iperbolica, la lunghezza focale sarà  $F = R/4\alpha$ .

Per quello che riguarda la risoluzione angolare  $\sigma$  per questo tipo di specchi, da studi effettuati si ha che

$$\sigma = \frac{(\zeta + 1)}{10} \frac{\tan^2 \theta}{\tan \alpha} \left( \frac{L}{F} \right) + 4 \tan \theta \tan^2 \alpha \quad \text{radianti} \quad (6.11)$$

dove  $\zeta$  è il rapporto tra gli angoli di incidenza nel paraboloido e nell'iperboloido,  $L$  è la lunghezza dello specchio e  $\theta$  è l'angolo di incidenza rispetto all'asse ottico. In un caso tipico  $\sigma$  aumenta monotonamente da 0 a  $10''$  per  $\theta$  che varia da 0 a  $30''$ .

In Figura 6.14 viene mostrato il principio costruttivo degli specchi per raggi X (si ringrazia il Prof. Citterio, INAF–Osservatorio Astronomico di Brera), mentre in Figura 6.15 sono mostrati gli specchi utilizzati nel satellite per astronomia X XMM-Newton.

# PROCESSO DI ELETTROFORMATURA

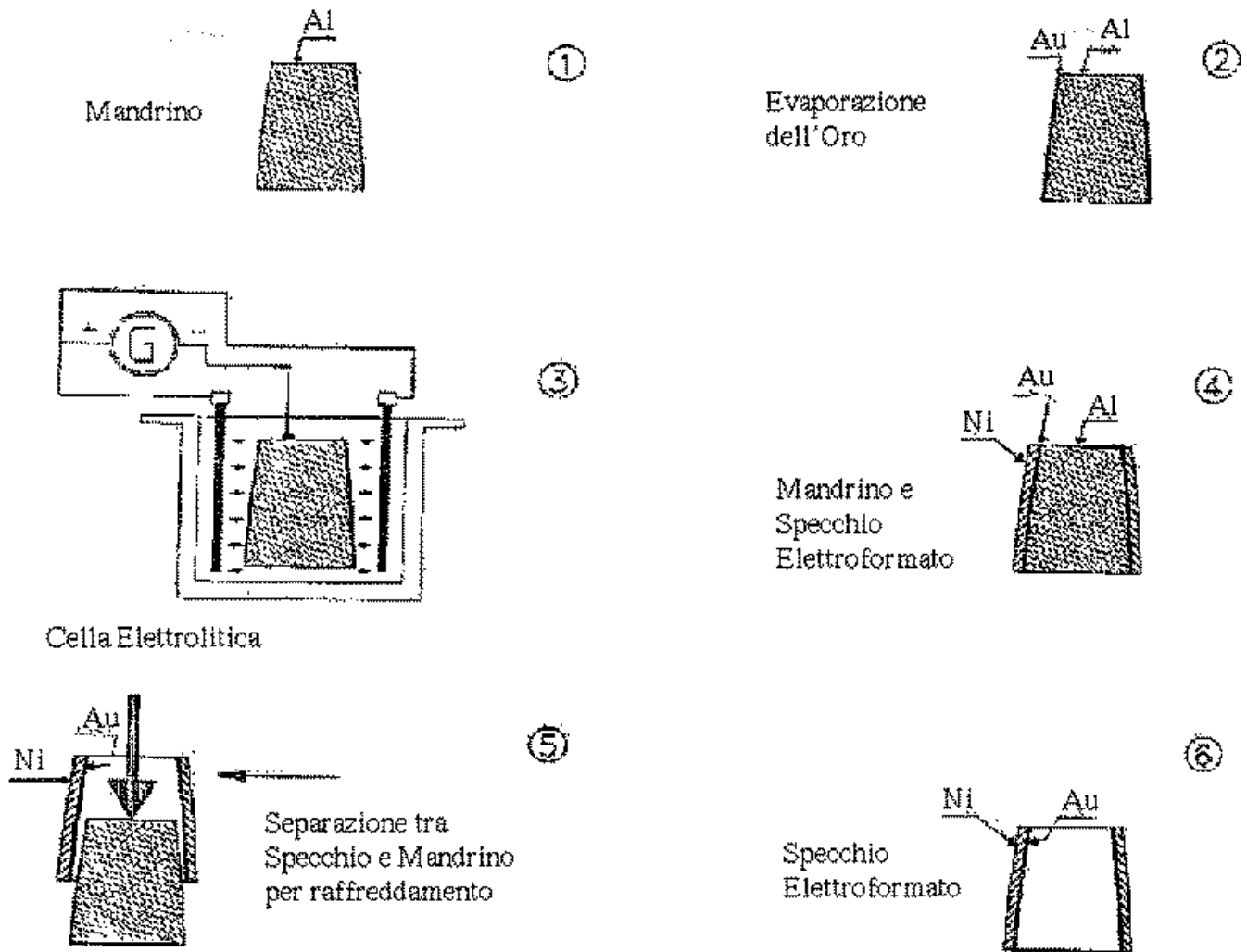


Figura 6.14: Processo costruttivo di uno specchio per raggi X per elettroformatura. ① Un mandrino di Alluminio rivestito di uno strato di Nichel viene sagomato con il profilo parabolico-iperbolico e sottoposto a politura per raggiungere una microrugosità minore di  $0.05 \mu\text{m}$ . ② Il mandrino viene posto in un crogiolo con dell'Oro. Per bombardamento elettronico l'Oro viene fatto evaporare. L'Oro si deposita sul mandrino formando uno strato di circa  $0.1 \mu\text{m}$ . ③ Lo strato di Oro viene rivestito di un ulteriore strato di Nichel ( $0.1\text{--}1.0 \text{ mm}$ ) per bagno elettrolitico. ④ La superficie riflettente dello specchio è formata dallo strato di Oro, mentre lo strato di Nichel funge da supporto meccanico. ⑤ La separazione tra lo specchio ed il mandrino avviene per raffreddamento: il coefficiente di espansione termica del Nichel è circa la metà di quello dell'Alluminio. Inoltre l'adesione tra l'Oro e l'Alluminio è molto piccola, facilitando la separazione. ⑥ Diversi specchi vengono innestati tra loro in modo da aumentare l'area di raccolta.

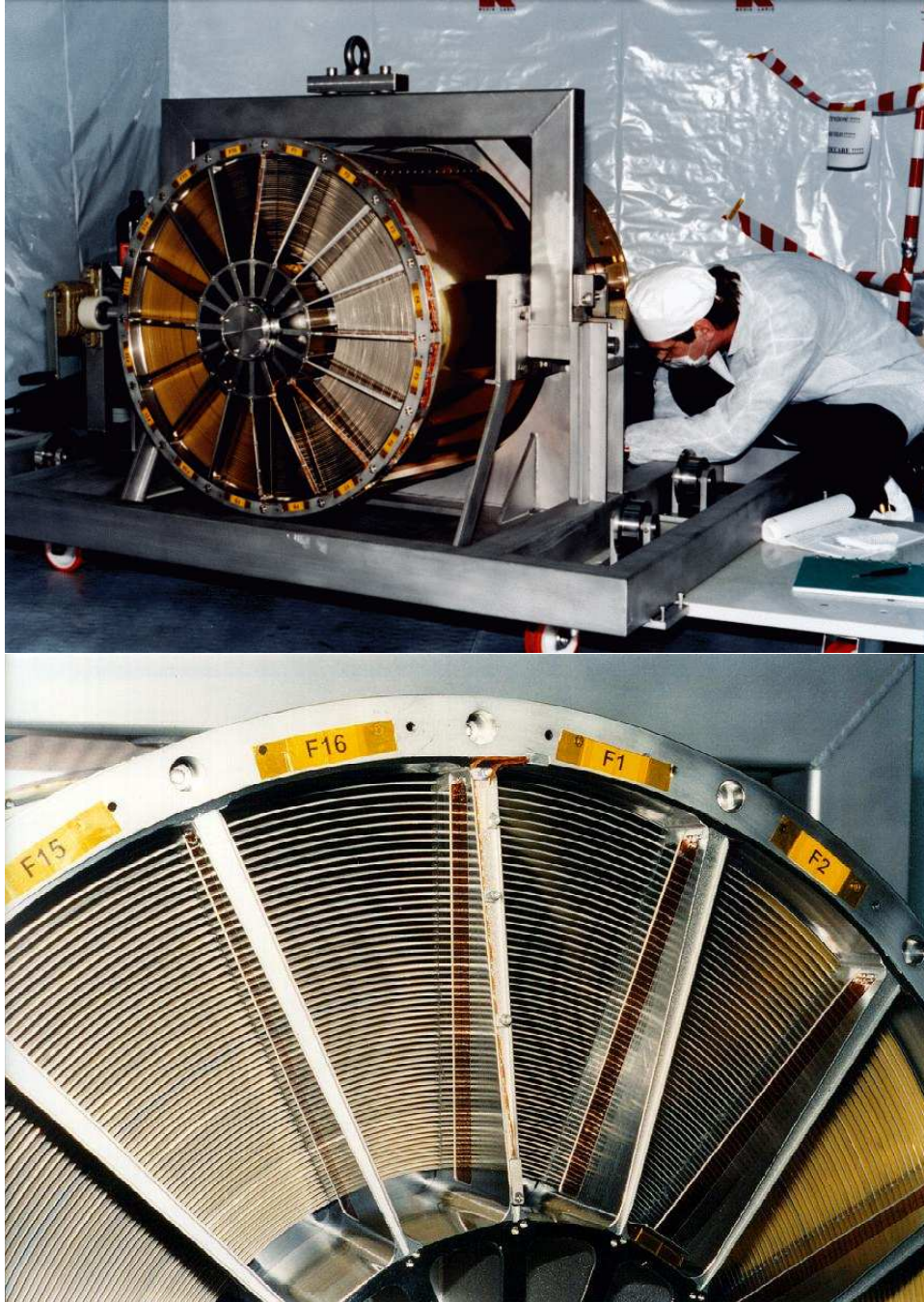


Figura 6.15: Immagini di uno dei tre specchi per raggi X a bordo di XMM-Newton. Ognuno è formato da 58 specchi ad incidenza radente di forma Wolter I, innestati in una configurazione coassiale e cofocale. La geometria delle ottiche deriva dalla necessità di ottenere la maggiore area effettiva possibile sul più ampio intervallo di energia, con particolare enfasi alla regione attorno a 7 keV. A causa di ciò, gli specchi utilizzano un angolo di incidenza molto piccolo,  $30'$ , per avere una riflettività sufficiente ad alta energia. La lunghezza focale dei telescopi è di 7.5 metri, ed il diametro dello specchio più esterno è di 70 cm, in modo da poter essere alloggiato nel vano di carico del lanciatore.



### 6.4.2 Diffrazione di Bragg e Laue

Come abbiamo detto, esiste la possibilità di utilizzare l'informazione sulla fase dei fotoni incidenti su cristalli ad alto  $Z$  se questi subiscono diffrazione di Bragg o di Laue. La differenza che esiste tra i due tipi di diffrazione è che nel caso di diffrazione di Bragg i fotoni diffratti lasciano il cristallo attraverso la stessa superficie da cui erano entrati (vengono cioè "riflessi"), mentre nel caso di diffrazione di Laue i fotoni diffratti vengono trasmessi attraverso il cristallo, ed escono da una superficie diversa da quella da cui erano entrati.

Nella Figura 6.16 viene mostrato il principio della diffrazione di Bragg: affinché due fotoni incidenti su due piani cristallini successivi escano in fase è necessario che la differenza di cammino sia tale da contenere un numero intero di lunghezze d'onda, cioè

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (6.12)$$

dove  $d$  è la distanza tra due piani cristallini successivi,  $\theta$  è l'angolo di

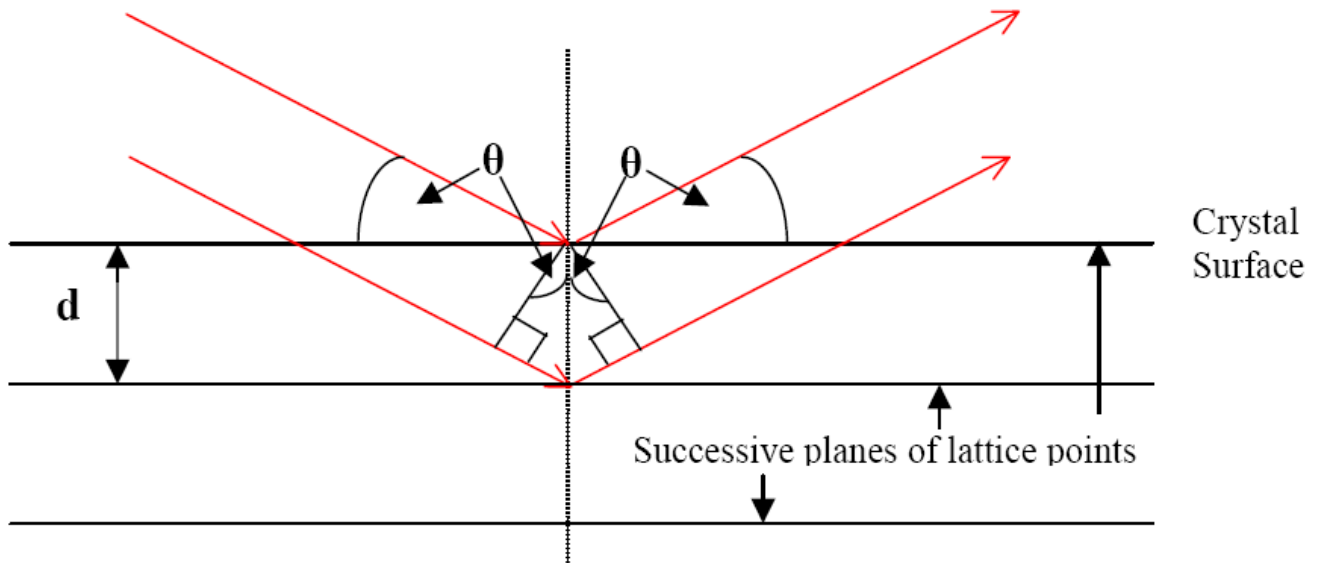


Figura 6.16: Geometria della diffrazione di Bragg: due raggi di alta energia vengono diffratti da due piani cristallini adiacenti alla superficie di un cristallo.

riflessione (noto anche come angolo di Bragg),  $n$  è un numero intero e  $\lambda$  la lunghezza d'onda della radiazione incidente. Eq. 6.12 è nota come legge di Bragg e si noti come questa dipenda da  $\lambda$  (e quindi dall'energia dei fotoni incidenti) e dalla distanza tra i piani cristallini (e quindi dal materiale). Nel caso in cui il fotone incidente attraversi il cristallo si parla, come abbiamo detto, di diffrazione di Laue. In questo caso il percorso effettuato da un fotone sarà come quello mostrato in Figura 6.17, in cui l'angolo  $\theta$  soddisfa la legge di Bragg (Eq. 6.12). Il fatto che un raggio possa emergere dal cri-

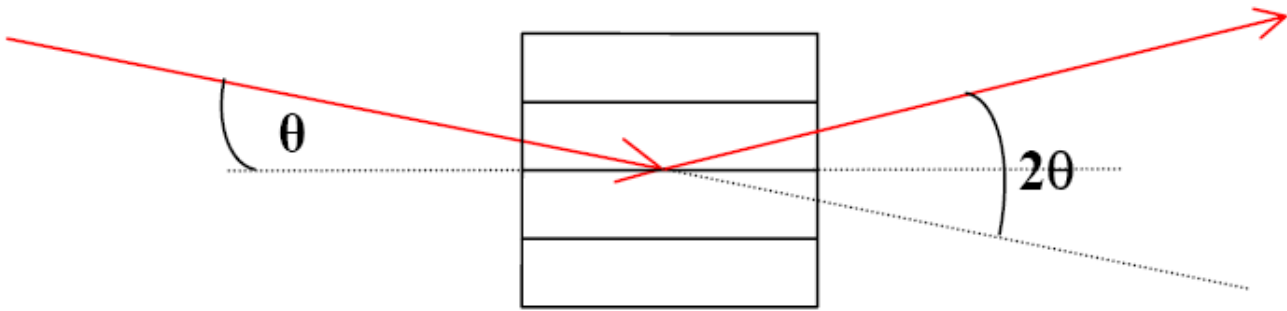
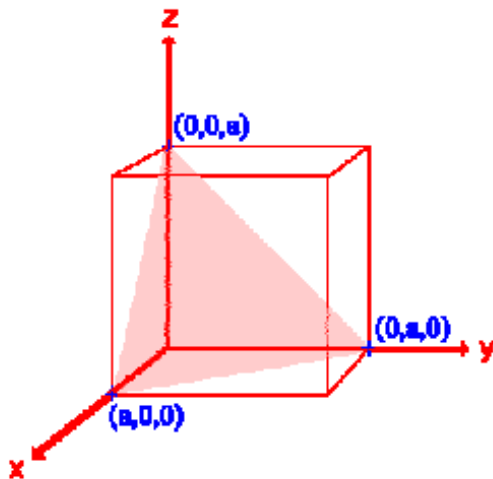


Figura 6.17: Geometria della diffrazione di Laue: un raggio di alta energia attraversa un cristallo e subisce diffrazione di Bragg sui piani cristallini, emergendo con un angolo pari a  $\theta$ .

stallo dipenderà dalla geometria del cristallo stesso, cioè dall'orientamento dei piani cristallini rispetto alla direzione del fotone incidente.



Utilizzando la legge di Bragg e gli indici di Miller  $h, k, l$  per descrivere l'orientamento dei piani cristallini, abbiamo che

$$\frac{2a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \sin \theta = n\lambda \quad (6.13)$$

Figura 6.18: Definizione degli indici di Miller per l'orientamento dei piani reticolari di un cristallo.

In figura è mostrato il piano (111).

dove  $a$  è la costante reticolare del

cristallo (si veda Figura 6.18).

Dall'Eq. 6.13 è possibile ricavare la direzione del fotone diffratto se è nota l'energia del fotone incidente e la natura del cristallo.

Un'altra importante proprietà è il rendimento (*throughput*) del processo di diffrazione di Laue, definito come il rapporto tra l'intensità del fotone diffratto  $P(\tau)$  che attraversa un cristallo di spessore  $\tau$  e l'intensità del fotone incidente  $P(0)$ . E' possibile dimostrare che

$$\frac{P(\tau)}{P(0)} \equiv \varepsilon = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sigma\tau}) e^{-\mu\tau} \quad (6.14)$$

dove  $\varepsilon$  è definita l'efficienza del cristallo,  $\sigma$  è il coefficiente di diffrazione,  $\mu$  in coefficiente di attenuazione dovuto ad uno spessore  $\tau$ . Utilizzando questa relazione è possibile ottimizzare lo spessore dei cristalli per avere la massima efficienza. In Figura 6.19 vengono mostrate delle curve di ottimizzazione relative al piano cristallino (440) del Germanio.

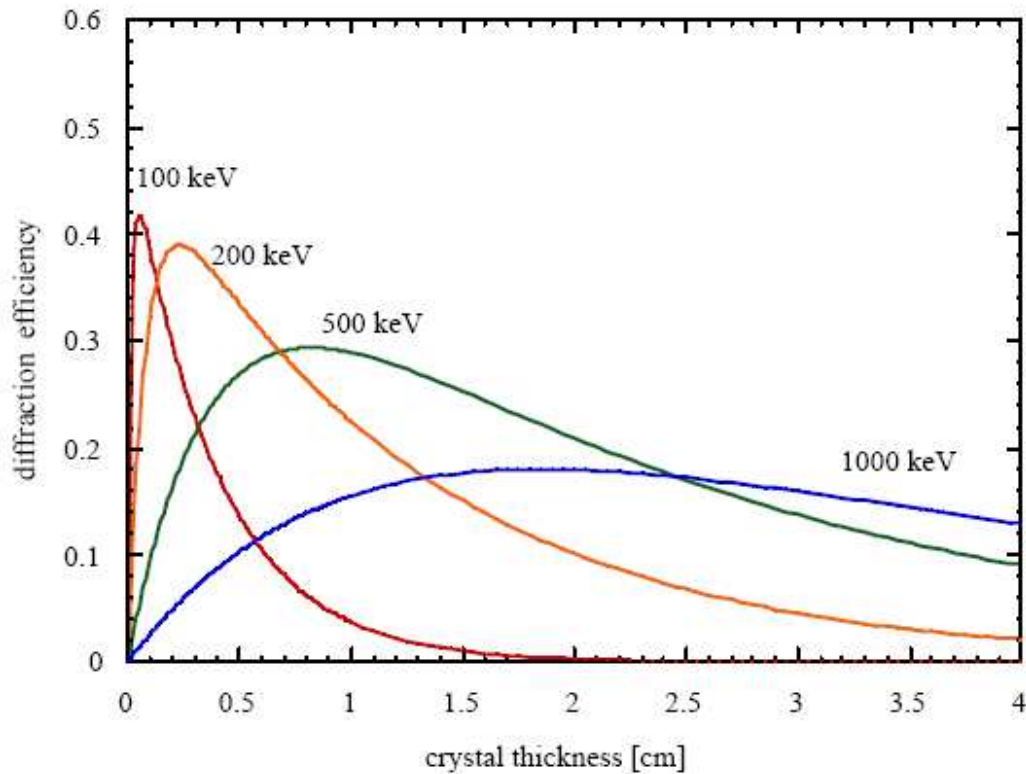


Figura 6.19: Curve teoriche di ottimizzazione dello spessore di cristalli di Germanio per diffrazione di Laue sul piano cristallino (440).

Si noti che quando si parla di efficienza del cristallo è necessario distinguere tra efficienza di picco (*peak efficiency*), espresso normalmente come una percentuale, e la riflettività integrata (*integrated reflectivity*), espressa in fotoni/secondo. La riflettività integrata non è altro che il flusso totale diffratto, e misura il flusso di fotoni diffratti dall'intero cristallo in un dato intervallo di tempo. Ad esempio, misure effettuate su cristalli di Germanio e

Rame danno efficienze di  $\sim 30\%$  e  $\sim 20\%$  per fotoni nella banda 300–900 keV.

Vediamo ora di introdurre il concetto di *mosaicità*. Un cristallo perfetto è quello in cui gli atomi si trovano al centro di un reticolo cristallino regolare. In questo caso, raggi X verrebbero diffratti come mostrato in Figura 6.20: fino ad un certo angolo  $\theta'$ , alcuni arcosecondi dall'angolo di Bragg  $\theta$ , l'intensità della radiazione diffratta è zero. Tra  $\theta'$  e  $\theta$  l'intensità aumenta rapidamente ad efficienza 100%, vi rimane per un certo intervallo angolare  $\Delta\theta_0$ , e poi diminuisce rapidamente ad intensità zero. Questo però accade per cristalli perfetti, mentre in natura il reticolo cristallino presenta delle imperfezioni (dette *dislocazioni*) che fanno sì che il valore di  $\Delta\theta_0$  sia molto maggiore di quello previsto nel caso di cristalli perfetti.

Questo ha portato allo sviluppo di un modello noto come Cristallo Idealmente Imperfetto (*Ideally Imperfect Crystal*): questo cristallo viene costruito a partire da un elevato numero di minuscoli frammenti di cristallo posizionati in una configurazione con i loro piani reticolari quasi paralleli. Que-

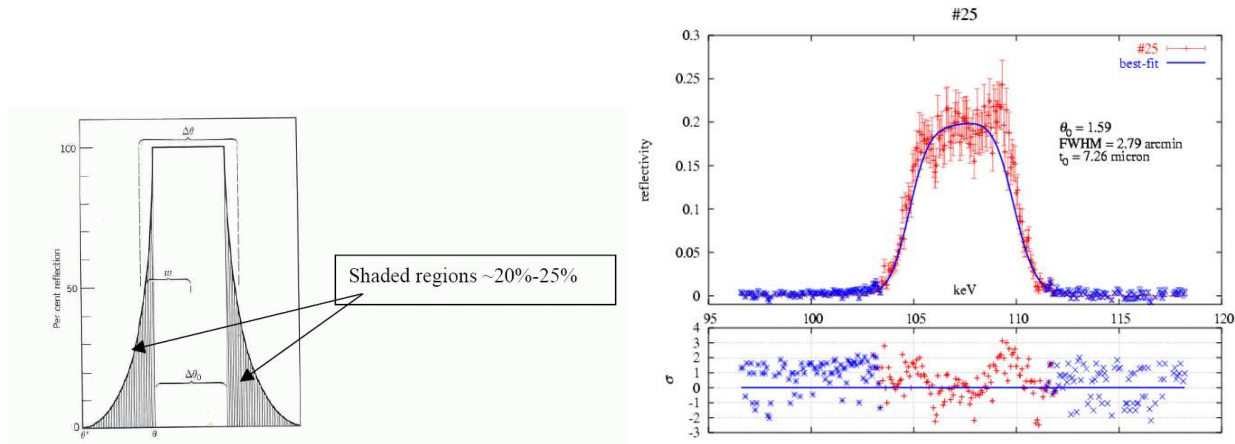
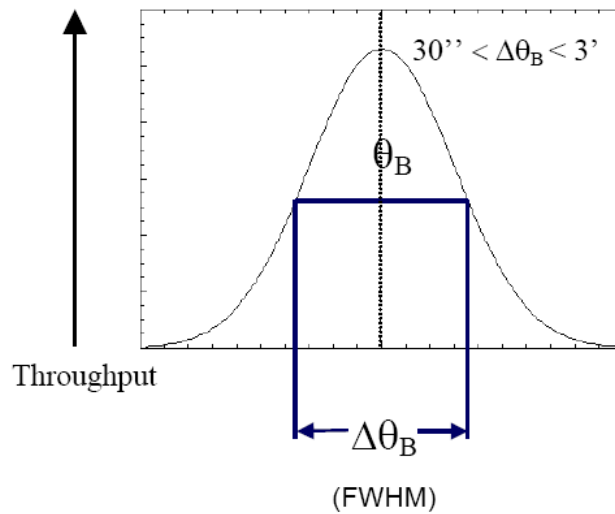


Figura 6.20: Confronto tra la diffrazione di Bragg da un cristallo perfetto (a sinistra) ed un cristallo di Rame (111) (a destra).

sta configurazione prende il nome di *cristallo a mosaico*. La distribuzione statistica degli angoli è considerata Gaussiana, e la *mosaicità*  $\Delta\theta_B$  viene definita come la Ampiezza a Mezzo Massimo (Full Width at Half Maximum, FWHM) della distribuzione (vedi Figura 6.21). La mosaicità non è quindi altro che una misura delle imperfezioni di un cristallo. Ovviamente all'aumentare della mosaicità corrisponde una diminuzione dell'efficienza di picco, mentre l'efficienza integrata rimane pressochè costante. Altri parametri che sono influenzati dalla mosaicità sono il campo di vista, la risoluzione angolare e l'intervallo operativo in energia. In prima approssimazione abbiamo che la mosaicità è circa 1.5 volte il campo di vista.


 Figura 6.21: Definizione della mosaicità  $\Delta\theta_B$  di un cristallo.

Misurata la mosaicità di un cristallo è possibile ricavarci l'intervallo operativo in energia utilizzando la legge di Bragg (Eq. 6.12) e la definizione di mosaicità:

$$2d\theta_B = \frac{hc}{E} \quad (6.15a)$$

$$\frac{\Delta\theta_B}{\theta_B} = \frac{\Delta E}{E} \quad (6.15b)$$

dove  $h$  è la costante di Planck e  $c$  la velocità della luce (abbiamo assunto  $n = 1$  e  $\theta$  piccolo nella legge di Bragg). Otteniamo quindi che l'intervallo operativo in energia di un cristallo di mosaicità  $\Delta\theta_B$  è

$$\Delta E = \frac{2dE^2}{hc} \Delta\theta_B \quad (6.16)$$



## Le lenti di Laue

Le lenti di Laue si basano sull'utilizzo di piú di un cristallo per focalizzare fotoni di alta energia, ed il principio di funzionamento è schematizzato in Figura 6.22, dove viene mostrata la configurazione di cristalli orientati tutti nella stessa direzione  $\theta$  e posizionati su di un anello di raggio  $R$ . I raggi incidenti di una certa energia verranno focalizzati ad una certa distanza focale  $F$  data da

$$F = \frac{R}{\tan 2\theta} \quad (6.17)$$

Combinando Eqs. 6.15a e 6.17 abbiamo che l'energia  $E$  del fotone focalizzato alla distanza focale  $F$  è data da

$$E = \frac{hc}{dR} F \quad (6.18)$$

cioè cristalli posizionati a raggi  $R$  diversi focalizzeranno fotoni di energia diversa. Questo permette di aumentare l'intervallo operativo in energia se innestiamo in anelli concentrici piú cristalli, come mostrato in Figura 6.23.

Dall'Eq. 6.13 vediamo come sia possibile variare l'angolo di Bragg, e quin-

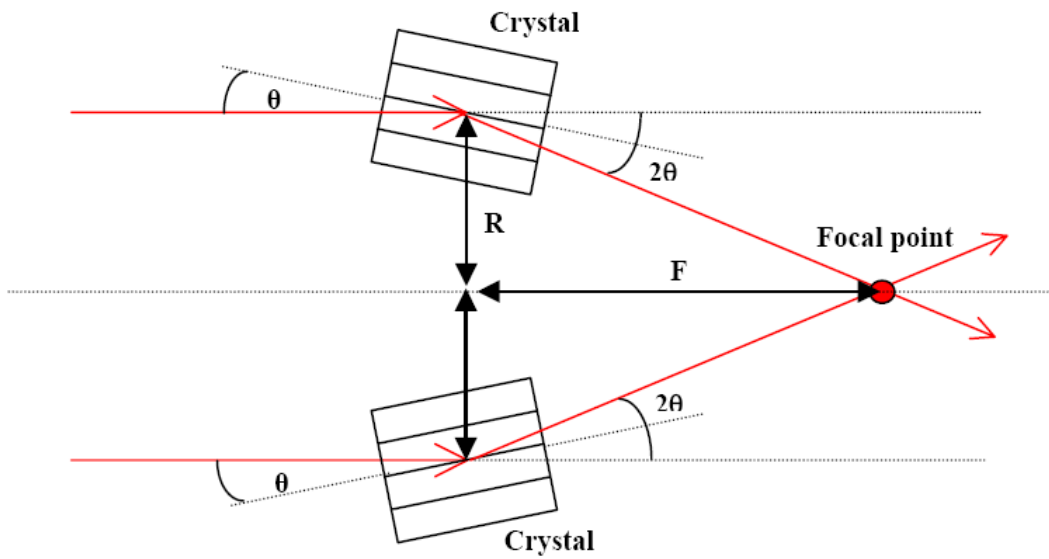


Figura 6.22: Principio di funzionamento di una lente di Laue: i cristalli sono posizionati su di un anello di raggio  $R$ , hanno tutti lo stesso orientamento  $\theta$  e focalizzano fotoni di una certa energia ad una distanza focale  $F$ .

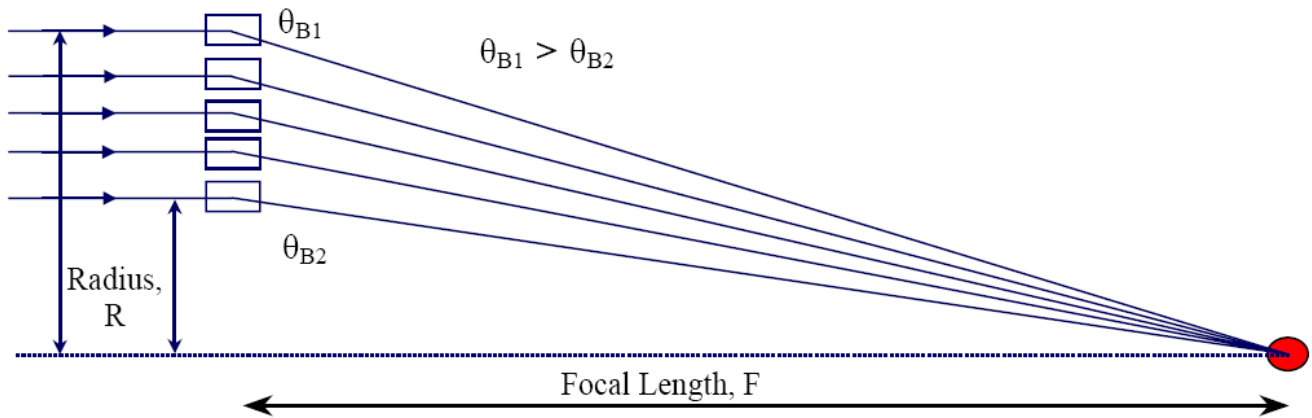


Figura 6.23: Lente di Laue con cristalli innestati in anelli concentrici.



Figura 6.24: Foto di una lente di Laue realizzata per l'esperimento CLAIRE, consistente in 556 cristalli di Germanio Ge(111) montati su 8 anelli concentrici (si ringrazia Peter von Balmoos).

di la focalizzazione della Lente, agendo sulla costante reticolare  $a$  (cioè variando  $d$  in Eq. 6.18). Quindi cambiando il tipo di cristallo si varia la distanza focale della lente. Ad esempio, per una data energia, il Rame riflette con un angolo di Bragg maggiore di quello prodotto dal Germanio.

## 6.5 Rivelazione di raggi X da sorgenti cosmiche: Considerazioni statistiche

Un rivelatore collimato registrerà (conterà) eventi che provengono da un piccolo angolo solido del cielo. A questi si aggiungeranno eventi di fondo.

Possiamo quindi considerare tre differenti tipi di conteggi:

- ① il flusso di fotoni  $j_s$ , proveniente dalla sorgente all'interno del campo di vista;
- ② il flusso di fotoni  $dj_d/d\Omega$ , proveniente dal fondo diffuso che cade all'interno dell'angolo solido del collimatore;
- ③ il flusso  $j_b$  di fondo non dovuto all'emissione diffusa, assunto omnidirezionale e non collimato (cioè è di energia così elevata che penetra il rivelatore indipendentemente dalla direzione).

Quindi il tasso di conteggi *netto* osservato ad un certo istante sarà

$$R = \left[ j_s f(\theta - \theta_0) + \frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b \right] \varepsilon A \quad \text{cts sec}^{-1} \quad (6.19)$$

dove  $f(\theta - \theta_0)$  è la funzione di trasmissione del collimatore,  $\theta - \theta_0$  è la distanza angolare tra l'asse centrale del collimatore e la direzione della sorgente,  $\delta\Omega$  è l'angolo solido del collimatore,  $\varepsilon$  è l'efficienza del rivelatore, e  $A$  è la sua area.

Nel caso di collimatori meccanici,  $f(\theta - \theta_0)$  ha la forma triangolare già descritta (Eq. 6.7)

$$f(\theta - \theta_0) = \begin{cases} 1 - \frac{|\theta - \theta_0|}{\theta_{1/2}} & \text{per } |\theta - \theta_0| < \theta_{1/2} \\ 0 & \text{per } |\theta - \theta_0| > \theta_{1/2} \end{cases}$$

dove  $\theta_{1/2}$  è una caratteristica del collimatore.

Per le sorgenti piú intense  $j_s$  è dell'ordine di  $100 \text{ fotoni cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ , mentre per le sorgenti piú deboli arriva a  $\sim 10^{-4} \text{ fotoni cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ . Il flusso al di sopra di 1 keV dovuto ad emissione diffusa è circa  $10 \text{ fotoni cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ , mentre quello non diffuso,  $\varepsilon j_b$ , è dell'ordine di  $0.01 \text{ cts sec}^{-1}$  in 1–10 keV, ma dipende in modo significativo dalle tecniche di discriminazione usate per eliminarlo (che discuteremo dopo).

Vediamo ora di studiare l'accumulo di dati: nel caso piú semplice una sorgente sar  visibile nel campo di vista del collimatore per un certo tempo  $t_1$ , dando luogo ad un conteggio netto di  $N_1 = R_1 t_1$  conteggi. Il fondo verr  quindi accumulato durante un periodo  $t_2$ , producendo un conteggio  $N_2 = R_2 t_2$ . Il tasso di conteggio netto dalla sorgente sar  quindi

$$R_1 - R_2 = j_s f(\theta - \theta_0) \varepsilon A = N_1/t_1 - N_2/t_2 \quad (6.20)$$

L'errore statistico associato a  $j_s$    semplicemente

$$\frac{\delta j_s}{j_s} = \frac{\sqrt{N_1 t_2^2 + N_2 t_1^2}}{N_1 t_2 - N_2 t_1} \quad (6.21)$$

dato che  $N_1$  e  $N_2$  hanno distribuzioni normali con deviazione standard  $\sqrt{N_1}$  e  $\sqrt{N_2}$ . Se il numero di conteggi   minore di circa 10   necessario utilizzare la statistica di Poisson per ottenere la deviazione piú probabile.

Nel caso di osservazione *scanning*, quella in cui l'asse dello strumento   ruotato sopra la sorgente di un angolo maggiore del campo di vista, il conteggio netto accumulato sar 

$$N_s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} j_s \varepsilon A \frac{f(\theta - \theta_0)}{\omega} d\omega \quad (6.22)$$

dove  $\omega$  è la velocità di rotazione. Utilizzando la forma triangolare (6.7) per  $f(\theta - \theta_0)$  l'integrazione della (6.22) fornisce

$$N_s = j_s \varepsilon A \frac{\theta_{1/2}}{\omega} \quad \text{cts} \quad (6.23)$$

La quantità  $\theta_{1/2}/\omega$  non è altro che il tempo di transito della sorgente nel campo di vista del collimatore.

Vediamo ora di determinare l'errore associato alla misura del conteggio da una sorgente, in modo di estrarre il rapporto segnale rumore. Trattiamo due casi limite:  $j_s$  maggiore del fondo e  $j_s$  minore del fondo. Nel primo caso avremo che

$$\delta N_s = \sqrt{N_s} = \sqrt{j_s \varepsilon A \frac{\theta_{1/2}}{\omega}} \quad (6.24)$$

mentre nel secondo

$$\delta N_s = \sqrt{N_B} = \sqrt{\left( \frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b \right) \varepsilon A t} \quad (6.25)$$



dove  $t$  è il tempo durante cui è stata osservata la sorgente. Per osservazioni *scanning*  $t = 2\theta_{1/2}/\omega$ . Il rapporto segnale/rumore è allora dato

da

$$S/N = \frac{N_s}{\delta N_s} = \frac{N_s}{\sqrt{N_B}} = j_s \sqrt{\frac{\varepsilon A t}{\left(\frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b\right)}} \quad (6.26)$$

La quantità  $S/N$  è formalmente il numero di deviazioni standard ( $\sigma$ ) per cui i conteggi dalla sorgente sono maggiori del fondo. Le due espressioni (6.24) e (6.26) determinano il modo in cui i parametri dell'esperimento influenzano i risultati delle osservazioni, come la sensibilità e gli errori.

Data la dipendenza dalla radice quadrata, per raddoppiare la sensibilità sarà necessario quadruplicare il tempo di osservazione o l'area dello strumento.

Si definisce sensibilità di uno strumento il flusso piú debole (il piú piccolo  $j_s$ ) che produce una certo numero di deviazioni standard al di sopra del fondo. Tradizionalmente questo numero è tre, quindi

$$j_{\min} = 3 \sqrt{\frac{\left(\frac{dj_d}{d\Omega} \delta\Omega + j_b\right)}{\varepsilon A t}} \quad (6.27)$$

## 6.6 Il rocking come tecnica per la determinazione del fondo

Come abbiamo visto (si veda Eq. 6.7) il segnale netto da una sorgente è dato dalla differenza tra uno spettro accumulato puntando sulla sorgente ed uno spettro di fondo. Una possibilità è quella di accumulare lo spettro di fondo prima e/o dopo l'osservazione sulla sorgente in regioni "vicine", ma questa tecnica ha lo svantaggio che se il fondo mostra variabilità (ad esempio a causa di flussi variabili di particelle dovuti alla SAA o a cicli solari) allora non siamo sicuri che il fondo accumulato ad istanti diversi sia lo stesso di quello accumulato durante l'osservazione puntata. Ovviamente questo vale per sorgenti il cui conteggio sia dominato dal fondo.

Per ovviare a questo problema, e per essere sicuri di avere un monitoraggio del fondo contemporaneo alla osservazione puntata è stata messa a punto una tecnica, detta di *rocking*, che permette di misurare contemporaneamente i conteggi dalla sorgente ed i conteggi da una regione vicina a quella del puntamento spostando il collimatore sopra il rivelatore (come nel caso del PDS a bordo di BeppoSAX, o l'intero blocco collima-

tore+rivelatore, come nel caso dell'esperimento HEXTE a bordo di RXTE) alternativamente da una parte all'altra della direzione di puntamento. I collimatori a bordo del PDS avevano la possibilità di basculare su cinque posizioni simmetriche rispetto alla posizione neutra di puntamento, a  $\pm 30'$ ,  $\pm 60'$ ,  $\pm 90'$ ,  $\pm 150'$  e  $\pm 210'$ . In Figura 6.25 viene mostrato il tasso di conteggio accumulato dai rivelatori sotto i due diversi blocchi di collimatori (si veda Figura 6.11), e come questi vengano poi fusi insieme per ottenere il tasso di conteggio della sorgente+fondo e del fondo.

In Figura 6.26 viene mostrata la tecnica del rocking applicata alla determinazione dello spettro netto dell'ammasso di galassie nella costellazione di Coma (*Coma Cluster*). Lo spettro misurato nella posizione neutra (ON-source) misura lo spettro di sorgente e quello del fondo sottostante. Lo spettro misurato nelle posizioni laterali (prive di sorgenti) misura lo spettro del fondo (OFF-source). La loro differenza permette di estrarre il fondo netto dalla sorgente. Dato che lo spettro è ottenuto per differenza, si possono rilevare segnali che sono qualche per cento del segnale di fondo. A causa della particolare orbita di BeppoSAX (a bassa inclinazione rispetto all'equatore, in modo da evitare i passaggi attraverso la SAA) il fondo è molto stabile e non mostra alcuna modulazione.

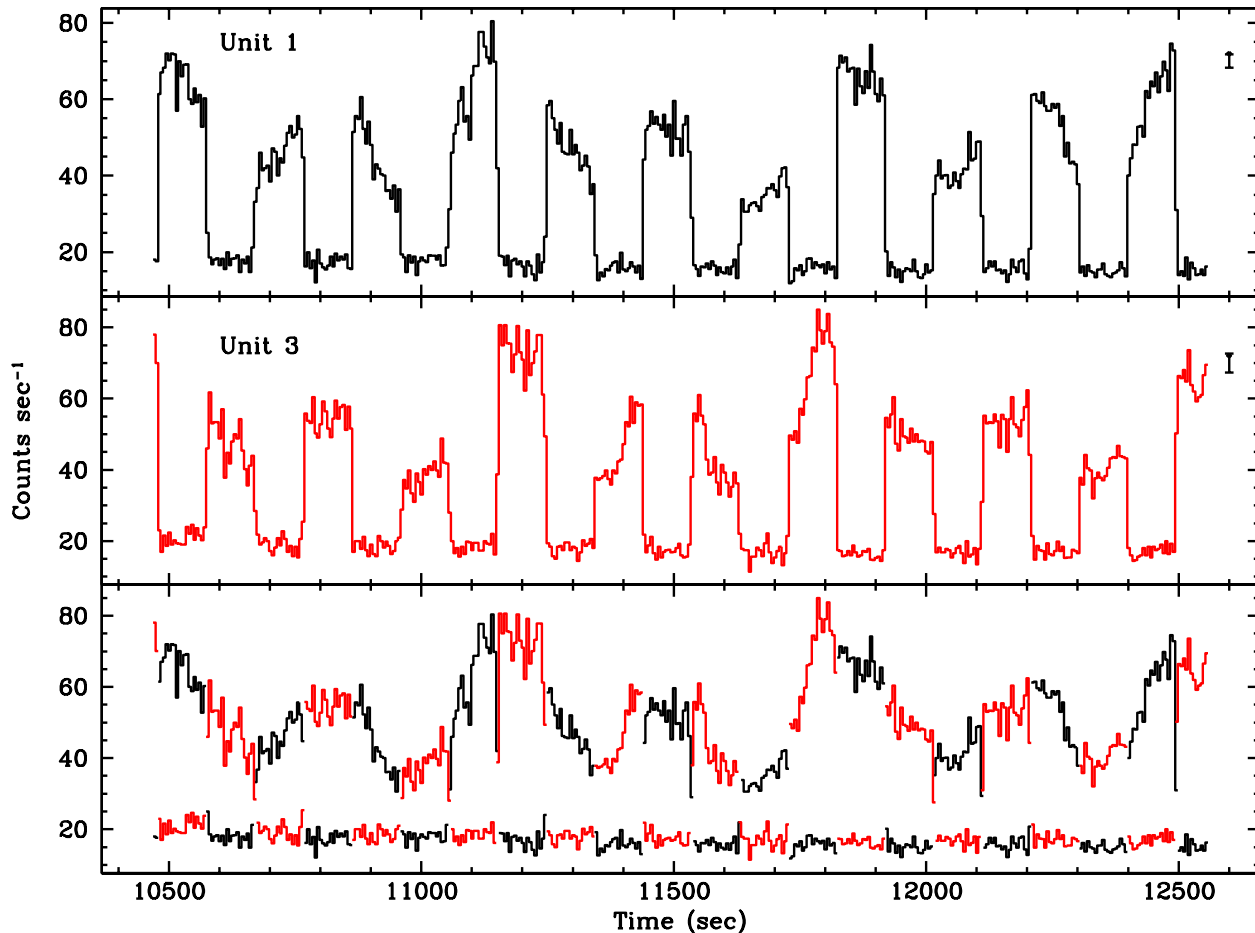


Figura 6.25: Serie temporale della pulsar X GX301–2 (periodo di pulsazione di  $\sim 700$  sec) accumulata dallo strumento PDS. La sorgente viene puntata per 96 sec, poi per altri 96 sec il collimatore si sposta di  $3.5^\circ$  da una parte, poi ritorna sulla sorgente ed ancora  $3.5^\circ$  dalla parte opposta, per poi ricominciare il ciclo. Nei primi due pannelli sono mostrate le serie temporali relative a rivelatori sottostanti collimatori diversi. Nel momento che le due serie temporali vengono “fuse” (terzo pannello) si ottengono due serie temporali complete: una con il flusso di sorgente e l’altra con il flusso del fondo.

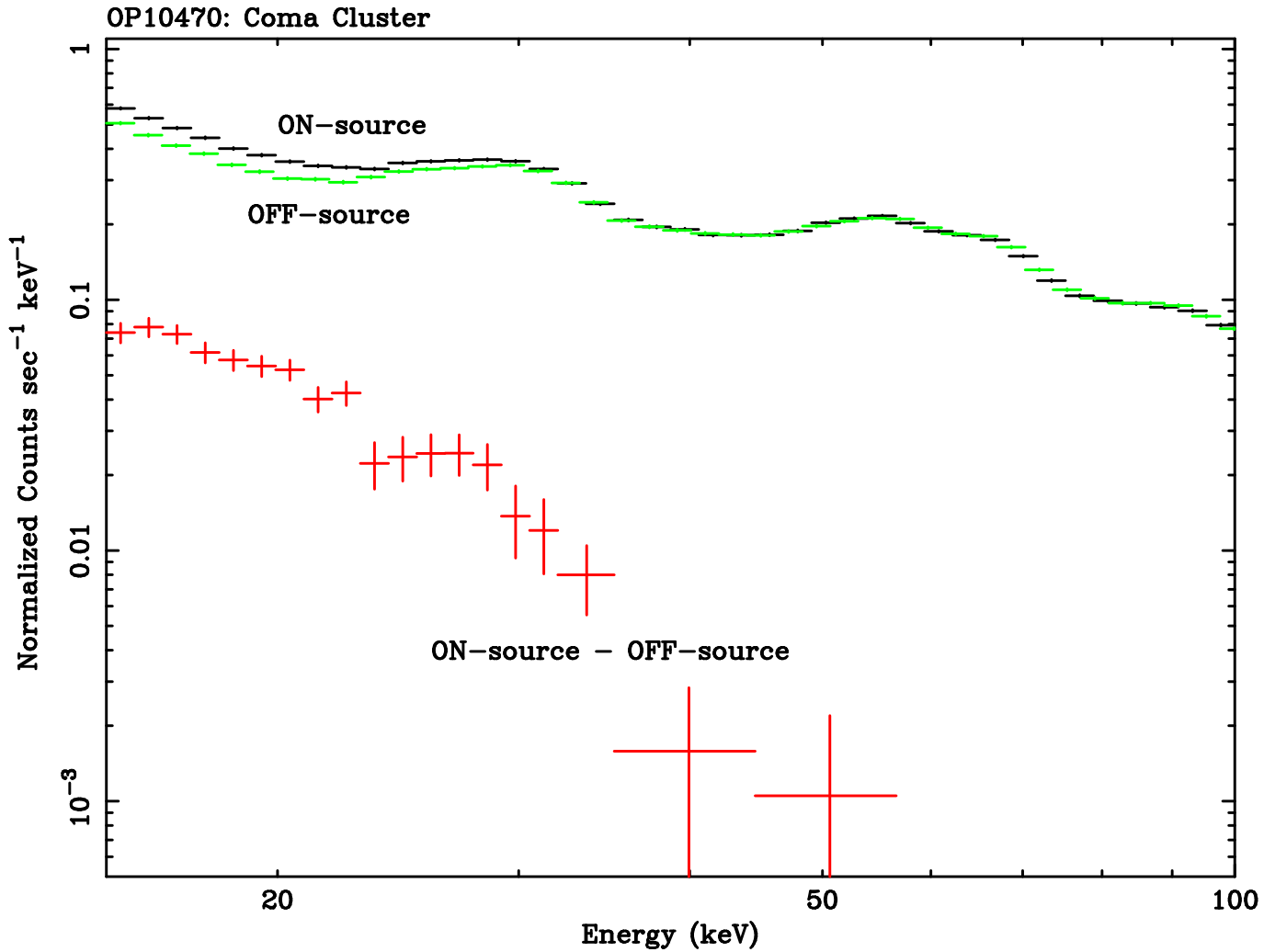


Figura 6.26: Esempificazione dell'utilizzo della tecnica di rocking per l'estrazione dello spettro netto di una sorgente. In questo caso lo spettro dell'ammasso di galassie in Coma. ON-source indica lo spettro di sorgente + fondo; OFF-source lo spettro del fondo; la loro differenza è lo spettro netto della sorgente.

# Fit Spettrale e XSPEC

## 7.1 Introduzione

Ci occuperemo ora di tecniche che permettono il confronto tra i modelli teorici che abbiamo incontrato nella prima parte del corso (e che ci forniscono i conteggi aspettati se l'emissione fosse dovuta al processo di cui stiamo valutando l'emissione) con le misure sperimentali (cioè i conteggi misurati) ottenibili con le classi di strumenti che abbiamo brevemente descritto nel Capitolo precedente. Purtroppo, come vedremo in dettaglio, non è possibile ricavarci in maniera univoca la forma dello spettro dai conteggi osservati, quindi è necessaria una tecnica statistica che mi permetta di decidere, tra tutti i possibili modelli, quale sia quello che meglio descrive le osservazioni.

## 7.2 Fondamenti di fitting spettrale

La procedura standard per l'analisi di dati spettrali è quella di assumere una certa forma dello spettro avente un certo numero di parametri liberi, calcolare la risposta del rivelatore per valori prestabiliti dei parametri, e



testare la bontà con dei test di verosimiglianza, il piú usato dei quali è quello del  $\chi^2$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(N_i - C_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (7.1)$$

dove  $C_i$  sono i conteggi previsti e  $N_i$  sono quelli misurati dalla sorgente in un insieme di  $M$  bin in energia indipendenti. Le varianze predette in ogni bin saranno  $\sigma_i^2 = C_i$  se consideriamo solamente la statistica di conteggio dei fotoni. Se però il conteggio del fondo non è trascurabile allora i  $C_i$  devono essere interpretati come la differenza tra il vero conteggio totale  $T_i$  ed il vero conteggio dovuto al fondo  $B_i$  e quindi dovremo usare la stima  $\sigma_i^2 = T_i + B_i$ . Inoltre bisognerà aggiungere a  $\sigma_i$  ogni errore sistematico, quali ad esempio le incertezze nella misura dell'area del rivelatore ed incertezze nella determinazione dell'efficienza (si ricordino le (6.24) e (6.25)).

La probabilità di ottenere un valore del  $\chi^2$  maggiore o uguale a quello osservato è dato da

$$P(> \chi^2) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_{\chi^2}^{\infty} e^{-\mu/2} \mu^{(n/2-1)} d\mu \quad (7.2)$$

dove la quantità  $n$  è il *numero dei gradi di libertà*, uguale a  $M$  meno il numero dei parametri utilizzati nel modello spettrale. Se  $P$  è sufficientemente piccolo, diciamo dell'ordine del 5%, l'ipotesi usata per calcolare i  $C_i$  può essere scartata. Generalmente i parametri che danno la probabilità più grande vengono indicati come la rappresentazione spettrale migliore (*best fit*). Se vogliamo, questo è l'equivalente di un fit ai minimi quadrati.

E' però necessario a questo punto una chiarificazione importante. Il test del  $\chi^2$  ci dice che alcuni modelli **non possono** rappresentare correttamente i nostri dati e che invece altri modelli **potrebbero** rappresentarli correttamente; quello che però il test del  $\chi^2$  **non può** dirci è quale, tra tutti i modelli (diversi) che sono permessi per il test, sia quello "migliore tra i migliori". Ad esempio, la sotto-stima delle varianze  $\sigma_i$  (ottenuta trascurando gli errori sistematici) condurrà ad un alto valore del  $\chi^2$  e quindi alla possibile reiezione, sbagliata, di certi modelli.

Per cercare di dare una risposta a questo problema si utilizza un altro test, il cosiddetto F–test, il quale misura se le varianze ottenute da due collezioni di dati (nel nostro caso due modelli) sono statisticamente differenti. Se lo sono, allora non potremmo dire nulla su quale delle due sia “migliore” rispetto all’altra, ma se le loro varianze sono statisticamente uguali, allora potremmo dire che i due modelli sono equivalenti. In altre parole, andremo a calcolare quale è la probabilità che la differenza dei  $\chi^2$  misurati con modelli **differenti** sia casuale. Da un punto di vista computazionale, l’F–test testa l’ipotesi che due campioni abbiano varianza differente cercando di rigettare l’ipotesi che le loro varianze siano consistenti, ed utilizza come variabile il rapporto dei  $\chi^2$  normalizzati (cioè il  $\chi^2$  diviso per il numero di gradi di libertà).

I conteggi previsti  $C_i$  vengono calcolati secondo la

$$C_i = \int_0^{\infty} \frac{dN}{dE_0} P_i(E_0) dE_0 \quad (7.3)$$

dove  $dN/dE_0$  è lo spettro incidente che viene assunto, e  $P_i(E_0)$  è la probabilità che un fotone incidente di energia  $E_0$  risulti in un conteggio in un

canale del rivelatore  $i$  che è tarato in una banda di energia nominale tra  $E_i|_{\min}$  e  $E_i|_{\max}$ , cioè

$$P_i(E_0) = \int_{E_i|_{\min}}^{E_i|_{\max}} P(E, E_0) dE \quad (7.4)$$

Veniamo quindi ridotti al problema di determinare la funzione densità di probabilità che un fotone incidente di energia  $E_0$  risulti in un segnale (impulso) corrispondente ad un'energia tra  $E$  e  $E + dE$ . Separiamo questa densità di probabilità in due parti: la prima,  $P_L(E', E_0)$ , che un fotone incidente di energia  $E_0$  depositi un'energia compresa tra  $E'$  e  $E' + dE'$  nel rivelatore (con  $E' \leq E_0$ ) e la seconda,  $P_R(E, E')$ , densità di probabilità di risoluzione, che una perdita di energia  $E'$  risulti in un impulso equivalente nell'intervallo tra  $E$  e  $E + dE$ . Allora avremo che

$$P(E, E_0) = \int_0^{E_0} P_R(E, E') P_L(E', E_0) dE' \quad (7.5)$$

In generale, la risoluzione può essere considerata una funzione Gaussiana

$$P_R(E, E') = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(E')} \exp \left[ -\frac{(E - E')^2}{2\sigma^2(E')} \right] \quad (7.6)$$

dove la varianza  $\sigma(E')$  è legata alla FWHM dalla relazione  $\sigma = 0.42$  (FWHM).

Descriviamo ora brevemente i vari contributi alla funzione  $P_L$ , che sono (i) la probabilità che un fotone riesca a penetrare nel volume del rivelatore, (ii) la probabilità che avvenga un certo tipo di interazione tra il fotone ed il rivelatore e (iii) la distribuzione di perdita di energia per quel particolare processo. Vediamo quindi che  $P_L$  può essere determinato da una combinazione di calcoli analitici, simulazione Monte Carlo e misure sperimentali. Nel caso di un contatore a scintillazione (ma il principio si può estendere anche ad apparecchi a gas e a semiconduttore) possiamo scrivere

$$P_L(E', E_0) = \exp[-\mu_w(E_0) t_w] \times \left\{ \frac{\mu_p(E_0)}{\mu(E_0)} P_L(E', E_0)|_{\text{photo}} + \frac{\mu_c(E_0)}{\mu(E_0)} P_L(E', E_0)|_{\text{Comp}} \right\} \quad (7.7)$$

La frazione  $\mu_p/\mu$  corrisponderà ad interazioni via effetto fotoelettrico, la frazione  $\mu_c/\mu$  ad interazioni via effetto Compton, dove  $\mu_p$  è il coefficiente di assorbimento dovuto ad assorbimento via fotoelettrico e  $\mu_c$  quello dovuto ad assorbimento via effetto Compton.  $\mu_w$  e  $t_w$  sono il coefficiente di assorbimento e lo spessore della finestra.

Una interazione via effetto fotoelettrico può depositare nel rivelatore tutta la sua energia, od una parte di essa corrispondente alla fuga dal rivelatore dei raggi X della shell  $K$  o  $L$  che risultano dalla diseccitazione dell'atomo originale che aveva assorbito il fotone. Diventa allora importante determinare il numero relativo di raggi X che vengono assorbiti via effetto fotoelettrico nel rivelatore. Per semplicità assumeremo che il fascio incida perpendicolarmente il rivelatore e che questi sia di grandi dimensioni.

Di queste interazioni una certa frazione  $\delta_k$  avverrà nella shell  $K$ , e di questa frazione il guadagno di fluorescenza  $\omega_k$  è la probabilità che l'atomo si disecciti emettendo un raggio X dalla shell  $K$  (si vedano i valori di  $\omega_k$  per alcuni materiali usati in astronomia X in Tabella ). Assumendo emissione isotropa, si può integrare la probabilità di penetrazione di un raggio X proveniente dalla shell  $K$  sul percorso di fuga dal rivelatore in funzione dell'angolo solido. La frazione di tutte le interazioni che hanno come risultato la fuga dalla finestra frontale e quella posteriore del rivelatore sono

**Proprietà di materiali utilizzati in sistemi di rivelazione per astronomia X**

	Numero Atomico $Z$	Densità $\rho$ (g cm <sup>-3</sup> )	Energia Shell $E_s$ (keV)	Energia Riga X (keV)	Guadagno Fluoresc. $\omega_s$	Frazione Interaz. $\delta_s$	Energia ( $\mu_c = \mu_p$ ) (keV)
<i>Gas Contatori Proporzionali</i>							
Metano	6	$0.713 \cdot 10^{-3}$	0.284	0.277		0.96	20
Ne	10	$0.901 \cdot 10^{-3}$	0.867	0.849, 0.858	0.01	0.94	38
Ar	18	$1.780 \cdot 10^{-3}$	3.203 0.285, 0.246, 0.244	2.96	0.105	0.90	72
Kr	36	$3.740 \cdot 10^{-3}$	14.32 1.92, 1.73, 1.67	12.64, 14.12	0.625 0.04	0.88	170
Xe	54	$5.850 \cdot 10^{-3}$	34.56 5.45, 5.10, 4.78	29.67, 33.78 4.10, 4.49, 5.30	0.875 0.14	0.86	300
<i>Cristalli Scintillatori</i>							
Nal	53	3.61	33.16 5.19, 4.86, 4.56	28.47, 32.30 3.93, 4.22, 4.80	0.865 0.13	0.84	260
Csl	55	4.54	35.97	30.81, 34.99 4.28, 4.62, 5.28	0.885 0.15	0.68	300
Si	14	2.33	1.84	1.74, 1.83	0.04	0.92	53
Ge	32	5.36	11.10 1.42, 1.41, 1.21	9.88, 10.98 1.19, 1.22	0.49 0.01	0.91	145
<i>Finestre</i>							
Be	4	1.82	0.111	0.109		0.97	14
Mylar	8	1.4	0.532	0.525		0.65	
Formvar	8	1.2	0.532	0.525		0.65	
Poliprop.	6	0.95	0.284	0.277		0.92	
Aria <sup>a</sup>	18	$1.29 \cdot 10^{-3}$	3.20	2.96	0.105	0.54	27
Aria <sup>b</sup>	8		0.532	0.525			
Aria <sup>c</sup>	7		0.400	0.392			
<i>Collimatori</i>							
Mg	12	1.74	1.30	1.25, 1.30	0.02	0.93	46
Al	13	2.7	1.56	1.49, 1.55	0.03	0.93	50
Fe	26	7.87	7.11 0.849, 0.722, 0.709	6.40, 7.06	0.31	0.90	135
Ni	28	8.9	8.33 1.01, 0.877, 0.858	7.47, 8.27	0.38	0.89	140
Cu	29	8.96	8.99 1.10, 0.954, 0.935	8.04, 8.91	0.40	0.89	145

<sup>a</sup> 1.3% Ar;    <sup>b</sup> 23.2% O;    <sup>c</sup> 75.5% N

$$f_1(E_0) = \frac{1}{2} \frac{\omega_k \delta_k}{P_I} \left\{ 1 - \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_0)} \ln \left( 1 + \frac{\mu(E_0)}{\mu(E_k)} \right) \right\} \quad (7.8a)$$

$$f_2(E_0) = \frac{1}{2} \frac{\omega_k \delta_k}{P_I} \exp[-\mu(E_0)t] \left\{ \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_0)} \ln \left( \frac{\mu(E_k)}{\mu(E_k) - \mu(E_0)} \right) - 1 \right\} \quad (7.8b)$$

Il contributo a  $P_L$  diventa quindi

$$P_L(E', E_0)|_{\text{photo}} = \left\{ [1 - f(E_0)] \delta(E' - E_0) + \sum_k f_k(E_0) \delta(E' - (E_0 - E_k)) \right\} \quad (7.9)$$

dove abbiamo definito  $f = \sum_k f_k = \sum_k (f_1 + f_2)_k$  e la somma su  $k$  considera tutti i raggi X che devono essere considerati individualmente.

Per calcolare la perdita di energia per scattering Compton bisogna “seguire” il fotone scatterato per vedere se esso subisce ulteriori interazione nel rivelatore.



In un trattamento rigoroso si dovrebbero seguire (attraverso un Monte Carlo) tutti i fotoni ed elettroni secondari prodotti da ogni processo iniziale per determinare la perdita totale di energia. Nel regime di interesse per l'astronomia X, per contatori a gas l'energia di utilizzo è tale per cui il termine  $\mu_c/\mu$  è trascurabile, mentre per i cristalli scintillatori possiamo usare l'approssimazione

$$P_L(E', E_0)|_{\text{Comp}} = a_1(E_0) \delta(E' - E_0) + a_2(E_0) \delta(E' - (E_0 - E_k)) + \frac{a_3(E_0)}{E_C} H(E_C - E') \quad (7.10)$$

dove  $H(x)$  è la funzione scalino definita come

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

I coefficienti  $a_1(E_0)$  rappresentano la frazione di fotoni Compton che alla fine depositeranno tutta la loro energia; i coefficienti  $a_2(E_0)$  la frazione di fotoni Compton che terminano con un assorbimento fotoelettrico che porterà ad una fuga di un fotone X dalla shell  $K$ . Ciò che rimane, cioè

$$a_3(E_0) = 1 - a_1(E_0) - a_2(E_0) \quad (7.11)$$

viene approssimato con un deposito di energia a spettro costante da zero fino ad una energia massima  $E_C$  che può essere perduta in uno scattering singolo.

E' bene mettere in evidenza che finora abbiamo sempre considerato fotoni che incidono sulla finestra del rivelatore. Vi sono altri affetti di cui bisogna tenere conto, quali fotoni che vengono scatterati via Compton dal collimatore, e fotoni che penetrano il rivelatore senza subire interazioni e sono poi scatterati indietro. Per sorgenti puntiformi si tiene conto di questi effetti nella determinazione del fondo, ma possono diventare importanti nello studio del fondo cosmico diffuso.

### **7.3 Fitting spettrale e XSPEC**

XSPEC è il programma che viene utilizzato dalla maggior parte degli studiosi che si occupano di studi spettrali nella banda X. E' stato sviluppato

al Goddard Space Flight Center della NASA da Keith Arnaud, ed ora il suo sviluppo viene portato avanti da una squadra di programmatori e/o astrofisici sia al Goddard che in altre parti del mondo. Per una trattazione particolareggiata rimandiamo al suo manuale, disponibile sia on-line che come aiuto a linea di comando. Quello che tratteremo qui sarà solamente la “filosofia” che sta alla base del programma e che, alla luce di quanto abbiamo detto nella sezione precedente, ci sarà del tutto naturale.

Da un punto di vista operativo, un qualsiasi spettrometro non ci fornisce lo spettro di una sorgente ma conteggi  $C$  per canale strumentale  $I$ . Questo spettro osservato è in relazione con lo spettro vero della sorgente  $f(E)$  attraverso la relazione (vedi la (7.3))

$$C(I) = \int_0^{\infty} f(E) R(I, E) dE \quad (7.12)$$

La funzione  $R(I, E)$  viene detta *risposta del rivelatore* e, come abbiamo visto, è proporzionale alla probabilità che un fotone incidente di energia  $E$  venga rivelato nel canale  $I$ .

Da un punto di vista teorico, si dovrebbe essere in grado di determinare lo spettro della sorgente  $f(E)$  invertendo Eq. 7.12. Sfortunatamente questo non è in generale possibile perché queste inversioni non sono univoche e sono instabili a piccole variazioni in  $C(I)$ .

La maniera alternativa è quindi quella di scegliere un modello spettrale  $f(E)$  che possa essere descritto da un (piccolo) numero di parametri e “concordarlo” (*fit*) ai dati (conteggi) ottenuti dallo spettrometro. Si calcola quindi una statistica di fit che ci permetta di giudicare se il modello “concorda” con i dati sperimentali.

I parametri del modello sono poi variati per trovare l’insieme dei parametri che fornisca la migliore statistica di fit. Questi valori diventeranno i *parametri del fit migliore (best fit parameters)* e lo spettro ottenuto con questi parametri verrà detto il *best fit model*  $f_b(E)$ .

Abbiamo già visto che la statistica di fit più comunemente utilizzata per determinare il *best fit* è quella del  $\chi^2$ , definita dall’Eq. 7.1 Una volta ottenuto un modello di *best fit* abbiamo visto che un test utile per determina-

re, tra tutti i possibili diversi modelli di *best fit* possibili quello “migliore” è attraverso il F–test.

Un altro importante argomento da considerare è la determinazione dell'intervallo di valori di un parametro di *best fit* all'interno del quale si possa essere confidenti che giaccia il vero valore del parametro. Questo intervallo viene detto *intervallo di confidenza* e viene calcolato variando il valore del parametro fino a quando il  $\chi^2$  aumenta di una certa quantità al di sopra del valore minimo o di *best fit*.

La quantità di cui il  $\chi^2$  viene aumentato (detto  $\Delta\chi^2$  critico) dipende dal livello di confidenza che viene richiesto e dal numero di parametri su cui lo si vuole calcolare. Il  $\Delta\chi^2$  critico per alcune situazioni standard è mostrato in Tabella

<b>Intervalli di confidenza vs <math>\Delta\chi^2</math></b>			
Intervallo Confidenza	Nr Parametri		
	1	2	3
68%	1.00	2.30	3.50
90%	2.71	4.61	6.25
99%	6.63	9.21	11.3

Riassumendo abbiamo che per effettuare un fit spettrale abbiamo bisogno di (i) uno spettro osservato  $C(I)$ ; (ii) una risposta del rivelatore  $R(I, E)$ ; (iii) un modello spettrale  $f(E)$ . Con queste tre componenti la procedura per ottenere il modello di *best fit* sarà:

- ❑ Si crea un modello spettrale parametrizzato che ci si aspetta rappresenti lo spettro vero della sorgente.
- ❑ Vengono dati dei valori iniziali ai parametri del modello.
- ❑ In base ai valori dei parametri assegnati, si predice quale sia lo spettro in conteggi in ogni canale che sarebbe rilevato dal nostro spettrometro per il modello dato.
- ❑ Si confronta lo spettro predetto con quello osservato dallo strumento.
- ❑ I valori dei parametri del modello vengono variati fino a quando non si ottiene il *best fit* tra il modello teorico ed i dati osservati.
- ❑ Si calcola la bontà del fit per determinare come il nostro modello descrive bene i dati osservati, e si calcolano gli intervalli di confidenza per i parametri del modello.

Vediamo ora di dettagliare le tre componenti di cui sopra.

## □ C(I): Lo spettro osservato

Per ottenere lo spettro osservato  $C(I)$  per una data osservazione XSPEC utilizza due files: un file di dati (*data file*) ed un file di fondo (*background file*). Entrambi i files sono scritti in un formato binario denominato FITS<sup>6</sup> (si veda Appendice 7.3 per la definizione del formato). Il file di dati contiene, tra le altre cose, la lista dei conteggi rivelati in ogni canale. XSPEC usa il file di fondo per determinare un tasso di conteggio (*count rate*) netto a fondo sottratto in unità di conteggi al secondo. Il fondo viene scalato ai dati per il rapporto delle keyword BACKSCAL contenute nei files dati e fondo. Inoltre il file di dati viene scalato per il tempo di esposizione (keyword EXPOSURE). Quindi il tasso di conteggio netto a fondo sottratto è dato da

$$C(I) = \frac{D(I)}{t_D} - \frac{b_D}{b_B} \frac{B(I)}{t_B} \quad (7.13)$$

dove  $D(I)$  e  $B(I)$  sono i conteggi nei due files di dati e fondo, e  $t_D$  e  $t_B$

---

<sup>6</sup>La loro manipolazione può essere effettuata con i programmi contenuti nel pacchetto FTOOLS.

sono i tempi di esposizione nei due files di dati e fondo.  $b_D$  e  $b_B$  sono i valori di BACKSCAL nei due files.

### □ **R(I, E): La risposta dello strumento**

Prima che XSPEC possa prendere un insieme di valori dei parametri e predire lo spettro che sarebbe rivelato dallo strumento, è necessario che il programma conosca le caratteristiche specifiche dello strumento. Questa informazione è nota come *risposta del rivelatore*. Come abbiamo già visto,  $R(I, E)$  è proporzionale alla probabilità che un fotone incidente di energia  $E$  venga rivelato nel canale  $I$  del rivelatore. Con questa definizione  $R(I, E)$  è una funzione continua di  $E$ . Questa funzione continua viene convertita in una funzione a valori discreti dal programma che genera la cosiddetta **matrice di risposta**, che definisce gli intervalli di energia  $E_J$  tali che

$$R_D(I, J) = \int_{E_{J-1}}^{E_J} R(I, E) dE \quad (7.14)$$

XSPEC quindi legge gli intervalli di energia  $E_J$  e la matrice di risposta



$R_D(I, J)$  da un file di risposta (*response file*) che è scritto in un formato compresso che contiene solamente gli elementi non nulli della matrice. Con XSPEC è inoltre possibile utilizzare un file di risposta ausiliario (*auxiliary response file*) che contiene un vettore  $A_D(J)$  che XSPEC moltiplica con  $R_D(I, J)$  nel seguente modo

$$R_D(I, J) \rightarrow R_D(I, J) * A_D(J) \quad (7.15)$$

Per convenzione, la matrice di risposta è in unità di  $\text{cm}^2$ .

### □ **f(E): Il modello di spettro**

Il modello di spettro  $f(E)$  viene calcolato all'interno di XSPEC utilizzando gli intervalli di energia definiti nella matrice di risposta

$$f_D(J) = \int_{E_{J-1}}^{E_J} f(E) dE \quad (7.16)$$

ed è in unità di fotoni  $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-1}$ . XSPEC permette la costruzione di modelli composti composti di componenti additive (ad esempio leggi di potenza, corpi neri, ecc) e componenti moltiplicative che modificano

le componenti additive moltiplicandole per un fattore dipendente dall'energia (ad esempio assorbimento fotoelettrico, edges, ecc). I modelli possono essere definiti con una notazione algebrica. Ad esempio, la seguente espressione

$$\text{phabs}(\text{power} + \text{phabs}(\text{bbody}))$$

definisce un corpo nero assorbito ( $\text{phabs}(\text{bbody})$ ) aggiunto ad una legge di potenza. Il risultato è poi modificato da un'altra componente di assorbimento.

## □ Fit e intervalli di confidenza

Una volta che i dati sono stati letti ed il modello è stato definito, XSPEC usa un algoritmo di Levenberg-Marquard modificato (basato sulla routine CURFIT di Bevington) per trovare i valori di *best fit* dei parametri del modello. L'algoritmo usato, lavorando su di un intervallo ristretto nello spazio dei parametri, potrebbe ancorarsi in un minimo locale e non trovare il *best fit* globale. Ovviamente il processo di convergenza

è molto piú veloce se vengono dati dei valori iniziali ai parametri vicini ai valori attesi.

Alla fine del processo XSPEC mostrerà i valori dei parametri di *best fit*, insieme con gli intervalli di confidenza al 68% stimati dalle derivate rispetto ai parametri del modello. Questi intervalli di confidenza sono dati a puro titolo indicativo. Per calcolare gli intervalli di confidenza per un parametro di interesse XSPEC ha il comando `error` che fissa il parametro di interesse ad un particolare valore e fa un fit su tutti gli altri parametri. Vengono presi nuovi valori del parametro di interesse fino a quando non si è ottenuto il  $\Delta\chi^2$  richiesto. Per calcolare i nuovi valori del parametro di interesse a partire dal valore dato XSPEC usa un algoritmo di interpolazione cubica iterativa. Per calcolare intervalli di confidenza per diversi parametri contemporaneamente XSPEC può lavorare su di una “griglia” di valori dei parametri.

Vogliamo concludere questa breve introduzione all'analisi spettrale con XSPEC discutendo il caso in cui il nostro spettro sia stato accumulato da una sorgente molto debole e quindi il numero di conteggi in ogni (qualche) canale sia molto piccolo. In questo caso non è possibile utilizzare la statistica del  $\chi^2$  perché questa assume che i conteggi nei singoli canali seguano una distribuzione Gaussiana (in altre parole si assume che  $\sigma^2(I) = C(I)$ ). Una statistica alternativa, detta statistica C (dal nome dell'autore Cash), utilizza una funzione di verosimiglianza diversa dalla (7.1)

$$C = 2 \sum_{i=1}^N (y(x_i) - y_i \ln y(x_i) + \ln y_i!) \quad (7.17)$$

dove  $y_i$  sono i dati osservati e  $y(x_i)$  i valori della funzione. I parametri di *best fit* si ottengono minimizzando  $C$  per qualche funzione modello  $y$ . E' importante sottolineare che nel caso pratico di dati spettrali, a questi **non deve essere stato sottratto il fondo**. Un approccio alternativo è quello di continuare ad usare la statistica di  $\chi^2$  ma di cambiare il peso dei singoli dati (utilizzando i comandi `weight gehrels` oppure `weight Churazov`).

## Derivazione di Eq. 5.29

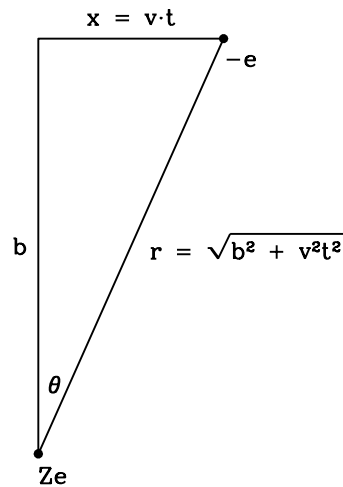


Figura 7.1: Collisione di un elettrone con uno ione ed emissione di bremsstrahlung.

In questa appendice deriveremo nel dettaglio la variazione della velocità subita da una particella (elettrone), di carica  $-e$ , che si muove nel campo di uno ione di carica  $Ze$  (si veda la discussione riguardante il processo di bremsstrahlung, Sezione 5.4). Vogliamo cioè dimostrare Eq. 5.29 di pagina 107. Dato che la traiettoria è quasi rettilinea (abbiamo supposto piccole deflessioni) il cambio di velocità avverrà essenzialmente in direzione perpendicolare al moto della particella. Pertanto avremo che durante la collisione

$$m\Delta v = Ze^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \theta}{r^2} dt \quad (7.18)$$

dove abbiamo utilizzato la legge di Coulomb e considerato soltanto la

componente perpendicolare della velocità (da cui il termine  $\cos \theta$ ). Dalla Figura 7.1 possiamo vedere come

$$r = \sqrt{b^2 + v^2 t^2} \quad (7.19a)$$

$$\cos \theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + v^2 t^2}} \quad (7.19b)$$

quindi, sostituendo queste relazioni in Eq. 7.18, otteniamo

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{Ze^2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \quad (7.20)$$

Se operiamo il cambio di variabile  $x = v \cdot t$ , allora l'integrale diventa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{b}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{b}{v} \left[ \frac{x}{b^2 \sqrt{b^2 + x^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{b}{v} \frac{2}{b^2} = \frac{2}{vb}$$

Eq. 7.20 diventa quindi

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{2Ze^2}{mvb}$$

## **Definizione del formato FITS**



All'inizio degli anni 80 la comunità astronomica internazionale realizzò che era necessario stabilire uno standard per il trasferimento di dati astronomici. Venne quindi definito il formato FITS (Flexible Image Transport System), che deve il suo nome al fatto che venne applicato al trasferimento di immagini astronomiche. Il formato consisteva in un vettore (normalmente multidimensionale) di dati in formato binario preceduto da una intestazione (*header*) in formato testo (ASCII) contenente informazioni sulla organizzazione e contenuto del vettore.

Successivamente il concetto di formato FITS venne ampliato per poter contenere formati di dati più complessi. In particolare venne introdotto il concetto di *random groups*, in cui i dati consistono in una serie di vettori ad ognuno dei quali è associato una serie di parametri. Queste strutture sono definite come *estensioni*, ognuna consistente in un *ASCII header* seguito da dati descritti nell'header stesso.

Le tre estensioni standard approvate dal FITS Working Group della IAU sono:

**IMAGE** Questa estensione permette la collezione di dati in un vettore multidimensionale.

**TABLE** I dati contenuti in questa estensione sono nel formato di una tabella ASCII.

**BINTABLE** Questa estensione è una generalizzazione dell'estensione TABLE, in quanto le righe possono contenere sia dati numerici che dati logici e a carattere. Inoltre ogni dato può essere a sua volta un vettore.

Un file FITS avrà la seguente struttura, in questo preciso ordine:

- Intestazione + dati primaria (*Primary HDU*)
- Estensioni approvate
- Altri records di tipo speciale (opzionale)

Ogni struttura FITS consisterà di un numero intero di record logici. La dimensione di un record logico FITS sarà di 23040 bits, corrispondenti a 2880 bytes. Qui sotto viene mostrato un dump ASCII di un tipico file FITS (spettro PDS della pulsar X 4U1626–67 ).

```

SIMPLE =          T / file does conform to FITS standard
BITPIX =          8 / number of bits per data pixel
NAXIS  =          0 / number of data axes
EXTEND  =          T / FITS dataset may contain extensions
COMMENT FITS (Flexible Image Transport System) format defined in Astronomy and
COMMENT Astrophysics Supplement Series v44/p363, v44/p371, v73/p359, v73/p365.
COMMENT Contact the NASA Science Office of Standards and Technology for the
COMMENT FITS Definition document #100 and other FITS information.
CONTENT = 'SPECTRUM' /
END

```

```

XTENSION= 'BINTABLE' / binary table extension
BITPIX  =          8 / 8-bit bytes
NAXIS   =          2 / 2-dimensional binary table
NAXIS1  =          18 / width of table in bytes
NAXIS2  =          60 / number of rows in table
PCOUNT  =          0 / size of special data area
GCOUNT  =          1 / one data group (required keyword)
TFIELDS =          6 / number of fields in each row
TTYPER1 = 'CHANNEL' / label for field 1
TFORM1  = 'I'       / data format of field: 2-byte INTEGER
TTYPER2 = 'RATE'    / label for field 2
TFORM2  = 'E'       / data format of field: 4-byte REAL
TUNIT2  = 'count/s' / physical unit of field
TTYPER3 = 'STAT_ERR' / label for field 3
TFORM3  = 'E'       / data format of field: 4-byte REAL
TUNIT3  = 'count/s' / physical unit of field
TTYPER4 = 'SYS_ERR' / label for field 4
TFORM4  = 'E'       / data format of field: 4-byte REAL
TTYPER5 = 'QUALITY' / label for field 5
TFORM5  = 'I'       / data format of field: 2-byte INTEGER
TTYPER6 = 'GROUPING' / label for field 6
TFORM6  = 'I'       / data format of field: 2-byte INTEGER
EXTNAME = 'SPECTRUM' / name of this binary table extension
HDUCLASS= 'OGIP'    / format conforms to OGIP standard
HDUCLAS1= 'SPECTRUM' / PHA dataset (OGIP memo OGIP-92-007)
HDUVERS1= '1.1.0'   / Version of format (OGIP memo OGIP-92-007a)
HDUCLAS2= 'NET'     / Bkgd-subtracted PHA Spectrum
HDUCLAS3= 'RATE'    / PHA data stored in count/s
CHANTYPE= 'PHA'     / type of channel PHA/PI
TLMIN1  =          1 / Lowest legal channel number
TLMAX1  =          60 / Highest legal channel number
POISSERR=          F / Poissonian errors not applicable
DETHANS=          60 / Total No. of Detector Channels available
PHAVERSN= '1992a'   / defaulted for XAS

```

```

FILTER = 'mesh + LEXAN' / Instrument filter in use
EXPOSURE= 0.5189900000000E+05 / Exposure time
EFFAREA = 1.0000E+00 / effective area factor
AREASCAL= 0.1000000000000E+01 / Area scaling factor
BACKSCAL= 0.1000000000000E+01 / Background scale factor
CORRSCAL= 0.0000000000000E+00 / Correlation scale factor
BACKFILE= 'none ' / Background FITS file
CORRFILE= 'none ' / Correlation FITS file
RESPFILE= '1626_total.spectrum.rmf' / redistribution matrix
ANCRFILE= 'NONE ' / ancillary response
CREATOR = 'fits_strectrum.f' / program which created the PHA dataset
TELESCOP= 'SAX ' / Telescope (mission) name
INSTRUME= 'pds ' / Instrument name
OBSERVER= 'SAX TEAM 4U 1626-67 (OP 741)' /
OBJECT = '4U 1626-67' /
DATE = '16/03/98' / FITS file creation date (dd/mm/yy)
DATE_OBS= 5.030168222222E+04 /
ORIGIN = 'XAS ' /
STORAGE = 'BYROW ' /
DEADTIME= 'FIXED ' /
DTVALUE = .000000E+00 /
DTCORR = 'NOT APPLIED' /
SCSTART = 4.578000000000E+03 /
SCEND = 1.010830000000E+05 /
EXPOSURE= 0.5189900000000E+05 / Exposure time
PARENTS = '1 /saxpds1_data2/Pds_data/FOT/op_741/npd003.pddir001' /
PDSDATE = 5.071654903935E+04 /
PDSDTOBS= 5.030168222222E+04 /
PDSUNITS= 'SUM ABCD' /
PDSSTYPE= 'PHA ' /
PDSL0THR= ' This keyword is an array from PDSL01 to PDSL04' / Array follows
PDSL01 = 3 /
PDSUPTHR= ' This keyword is an array from PDSUP1 to PDSUP4' / Array follows
PDSUP1 = 150 /
PDSCOIN = 'FFF ' /
PSACORR = 'FALSE ' /
FILENAME= '1626_total' /
PACKET = 'pddir001' /
NPACKET = 1469 /
TWINDOW = 'colon ' /
HISTORY = 'saxhaccum unit1S+B pddir001 PHA 0 1023 1 1996 8 6 16 22 24 1996 8 6'
HISTORY = '+ 21 50 2 3 150 3 3 0 0' /
PDSBGEXP= 6.461480651855E+03 /
BADDATA = .000000E+00 /
HISTORY = 'pdsoprpspe unit1S+B sub unit1B unit1S' /

```

```

CREATOR = 'PDSOPRSPE Revision: 1.17' /
PDSGRPED= 'TRUE      ' /
HISTORY = 'pdsgrppha unit1S LOG 60 15 200' /
PDSRTEXP= 1.000000000000E+00 /
HISTORY = 'pdsoprspe unit1S_grp sum unit2S_grp unit1+2S_grp' /
HISTORY = 'pdsoprspe unit1+2S_grp sum unit3+4S_grp totalS_grp' /
HISTORY = 'pdsoprspe 1626_15_200_60 sum 1626_total_15_200_60 1626_total' /
CREATOR = 'grppha 2.6.0' / s/w task which wrote this dataset
HISTORY  This extension has been written by WT_SPEC Ver 1.5.0
HISTORY  The original fits file was 1626_total_spectrum.fits
END

```

CHANNEL	RATE	STAT_ERR	SYS_ERR	QUALITY	GROUPING
	count/s	count/s			
1 1	1.4287047E-01	3.9886590E-03	0.0000000E+00	0	1
2 2	1.5950228E-01	3.9867153E-03	0.0000000E+00	0	1
.....					
59 59	7.2025573E-03	5.2549643E-03	0.0000000E+00	0	-1
60 60	6.1054812E-03	5.3176279E-03	0.0000000E+00	0	-1

Vengono ora fornite alcune pagine (in inglese) prese dal sito ufficiale riguardante il formato FITS <http://fits.gsfc.nasa.gov>

[http://fits.gsfc.nasa.gov/fits\\_overview.html](http://fits.gsfc.nasa.gov/fits_overview.html)

---

[Home](#) | [News](#) | [Docs](#) | [WCS](#) | [Samples](#) | [Libraries](#) | [Viewers](#) | [Utilities](#) | [Keywords](#) | [Conventions](#)  
| [Resources](#)

---

## A Brief Introduction to FITS

FITS is the standard computer data format widely used by astronomers to transport, analyze, and archive scientific data files.

### History of FITS

The following paragraphs are reproduced from the 'Introduction' to the [FITS Standard document](#).

The Flexible Image Transport System (FITS) evolved out of the recognition that a standard format was needed for transferring astronomical data from one installation to another. The original form, or Basic FITS, was designed for the transfer of images and consisted of a binary array, usually multidimensional, preceded by an ASCII text header with information describing the organization and contents of the array. The FITS concept was later expanded to accommodate more complex data formats. A new format for image transfer, random groups, was defined in which the data would consist of a series of arrays, with each array accompanied by a set of associated parameters.

These formats were formally endorsed by the International Astronomical Union (IAU) in 1982. Provisions for data structures other than simple arrays or groups were made later. These structures appear in extensions, each consisting of an ASCII header followed by the data whose organization it describes. A set of general rules governing such extensions and a particular extension, ASCII table, were endorsed by the IAU General Assembly in 1988. At the same General Assembly, an [IAU FITS Working Group](#) (IAUFWG) was formed under IAU Commission 5 (Astronomical Data) with the mandate to maintain the existing FITS standards and to review, approve, and maintain future extensions to FITS, recommended practices for FITS, implementations, and the thesaurus of approved FITS keywords. In 1989, the IAUFWG approved a formal agreement for the representation of floating point numbers. In 1994, the IAUFWG endorsed two additional extensions, the image extension and the binary table extension.

FITS was originally designed and defined for 9-track half-inch magnetic tape. However, as improvements in technology have brought forward other data storage and data distribution media, it has generally been agreed that the FITS format is to be understood as a logical format and not defined in terms of the physical characteristics of any particular data storage medium. In 1994, the IAUFWG adopted a set of rules governing the relation between the FITS logical record size and the physical block size for sequential media and bitstream devices. The IAUFWG also approved in 1997 an agreement defining a new format for encoding the date and time in the DATE, DATE-OBS, and other related DATExxxx keywords to correct the ambiguity in the original DATE keyword format beginning in the year 2000.

M.Orlandini

In December 2002, after more than a decade of complex negotiations, the IAUFWG approved 2 papers that deal with the issue of representing World Coordinate Systems (WCS) in FITS. Two more papers in this WCS series are currently under development.

236

[http://fits.gsfc.nasa.gov/fits\\_overview.html](http://fits.gsfc.nasa.gov/fits_overview.html)

Brief highlights of the history of FITS:

- 1979: Initial use and interchange of FITS files
- 1980: Random groups convention developed
- 1981: Published original (single HDU) definition paper
- 1981: Published random groups definition paper
- 1982: FITS format is formally endorsed by the IAU
- 1988: Defined rules for multiple HDUs in a FITS file
- 1988: FITS Working Group established by IAU (IAUFWG)
- 1988: FITS definition extended to include ASCII TABLE extensions
- 1990: FITS definition extended to include IEEE floating-point data
- 1994: FITS definition extended to multiple image arrays in IMAGE extensions
- 1995: FITS definition extended to binary tables in BINTABLE extensions
- 1997: Adopted a Y2K-compliant date format
- 2001: Reiterated existing standard in one paper (NOST document)
- 2002: Approved conventions for generalized world coordinates and celestial coordinates.

## How FITS Evolves

The [IAU-FWG](#) was given authority over FITS matters by the 1988 [IAU](#) General Assembly. When the developer of a data set finds that it does not fit well into the primary HDU or a standard extension format, a new design may be developed. No change can be made that would cause existing FITS files to be out of conformance -- the "once FITS, always FITS" rule. Because software to read FITS files uses the type name of an extension to determine whether or not the software can read the extension, extension type names must be unique. The IAUFWG maintains a [list of extension type names that have been registered](#); the list is at the FITS Support Office. A unique name for any new extension type, even a developmental extension or one that will be used only locally, must be registered with the IAU-FWG. After astronomical community discussion, a formal proposal is distributed. This proposal is discussed by the community and may be further modified. Tests are run using the new format to confirm that it can be practically used for data transport. If the astronomical community reaches a consensus that the proposal should be adopted as standard FITS, and if successful data transfer using the proposed extension can be demonstrated, it is submitted for ratification to the regional committees -- the European FITS Committee, the Japanese FITS Committee, and the American Astronomical Society Working Group on Astronomical Software ([WGAS](#)) [FITS Committee](#). Following approval by the regional committees, it is submitted to the IAU-FWG Approval by the IAU-FWG establishes it as a standard extension.

In addition to the formal rules, a number of conventions are widely observed. Some conventions are used throughout the community others only within a particular discipline such as high energy astrophysics or single dish radio astronomy. Usually, the originator(s) of a convention will circulate an initial proposal for comments among a small group in the same discipline or installation. After this proposal has been refined based upon these comments, it is put out for public comment, usually by announcement to the [sci.astro.fits](#) newsgroup of a URL from which it can be retrieved. Comments at this time may lead to additional changes. If the affected community accepts the convention, installations will start using it in their FITS files. Since failure to use a convention is not a violation of the FITS rules, FITS readers unaware of it must not terminate with an error or give incorrect results when

M.Orlandini

237

<http://fits.gsfc.nasa.gov/xtension.html>

---

[Home](#) | [News](#) | [Docs](#) | [WCS](#) | [Samples](#) | [Libraries](#) | [Viewers](#) | [Utilities](#) | [Keywords](#) | [Conventions](#)  
| [Resources](#)

---

## FITS Extension Names

### Registered with the IAU FITS Working Group

Extensions to the basic FITS format can be defined as specified in "[Generalized Extensions and Blocking Factors for FITS](#)", *A&AS*, 73, 359 (1988) and in Section 4.4 of the [FITS Standard](#) document. The following guidelines, as quoted from the first paper, should be considered before creating a new extension type:

The only restriction that will have to be placed on the freedom to create new extensions is that there should be only one approved extension format for each type of data organization. New extension types have to be created whenever the organization of the information is such that it cannot be handled by one of the existing extension types. It will be the function of each user who creates a new extension type to check with the standards committee to see if an extension already exists for that type of data organization and to propose one if it is really a new extension type. The contents of an extension and the optional keywords used, etc. will depend on the particular application. Thus one can use a standard table extension for all type of tabular information, without having to define a new extension type. With this restriction in mind, users should feel free to create new extension types when the need arises, but should always be aware that the use of non-standard extensions will inhibit the interchange of astronomical data.

Each extension type has a unique name given by the value of the mandatory XTENSION header keyword. The [IAU FITS Working Group](#) maintains this list of registered extension names. Anyone who wants to register a FITS extension name should contact the [chairman](#) of the IAU FITS Working Group.

---

**Standard Extensions** - These 3 extension types have been approved by the [IAU FITS Working Group](#) and are defined in Section 8 of the [FITS Standard](#) document as well as in the indicated *Astronomy and Astrophysics* journal articles.

- **IMAGE** - This extension type provides a means of storing a multidimensional array similar to that of the FITS primary header and data unit. Approved as a standard extension in 1994. The format of **IMAGE** extensions is defined in the [A&AS, 105, 53 \(1994\)](#) journal article.
- **TABLE** - This ASCII table extension type contains rows and columns of data entries expressed as ASCII characters. Approved as a standard extension in 1988. The format of **TABLE** extensions is defined in the [A&AS, 73, 365 \(1988\)](#) journal article.
- **BINTABLE** - This binary table extension type provides a more flexible and efficient means of storing data structures than is provided by the **TABLE** extension type. The table rows may contain a mixture of numerical, logical and character data entries. In addition, each entry is allowed to be a single dimensioned array. Numeric data are kept in binary formats. Approved as a standard extension in 1994. The format of **BINTABLE** extensions is defined in the [A&AS, 113, 159 \(1995\)](#) journal article.

M.Orlandini

238



<http://fits.gsfc.nasa.gov/xtension.html>

**Conforming Extensions** - These conventions meet the requirements for a conforming extension as defined in [A&AS, 73, p359-364, 1988](#) and in Section 4.4 of the [FITS Standard](#) document, however they have not been formally approved or endorsed by the [IAU FITS Working Group](#).

- **IUEIMAGE** - This name was given to the prototype of the **IMAGE** extension type and was primarily used in the IUE project data archive from approximately 1992 to 1994. Except for the name, the format is identical to the **IMAGE** extension.
- **A3DTABLE** - This name was given to the prototype of the **BINTABLE** extension type and was primarily used in the AIPS data processing system developed at NRAO from about 1987 until it was replaced by **BINTABLE** in the early 1990s. The format is defined in the 'Going AIPS' manual, Chapter 14. It is very similar to the **BINTABLE** type except that it does not support the variable-length array convention.
- **FOREIGN** - This extension type is used to put a FITS wrapper about an arbitrary file, allowing a file or tree of files to be wrapped up in FITS and later restored to disk. A full description of this extension type is given in the [FITS Registry](#) of conventions.
- **COMPRESS** - Proposed in 1991 in a [draft paper](#) by Archibald Warnock, Robert Hill, Barbara Pfarr (all at GSFC), and D. Wells (NRAO) as a way of storing compressed images in FITS format. See the FITSBITS email list archive of postings for [September](#) and [October](#) 1991 for a discussion of image compression in general and this proposal in particular. This compression proposal was never implemented, but some of the same ideas were used in the tiled image compression convention that is described in the [FITS Registry](#) of conventions.
- **FITS** - Suggested by Perry Greenfield (STScI) in April 2002 as a way to hierarchically embed entire FITS files within other FITS files. See the discussion on the [fitsbits](#) email list in the [April 2002 thread](#).

---

**Other Registered Extensions** - These extension names have been suggested, but the proposals have not been fully developed or implemented.

- **DUMP** - Suggested extension name for storing a stream of binary data (such as a telemetry stream) in a FITS file. This extension type was never implemented, but the **FOREIGN** extension type serves a similar purpose.
- **FILEMARK** - Suggested by Don Wells (NRAO) to represent the equivalent of a end-of-file mark on magnetic tapes. When the FITS format was designed in the late 1970s, FITS files were mainly written on half-inch magnetic tape where the end of a file could easily be identified by a tape end-of-file mark. Not all other media in use at that time supported such a clear hardware file delimiter, so the FILEMARK extension was proposed as a way of explicitly representing the end of the FITS file.
- **VGROUP** - This extension type was suggested by Don Jennings (GSFC) for possible use in supporting the analog of HDF (Hierarchical Data Format) group structures under FITS. This suggestion was later withdrawn, and the standard **BINTABLE** extension, in conjunction with the `EXTNAME = 'GROUPING'` keyword, was used for this purpose instead. See the description of the [Hierarchical Grouping](#) convention for more details.